

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ  
СІКОРСЬКОГО»

І. Ф. Скіцько, О. І. Скіцько

# ФІЗИКА

## практикум

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник (практикум) для студентів закладів  
вищої освіти, які навчаються за спеціальностями  
"Кібербезпека", "Телекомунікації та радіотехніка" за  
спеціалізаціями "Безпека державних інформаційних ресурсів" і  
"Спеціальні телекомунікаційні системи"*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2020

УДК 537.8  
ББК 22.33  
Ф 48

**Рецензент:** Д.А.Гаврюшенко, професор кафедри молекулярної фізики  
Київського Національного Університету імені  
Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат. наук, професор

**Відповідальний редактор:** І.В.Лінчевський, професор кафедри загальної та  
теоретичної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського, д-р фіз.-мат. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 2 від 01.10.2020 р.)  
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету  
(протокол №3 від 31.08.2020 р.)*

### Електронне мережне навчальне видання

Скіцько Іван Федорович, доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедри загальної і  
теоретичної фізики КПІ ім. Ігоря Сікорського,  
Скіцько Олексій Іванович, с.н.с., к.т.н., старший науковий співробітник  
інституту технічної теплофізики НАН України

**Ф 48 Фізика.** Практикум. Навч. посібник. - 2-видання  
перероблене, доповнене. / І. Ф. Скіцько, О. І. Скіцько.; за заг. ред.  
І. Ф. Скіцька – К. : Вид-во «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2020. – 614 с.

У посібнику подаються основні закони і формули, які необхідні для опанування відповідних тем та розділів типового курсу фізики, що викладається для майбутніх фахівців у сфері захисту інформації та телекомунікацій, наведені методичні вказівки та приклади розв'язування типових практичних завдань, містяться контрольні питання і задачі для самостійної роботи та підготовки до модульного контролю.

Посібник призначений для студентів, які навчаються у закладах вищої освіти і вивчають нормативну навчальну дисципліну «Фізика» з циклу математичної та природничо-наукової підготовки за спеціальностями "Кібербезпека", "Телекомунікації та радіотехніка" та інших спеціальностей.

Посібник може бути корисним для науково-педагогічних працівників, які викладають курс фізики, під час планування та підготовки завдань до практичних занять та модульних контрольних робіт з навчальної дисципліни «Фізика».

© І.Ф.Скіцько, О.І.Скіцько, 2020

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

# ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	7
<b>Декілька порад при розв'язуванні задач</b> .....	8
<b>1. Електростатичне поле у вакуумі</b> .....	10
1.1. Питання теми.....	10
1.2. Основні визначення та формули.....	10
1.3. Питання на самопідготовку.....	15
1.4. Методичні вказівки.....	16
1.5. Приклади розв'язування задач.....	17
1.6. Задачі.....	39
<b>2. Діелектрики та провідники в електричному полі</b> .....	52
2.1. Питання теми.....	52
2.2. Основні визначення та формули.....	53
2.3. Питання на самопідготовку.....	56
2.4. Методичні вказівки.....	56
2.5. Приклади розв'язування задач.....	58
2.6. Задачі.....	88
<b>3. Закони постійного струму</b> .....	109
3.1. Питання теми.....	109
3.2. Основні визначення та формули.....	109
3.3. Питання на самопідготовку.....	112
3.4. Методичні вказівки.....	113
3.5. Приклади розв'язування задач.....	116
3.6. Задачі.....	132
<b>4. Постійне магнітне поле</b> .....	149
4.1. Питання теми.....	149
4.2. Основні визначення та формули.....	149
4.3. Питання на самопідготовку.....	154
4.4. Методичні вказівки.....	154
4.5. Приклади розв'язування задач.....	156
4.6. Задачі.....	173
<b>5. Магнітне поле в речовині</b> .....	182
5.1. Питання теми.....	182
5.2. Основні визначення та формули.....	182
5.3. Питання на самопідготовку.....	185

5.4. Методичні вказівки.....	185
5.5. Приклади розв'язування задач.....	187
5.6. Задачі.....	196
<b>6. Електромагнітна індукція.....</b>	<b>202</b>
6.1. Питання теми.....	202
6.2. Основні визначення та формули.....	202
6.3. Питання на самопідготовку.....	204
6.4. Методичні вказівки.....	204
6.5. Приклади розв'язування задач.....	205
6.6. Задачі.....	214
<b>7. Гармонічні коливання.....</b>	<b>228</b>
7.1. Питання теми.....	228
7.2. Основні визначення та формули.....	228
7.3. Питання на самопідготовку.....	231
7.4. Методичні вказівки.....	231
7.5. Приклади розв'язування задач.....	232
7.6. Задачі.....	239
<b>8. Згасаючі та вимушені коливання.....</b>	<b>248</b>
8.1. Питання теми.....	248
8.2. Основні визначення та формули.....	248
8.3. Питання на самопідготовку.....	250
8.4. Методичні вказівки.....	251
8.5. Приклади розв'язування задач.....	251
8.6. Задачі.....	266
<b>9. Хвилі.....</b>	<b>283</b>
9.1. Питання теми.....	283
9.2. Основні визначення та формули.....	283
9.3. Питання на самопідготовку.....	287
9.4. Методичні вказівки.....	288
9.5. Приклади розв'язування задач.....	289
9.6. Задачі.....	299
<b>10. Інтерференція електромагнітних хвиль.....</b>	<b>309</b>
10.1. Питання теми.....	309
10.2. Основні визначення та формули.....	309
10.3. Питання на самопідготовку.....	312
10.4. Методичні вказівки.....	313



10.5. Приклади розв'язування задач.....	316
10.6. Задачі.....	331
<b>11. Дифракція електромагнітних хвиль.....</b>	<b>345</b>
11.1. Питання теми.....	345
11.2. Основні визначення та формули.....	345
11.3. Питання на самопідготовку.....	346
11.4. Методичні вказівки.....	347
11.5. Приклади розв'язування задач.....	347
11.6. Задачі.....	359
<b>12. Теплове випромінювання та зовнішній фотоефект.....</b>	<b>371</b>
12.1. Питання теми.....	371
12.2. Основні визначення та формули.....	371
12.3. Питання на самопідготовку.....	374
12.4. Методичні вказівки.....	375
12.5. Приклади розв'язування задач.....	375
12.6. Задачі.....	389
<b>13. Будова атома.....</b>	<b>404</b>
13.1. Питання теми.....	404
13.2. Основні визначення та формули.....	404
13.3. Питання на самопідготовку.....	407
13.4. Методичні вказівки.....	407
13.5. Приклади розв'язування задач.....	408
13.6. Задачі.....	413
<b>14. Основи квантової механіки.....</b>	<b>419</b>
14.1. Питання теми.....	419
14.2. Основні визначення та формули.....	419
14.3. Питання на самопідготовку.....	421
14.4. Методичні вказівки.....	421
14.5. Приклади розв'язування задач.....	422
14.6. Задачі.....	430
<b>15. Метали.....</b>	<b>440</b>
15.1. Питання теми.....	440
15.2. Основні визначення та формули.....	440
15.3. Питання на самопідготовку.....	443
15.4. Методичні вказівки.....	443

15.5. Приклади розв'язування задач.....	444
15.6. Задачі.....	452
<b>16. Напівпровідники.....</b>	<b>458</b>
16.1. Питання теми.....	458
16.2. Основні визначення та формули.....	458
16.3. Питання на самопідготовку.....	467
16.4. Методичні вказівки.....	468
16.5. Приклади розв'язування задач.....	468
16.6. Задачі.....	491
<b>17. Контактні явища в напівпровідниках.....</b>	<b>500</b>
17.1. Питання теми.....	500
17.2. Основні визначення та формули.....	500
17.3. Питання на самопідготовку.....	510
17.4. Методичні вказівки.....	510
17.5. Приклади розв'язування задач.....	511
17.6. Задачі.....	523
<b>18. Атомне ядро. Радіоактивність. Ядерні реакції.....</b>	<b>525</b>
18.1. Питання теми.....	525
18.2. Основні визначення та формули.....	525
18.3. Питання на самопідготовку.....	527
18.4. Методичні вказівки.....	528
18.5. Приклади розв'язування задач.....	529
18.6. Задачі.....	533
<b>19. Відповіді.....</b>	<b>536</b>
<b>20. Додатки.....</b>	<b>596</b>
<b>21. Література.....</b>	<b>613</b>

## ВСТУП

Знання основ загальної фізики дуже важливі для оволодіння сучасними принципами побудови та функціонування засобів захисту інформації та телекомунікаційного обладнання. Тому загальний курс фізики включений до відповідних модулів освітньо-професійних програм галузевих стандартів вищої освіти щодо підготовки бакалаврів за спеціальностями «Кібербезпека» і «Телекомунікації та радіотехніка» та інших.

Навчальний посібник призначений для застосування студентами, які навчаються у закладах вищої освіти за цими напрямками підготовки і вивчають нормативну навчальну дисципліну «Фізика» з циклу математичної та природничо-наукової підготовки. У посібнику подаються основні закони і формули, які необхідні для опанування відповідних тем та розділів типового курсу фізики, основ фізики твердого тіла і фізики напівпровідників, контактних явищ, наведені методичні вказівки та приклади розв'язування типових практичних завдань, містяться контрольні питання і задачі для самостійної роботи та підготовки до модульного контролю.

Навчальний посібник повинен допомогти студентові в самостійному оволодінні методикою розв'язування типових задач в рамках курсу загальної фізики, який вивчається у інженерно-технічних закладах вищої освіти, у підготовці до практичних занять і модульного контролю з цієї навчальної дисципліни.

Створення цього посібника стало можливим завдяки цінним зауваженням, творчим дискусіям і науково-методичній підтримці, які надали авторам викладачі кафедри загальної та теоретичної фізики КПІ ім.Ігоря Сікорського, кафедр Інституту спеціального зв'язку та захисту інформації КПІ ім.Ігоря Сікорського, профільні дисципліни яких базуються на відповідних розділах курсу фізики.

Автори висловлюють щиру подяку рецензенту посібника професору кафедри молекулярної фізики Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка, доктору фіз.-мат. наук, професору Д.А.Гаврюшенку змістовні зауваження і рекомендації якого були враховані під час підготовки книги.

Окрему подяку автори посібника висловлюють співробітнику кафедри загальної і теоретичної фізики КПІ ім.Ігоря Сікорського Войченко Надії Євгенівній за допомогу при оформленні тексту посібника.

## ДЕКІЛЬКА ПОРАД ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

1. Перш за все познайомтесь з таблицями додатків, так як розв'язування багатьох задач без них неможливе. Крім того, матеріал, який міститься в таблицях, значно полегшить Вашу роботу і зекономить час.

2. Приступаючи до розв'язування задачі, добре вникніть в її зміст і постановку питання. Виясніть, чи всі дані, які необхідні для розв'язування задачі, приведені. Дані, яких не вистачає, приведені в таблицях додатків. Якщо дозволяє характер задачі, обов'язково зробіть схематичний рисунок, який пояснює її суть, – це у багатьох випадках значно полегшує як пошук розв'язку, так і самий розв'язок.

3. Кожну задачу розв'яжуйте, як правило, в загальному вигляді (тобто в буквенних позначеннях), так щоб величина, яку шукаємо, була виражена через задані величини. Розв'язок в загальному вигляді надає кінцевому результату особливу цінність, так як дозволяє встановити певну закономірність, яка показує, як залежить невідома величина від заданих величин. Крім того, відповідь, яка отримана в загальному виді, дозволяє судити в значній мірі про правильність самого розв'язку ( див. наступний пункт).

4. Отримавши розв'язок в загальному вигляді, необхідно перевірити, чи правильну він має розмірність. Неправильна розмірність має явний признак, що розв'язок помилковий. Якщо можливо, то дослідіть поведінку розв'язку при граничних частинних випадках. Наприклад, якщо заряджене тіло має форму диска і розрахована напруженість електричного поля в точці на осі диска, то ця формула напруженості буде правильною, якщо при віддалені цієї точки на нескінченність вона перейде у формулу напруженості для точкового заряду. При наближенні точки до диска, коли відстань точки від диска є значно менша радіуса диска, ця формула повинна перейти у формулу напруженості поля однорідно зарядженої нескінченної площини. Який би вид не мали формули з квантової механіки, при умові, що стала Планка  $\hbar \rightarrow 0$ , вони повинні переходити у формули класичної фізики. В

протилежному випадку можна зразу стверджувати, що розв'язок неправильний.

5. Приступаючи до розрахунків, пам'ятайте, що числові значення фізичних величин завжди є наближеними. Тому при розрахунках керуйтеся правилами дій з наближеними числами. В числовому значенні величини, яку розраховували, необхідно зберегти останнім той знак, одиниця якого ще перевищує похибку цієї величини. Всі наступні цифри необхідно відкинути.

6. Отримавши відповідь у вигляді числового значення, оцініть його правдоподібність. Така оцінка може в ряді випадків виявити помилковість отриманого результату. Так наприклад, сила струму в реальних провідниках не може бути величинами порядку  $10^4 \div 10^6$  А, так як допустима густина струму для міді є  $7 \text{ А/мм}^2$ . Напруженість електричного поля в середовищі (повітрі, склі, слюді та інших) не може бути більшою від пробійного значення напруженості поля в цих середовищах. Ймовірність проходження мікрочастинки через потенційний бар'єр не може перевищувати 100%; довжина хвилі видимої області спектру не може бути більшою 0,7 мкм, чи меншою 0,4 мкм і т.п.

# 1. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

## 1.1. Питання теми

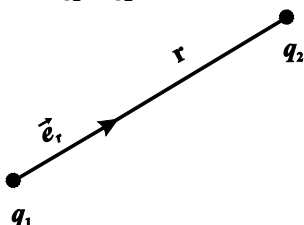
1. Поле, яке створене системою точкових зарядів.
2. Поле, яке створене системою точкових і неточкових зарядів, що розміщені на тілах правильної геометричної форми.

## 1.2. Основні визначення та формули

1. Фундаментальним законом електростатичного поля є *закон Кулона*

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \quad (1.1)$$

де  $q_1$  і  $q_2$  два точкових заряди, які знаходяться на відстані  $r$  один від



одного,  $\vec{e}_r$  - одиничний вектор, проведений в напрямку від заряду  $q_1$  до заряду  $q_2$ ,

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м електрична стала вакууму. Закон Кулона справедливий для точкових, нерухомих електричних зарядів.

2. Основною характеристикою кожної точки поля є *напруженість*  $\vec{E}$  – векторна величина, яка визначається із співвідношення

$$\vec{E} = \vec{F}/q_{np}, \quad (1.2)$$

де  $\vec{F}$  – сила Кулона, що діє на пробний заряд  $q_{np}$  в деякій точці поля, яке створене іншим зарядом  $q$ . Якщо  $q_{np} = +1$  Кл, то напруженість поля чисельно дорівнює кулонівській силі.

Графічно електричне поле зображується силовими лініями. Силова лінія – це лінія, дотична до якої в кожній точці співпадає з лінією вектора  $\vec{E}$ , а густоту силових ліній вибирають так, щоб їх число, яке проходить через одиничну площадку, яка перпендикулярна до силових ліній, було пропорційне модулю  $|\vec{E}|$ .

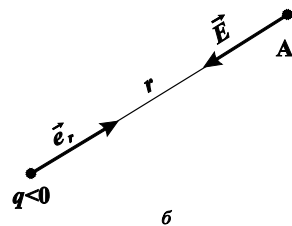
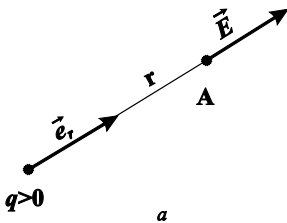
За напрямком силових ліній прийнято напрямок від позитивного заряду до негативного заряду. Тобто вважається, що силові лінії електричного поля починаються на позитивних зарядах і закінчуються

на негативних зарядах. Силкові лінії неперервні, між собою не перетинаються і не дотикаються.

Для точкового заряду  $q$  напруженість  $\vec{E}$  визначається за формулою:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \quad (1.3)$$

де одиничний вектор  $\vec{e}_r$  бере свій початок в точці знаходження заряду  $q$ ,  $r$  – відстань від заряду  $q$  до точки  $A$  поля, в якій визначається напруженість  $\vec{E}$ . Якщо  $q > 0$ , то вектор  $\vec{E}$  направлений по  $\vec{e}_r$ , якщо  $q < 0$ , то вектор  $\vec{E}$  має протилежний напрямок до  $\vec{e}_r$  (див. рис. *a* і *б*).



3. На взаємодію двох точкових зарядів не впливає наявність поряд інших зарядів. Тому справедливий *принцип суперпозиції* електричних полів: напруженість електричного поля, створеного декількома точковими зарядами, в кожній точці поля дорівнює векторній (геометричній) сумі напруженостей полів кожного заряду:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad (1.4)$$

де  $n$  – кількість точкових зарядів,  $\vec{E}_i$  напруженість поля, яка створена  $i$  – тим зарядом  $q_i$ .

4. Властивості силових ліній електричного поля (див. п. 2) дають можливість ввести поняття потоку  $\Phi_E$  вектора  $\vec{E}$  через поверхню  $S$ .

Для однорідного поля ( $\vec{E} = \text{const}$ ) і плоскої поверхні  $S$ :

$$\Phi_E = ES \cos \alpha, \quad (1.5)$$

або

$$\Phi_E = \vec{E} \vec{n} S = \vec{E} \vec{S}, \quad (1.6)$$

де  $\alpha$  – кут між вектором  $\vec{E}$  і одиничною нормаллю  $\vec{n}$  до поверхні  $S$ , формально  $\vec{S} = S\vec{n}$ .

Для неоднорідного електричного поля ( $\vec{E} \neq \text{const}$  в кожній точці поля) і довільної поверхні  $S$

$$\vec{E} d\vec{S} = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}, \quad (1.7)$$

де  $d\vec{S} = \vec{n}dS$ ,  $dS$  – безмежно мала ділянка поверхні  $S$ , в межах якої вектор  $\vec{E} = \text{const}$ ;  $\vec{n}$  – нормаль до ділянки  $dS$ ; інтегрування (сумування) малих потоків  $d\Phi_E = \vec{E} d\vec{S}$  проводиться по всій поверхні  $S$ .

**5.** Наслідком закону Кулона є теорема Остроградського-Гаусса: потік  $\Phi_E$  вектора напруженості через будь-яку замкнуту поверхню  $S$ , що охоплює заряди  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , дорівнює алгебраїчній сумі цих зарядів, поділених на сталу вакууму  $\epsilon_0$ :

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.8)$$

**6.** Напруженість поля, яке створене:

а) безмежною тонкою рівномірно зарядженою площиною

$$E = \sigma/\epsilon_0, \quad (1.9)$$

де  $\sigma = \Delta q/\Delta S$  – поверхнева густина зарядів, яка чисельно дорівнює заряду одиничної ( $1 \text{ м}^2, 1 \text{ см}^2$ ) площі поверхні. Поле такої площини однорідне;

б) зарядженою сферою, радіус якої  $R$ :

- 1) всередині сфери ( $r < R$ )  $E = 0$ ;
- 2) зовні сфери ( $r > R$ )

$$E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2), \quad (1.10)$$

3) близько біля поверхні сфери ( $r = R$ )  $E = q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ , де  $r$  – відстань від центра сфери до точки, в якій визначається напруженість поля.

в) нескінченно довгою прямою рівномірно зарядженою ниткою (стержнем, циліндром) на відстані  $r$  від нитки, осі стержня, осі циліндра (зовні стержня і циліндра):

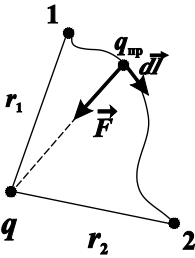


$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.11)$$

де  $\lambda = \Delta q / \Delta l$  – лінійна густина заряду, яка чисельно дорівнює заряду, що припадає на одиницю (1 м, 1 см) довжини нитки (стержня, циліндра).

7. При переміщенні пробного заряду  $q_{np}$  в електричному полі (див.рис), яке створене іншим зарядом  $q$ , виконується робота

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \frac{qq_{np}}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qq_{np}}{4\pi\epsilon_0 r_2}, \quad (1.12)$$



де цифри 1 і 2 позначають початкову і кінцеву точки переміщення заряду  $q_{np}$ ,  $r_1$  і  $r_2$  – відстань точок 1 і 2 до заряду  $q$ ,  $d\vec{l}$  – вектор елементарного переміщення. Робота  $A_{12}$  не залежить від форми траєкторії руху заряду  $q_{np}$ , а визначається його початковим і кінцевим пунктами. Ця властивість роботи  $A_{12}$  дає можливість ввести поняття скалярної характеристики поля – різниці

потенціалів:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_{np}} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (1.13)$$

З точністю до константи можна ввести поняття потенціалу в точці поля на відстані  $r$  від заряду  $q$ :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{const.}$$

Якщо умовно прийняти, що потенціал на безмежності ( $r \rightarrow \infty$ ) дорівнює нулеві, то

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.14)$$

8. Потенціал  $\varphi$  електричного поля в даній точці поля дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , які відповідно створені в цій точці кожним зарядом  $q_1, q_2, \dots, q_n$  окремо (принцип суперпозиції):

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.15)$$

**Примітка.** Точки простору, які мають однаковий потенціал, називаються еквіпотенціальними. Поверхня, на якій знаходяться еквіпотенціальні точки, називається еквіпотенціальною поверхнею. Для точкового заряду такими поверхнями є концентричні сфери, в центрі яких знаходиться заряд.

**9.** Векторна характеристика електричного поля напруженість  $\vec{E}$  і скалярна характеристика цього поля потенціал  $\varphi$  в одній і тій же точці поля зв'язані між собою співвідношенням:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad (1.16)$$

де  $\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$  – математичний диференціальний векторний оператор, який носить назву градієнта,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні вектори в напрямках координатних осей X, Y, Z. Проекції вектора  $\vec{E}$  на координатні осі X, Y, Z визначаються так:

$$E_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (1.17)$$

де  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  – похідні по x, y, z від потенціалу  $\varphi(x, y, z)$ .

Проекція вектора  $\vec{E}$  на довільний напрямок  $\vec{l}$  визначається як:

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}. \quad (1.18)$$

**Примітка.** Формула (1.16) означає, що вектор  $\vec{E}$  направлений в сторону максимального зменшення потенціалу. Це означає, що силові лінії вектора  $\vec{E}$  перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь (ліній на площині) потенціалу  $\varphi(x, y, z)$ .

**10.** Якщо електричні заряди розподілені в просторі неперервним чином, то можна ввести поняття об'ємної густини заряду

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1.19)$$

де  $\Delta q$  заряд, що знаходиться в об'ємі  $\Delta V$  простору. Тобто  $\rho$  це заряд, що припадає на одиницю об'єму ( $1 \text{ м}^3, 1 \text{ см}^3$ ) простору. Для такого випадку теорема (1.8) приймає вид рівняння Пуассона:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.20)$$

де  $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$  – математичний диференційний скалярний оператор, який носить назву дивергенція.

**11.** Циркуляція вектора напруженості електричного поля є фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі по переміщенню одиничного позитивного заряду вздовж замкнутого контуру  $\Gamma$ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} E \cos \alpha \cdot dl = \oint_{\Gamma} E_l dl, \quad (1.21)$$

де  $E_l = E \cos \alpha$  – проекція вектора напруженості  $\vec{E}$  в даній точці контуру на напрямок дотичний до контуру в цій же точці. Коло на значку інтеграла означає, що інтеграл вираховується вздовж замкнутого контуру.

У випадку електростатичного поля циркуляція вектора напруженості дорівнює нулю:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.22)$$

### 1.3. Питання на самопідготовку

**1.** Закон Кулона та його фундаментальність для електростатичного поля.

**2.** Вектор напруженості електричного поля: визначення та фізичний зміст.

**3.** Силова лінія електричного поля: визначення, властивості, фізичний зміст.

**4.** Потік вектора напруженості електричного поля: визначення, фізичний зміст.

**5.** Теорема Остроградського-Гаусса для електричного поля та її зв'язок із законом Кулона.

**6.** Застосування теореми Остроградського-Гаусса до розрахунку електричного поля: точкового заряду, безмежної однорідно зарядженої площини, безмежно довгої однорідно зарядженої прямої нитки, однорідно зарядженої кулі.

7. Робота по переміщенню заряду в електричному полі: її властивості та методи обчислення.

8. Різниця потенціалів: визначення, фізичний зміст. Потенціал: зміст поняття «безмежності» у визначенні потенціалу.

9. Принцип суперпозиції електричних полів: визначення, відмінність цього принципу для напруженості і для потенціалу.

10. Зв'язок між вектором напруженості  $\vec{E}$  і потенціалом поля  $\varphi$ .

11. Взаємне розташування силових ліній вектора  $\vec{E}$  і еквіпотенціальних ліній (поверхонь) потенціалу  $\varphi$  електричного поля. Довести цю властивість їхнього взаємного розташування.

12. Рівняння Пуассона: визначення, фізичний зміст, зв'язок із теоремою Остроградського-Гаусса.

13. Циркуляція вектора напруженості поля  $\vec{E}$  по замкнутому контуру: визначення, фізичний зміст.

## 1.4. Методичні вказівки

Задачі даної теми присвячені знаходженню електричного поля (розрахунку напруженості  $\vec{E}$  і потенціалу  $\varphi$ ) за заданою конфігурацією електричних зарядів. Поля, які розглядаються в задачах, створюються електричними зарядами, що знаходяться на тілах, фізична природа яких не враховується. Розподіл зарядів на таких тілах задається умовою задачі.

Для розрахунку полів використовуються принцип суперпозиції полів (1.4), (1.15) і теорема Остроградського-Гаусса (1.8).

Принцип суперпозиції дозволяє знайти незалежно одне від одного напруженість  $\vec{E}$  і потенціал  $\varphi$ . Проте в деяких випадках більш раціональним є шлях, коли спочатку знаходять потенціал, як функцію координат, а потім, використовуючи формули (1.16, 1.17, 1.18) – напруженість поля.

В тих випадках, коли конфігурація зарядів є достатньо симетричною, для знаходження напруженості поля  $\vec{E}$  використовують теорему Остроградського-Гаусса. Потенціал і різницю потенціалів розраховують за допомогою формул інтегрального зв'язку напруженості і потенціалу (або різниці потенціалів) (1.13).

## 1.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 1.1.** В вершинах квадрата зі стороною  $a$  розташовані два позитивних і два негативних заряди, величина кожного із яких  $q$  (рис.1.1). Визначити напруженість і потенціал електричного поля в центрі квадрата.

**Аналіз.** Поле створюють чотири заряди. Точка С, в якій потрібно знайти напруженість і потенціал поля, рівновіддалена від усіх зарядів і лежить з ними в одній площині, тобто знаходиться в особливих умовах по відношенню до джерел поля. Тому і напруженість і потенціал визначають незалежно один від одного за допомогою принципу суперпозиції (1.4) і (1.15):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4.$$

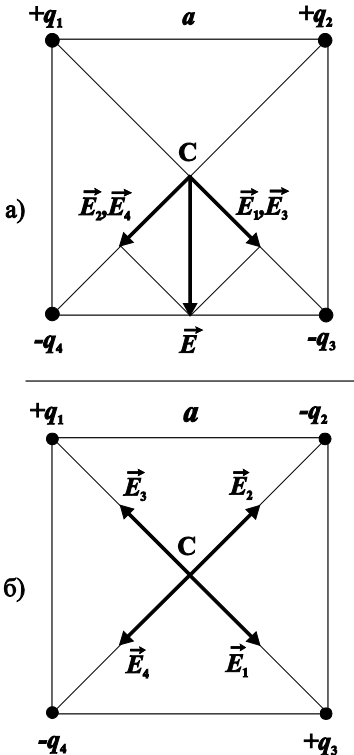


Рис. 1.1

При розрахунку потенціалу (скалярна величина) знаки зарядів враховуються автоматично і тому значення результуючого потенціалу не залежить від порядку розташування позитивних і негативних зарядів в вершинах квадрата. Щоб розрахувати напруженість (векторна величина), необхідно спочатку на рисунку показати напрямки всіх векторів  $\vec{E}_i$ , які залежать від знака заряду  $q_i$ .

Очевидно вектор напруженості  $\vec{E}$  залежить від порядку розташування зарядів в вершинах квадратів.

**Розв'язок.** Відстань  $r$  від кожного заряду до центра квадрата С буде:

$$r = a\sqrt{2}/2.$$

Потенціал, який створюється зарядом

$q_i$  в точці С за формулою (1.14), буде

$$\varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Тоді за формулою (1.15)

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^n q_i = 0,$$

Розглянемо розташування зарядів, яке показано на рис.1.1 (а). Напруженості полів, які створюються в точці С кожним зарядом згідно (1.3), є однакові за величиною, тобто

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = \frac{|q_i|}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Напруженості  $\vec{E}_2$  і  $\vec{E}_4$  полів, які створюються зарядами  $q_2$  і  $q_4$  в точці С, мають однаковий напрямок. Аналогічно,  $\vec{E}_1 = \vec{E}_3$ . Напруженість результуючого поля згідно (1.4)

$$\vec{E} = 2\vec{E}_1 + 2\vec{E}_2.$$

Так як кут між векторами  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  прямий (дорівнює  $90^\circ$ ), то

$$E = \sqrt{(2E_1)^2 + (2E_2)^2} = 2\sqrt{2}E_1 = \frac{2\sqrt{2}|q_1|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sqrt{2}|q_1|}{\pi\epsilon_0 a^2}.$$

При розташуванні зарядів, як показано на рис.1.1(б), в точці С  $E = 0$ .

**Задача 1.2.** Дві паралельні безмежні площини заряджені однорідно і різнойменно з різними за модулем густинами –  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ .

Абсциси вказаних на рисунку 1.2 точок дорівнюють:  $x_1 = -0,3$  м,  $x_2 = -0,1$  м,  $x_3 = +0,3$  м,  $x_4 = +0,4$  м. Різниця потенціалів між точками 3 і 4 дорівнює:  $\varphi_3 - \varphi_4 = 10$  В. Визначити:

- Яка із густин ( $-\sigma_1$  чи  $+\sigma_2$ ) більша за модулем?
- Різницю потенціалів між точками 1 і 2  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

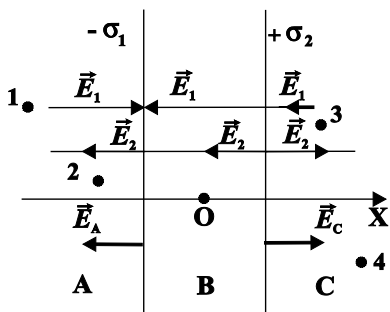


Рис. 1.2

**Розв'язок.** а) В даній задачі однорідне електричне поле створене зарядженими площинами. Згідно формули (1.9) модулі напруженостей полів, створених площинами, дорівнюють:

$$E_1 = |\sigma_1|/(2\epsilon_0), \text{ а } E_2 = |\sigma_2|/(2\epsilon_0)$$

відповідно. Напрямки векторів  $\vec{E}_1$  і

$\vec{E}_2$  показані на рис.1.2. Результируюча

напруженість поля для області А буде  $E_A = |\vec{E}_1 - \vec{E}_2|$ , а для області С –

$E_C = |\vec{E}_2 - \vec{E}_1|$ . Таким чином за величиною  $|\vec{E}_A| = |\vec{E}_C|$ . Згідно умови

задачі  $\varphi_3 > \varphi_4$ . Так як напруженість поля має напрямок в сторону зменшення потенціалу, то вектор  $\vec{E}_C = \vec{E}_2 + \vec{E}_1$ , направлений по осі ОХ.

Це може бути в тому випадку, коли  $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_1|$ , або  $|\sigma_2| > |\sigma_1|$ .

б) Згідно формули (1.17) для однорідного поля можемо записати, що

$$|\vec{E}_C| = \frac{|\varphi_3 - \varphi_4|}{|x_3 - x_4|}, \text{ а } |\vec{E}_A| = \frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{|x_1 - x_2|}.$$

Так як  $|\vec{E}_C| = |\vec{E}_A|$ , то  $|\varphi_1 - \varphi_2| = |\varphi_3 - \varphi_4| \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{|x_3 - x_4|}$ .

Після підстановки числових значень отримаємо, що

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = 10 \frac{|-3 + 1|}{|3 - 4|} = 20 \text{ В.}$$

Так як  $\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , а  $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_1|$ , то вектор  $\vec{E}_A$  буде направлений в протилежному напрямку до осі ОХ, тобто від точки 2 до точки 1. Значить потенціал точки 1 є меншим за потенціал точки 2. Тому  $\varphi_1 - \varphi_2 = -20 \text{ В.}$

**Задача 1.3.** Розрахувати напруженість електричного поля прямої, конкретної довжини, рівномірно зарядженої нитки (стержня, прямої антени) з лінійного густинию заряду  $\lambda$  в точках віддалених від нитки на відстань  $r$ .

**Аналіз.** Електростатичне поле створюється зарядом, розподіленим по нитці. Конфігурація зарядів не дозволяє встановити точне розташування силових ліній в просторі і використати (1.8), тому для визначення характеристик поля необхідно використати принцип суперпозиції (1.4).

**Розв'язок.** Розділимо нитку на досить малі елементи  $AB = dl$ , щоб заряд  $dq = \lambda dl$ , який знаходиться на такому елементі, можна було вважати точковим (рис.1.3). В точці O елементарна напруженість поля такого заряду згідно (1.3) буде:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 AO^2}.$$

Позначимо кут BAO через  $\alpha$ , кут BOA –  $d\alpha$ . Із трикутника ADO знаходимо, що  $AO = r/\sin\alpha$ . Із трикутника ABC знаходимо, що  $BC = dl\sin\alpha$ , а із трикутника BOC знаходимо, що

$$BC \cong AO \cdot d\alpha = \frac{r d\alpha}{\sin\alpha}.$$

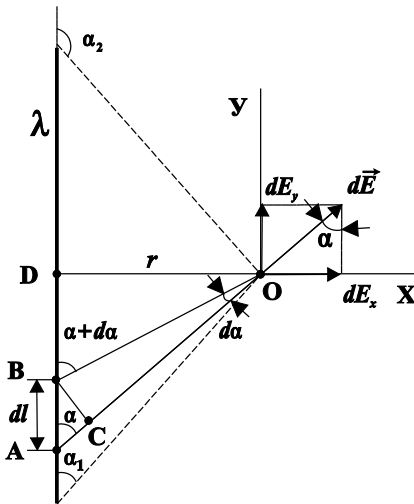


Рис. 1.3

Тому елемент нитки

$$dl = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{r d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Тоді елементарна напруженість в точці O запишеться, як  $dE = \frac{\lambda d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

Проекції вектора  $d\vec{E}$  на осі OX і OY будуть



$$dE_x = \frac{\lambda \sin \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ і } dE_y = \frac{\lambda \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Звідси після інтегрування (сумування) отримаємо:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1). \quad (2)$$

Із формул (1) і (2) легко отримати формулу для напруженості поля нескінченно довгої прямої нитки. Дійсно, якщо  $\alpha_1 = 0$ , а  $\alpha_2 = \pi$ , то

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \text{ а } E_y = 0. \quad (3)$$

Отримаємо формулу (3) за допомогою теореми Остроградського-Гаусса (1.8). В силу симетрії поля вектор напруженості в будь-якій точці простору перпендикулярний циліндричній поверхні, яка проходить через точку О циліндра, віссю якого є нитка (рис.1.4 (а) і (б)). Тому за замкнуту поверхню  $S$ , візьмемо поверхню

циліндра, висота якого  $l$ , а радіус основи  $r$ .

Потік вектора  $\vec{E}$  через площу основи дорівнює нулеві, тому що вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний до нормалі  $\vec{n}$  основи циліндра і

$$\vec{E} d\vec{S} = \vec{E} \vec{n} dS = 0.$$

Потік вектора  $\vec{E}$  через бічну поверхню за формулою (1.7) буде:

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \int_{S_{\text{бічна}}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{\text{бічна}}} \vec{E} \vec{n} dS = \\ &= \int_{S_{\text{бічна}}} E dS = E \int_{S_{\text{бічна}}} dS = \end{aligned}$$

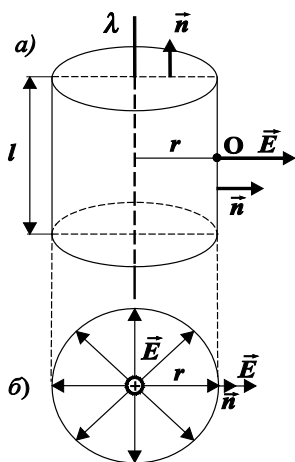


Рис. 1.4

$$= ES_{\text{бічна}} = 2\pi r l E.$$

Електричний заряд, що міститься всередині циліндричної поверхні буде:

$$\sum q = \lambda l.$$

За теоремою Остроградського-Гаусса (1.8) отримаємо, що

$$2\pi r l E = \lambda l / \epsilon_0.$$

Звідки

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

**Висновки.** 1. На перший погляд використання принципу суперпозиції для розрахунку напруженості поля є більш трудомістким, ніж використання теореми Остроградського-Гаусса. Але методи розрахунку характеристик поля з використанням принципу суперпозиції є універсальними і можуть застосовуватись практично і в тих випадках, коли застосувати теорему Остроградського-Гаусса не можливо.

2. Характер електричного поля зарядженої нитки дає можливість розрахувати різницю потенціалів двох точок поля, що знаходяться на відстані  $r_1$  і  $r_2$  від нитки. За формулою (1.18) отримаємо, що

$$d\varphi = -E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r}$$

для нескінченно довгої прямої нитки. Тоді

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

або

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4)$$

Формула (4) справедлива для всіх випадків, крім  $r = 0$  і  $r = \infty$ .

3. Отримавши формули (1), (2), (3) для напруженостей полів відрізка нитки і нескінченно довгої нитки, можемо тепер розраховувати

поля, які створені різними комбінаціями рівномірно заряджених відрізків, нескінченно і напівнескінченно довгих ниток (поле « трикутника», «квадрата», «кута» і т. п. ).

**Задача 1.4.** Тонкий стержень, довжина якого  $l = 10$  см рівномірно заряджений зарядом  $q = 445$  нКл. Знайти напруженість і потенціал поля в точці С, яка лежить на осі стержня. Відстань від середини стержня до точки С  $x_0 = 30$  см. Визначити, при якому найменшому значенні  $x_0/l$  напруженість можна розраховувати за формулою (1.3) точкового заряду, щоб відносна похибка не перевищувала 3%.



Рис. 1.5

**Аналіз.** Електростатичне поле створене зарядом, який розподілений по тонкому стержню. Тому використаємо принцип суперпозиції.

Розіб'ємо стержень на елементарні ділянки довжиною  $dr$  з зарядом  $dq = \lambda dr = q \cdot dr/l$  (рис.1.5). Кожну таку ділянку можна прийняти за точковий заряд, який створює в точці А за формулою 1.14 потенціал

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(x-r)} = \frac{qdr}{4\pi\epsilon_0 l(x-r)}.$$

Внаслідок симетрії очевидно, що в точках, які лежать на осі ОХ, вектор  $\vec{E}$  направлений вздовж цієї ж осі, тому

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}; \quad E_y = 0, \quad E_z = 0.$$

**Розв'язок.** Потенціал в точці А знайдемо, використавши принцип суперпозиції (1.15), тобто

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{-l/2}^{l/2} d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dr}{x-r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{d(x-r)}{x-r} = \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln(x-r) \Big|_{-l/2}^{l/2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \left( \ln\left(x - \frac{l}{2}\right) - \ln\left(x + \frac{l}{2}\right) \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\left(x + \frac{l}{2}\right) / \left(x - \frac{l}{2}\right)\right).$$

Таким чином

$$\varphi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\left(x + \frac{l}{2}\right) / \left(x - \frac{l}{2}\right)\right). \quad (1)$$

Для точки С, коли  $x = x_0 = 30$  см, отримаємо:

$$\varphi(x_0) = \frac{445 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-1}} \ln \frac{30+5}{30-5} \text{ В} = 13,46 \text{ В}.$$

Напруженість поля в точці А отримаємо, продиференціювавши формулу (1) по змінній  $x$ :

$$E_x = -\frac{dy}{dx} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} \left( \frac{1}{x - \frac{l}{2}} - \frac{1}{x + \frac{l}{2}} \right). \quad (2)$$

Зауваження. Формули (1) і (2) справедливі тільки для  $|x| > l/2$ .

Напруженість поля в точці С ( $x = x_0$ ) буде:

$$E = \frac{445 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} \left( \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,35} \right) \text{ В/м} = 45,7 \text{ В/м},$$

причому вектор  $\vec{E}$  направлений по осі ОХ.

Щоб відповісти на друге питання задачі, будемо вважати, що весь заряд стержня є точковий і розмістимо його в точці О. Тоді приблизна формула для розрахунку напруженості поля в точці А запишеться, так:

$$E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}. \quad (3)$$

Формулу (2) перепишемо, спростивши вираз у дужках:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - \frac{l}{2}} - \frac{1}{x + \frac{l}{2}} &= \frac{l}{x^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{l}{x^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{l^2}{4x^2}} \right) = \\ &= \frac{l}{x^2} \left( 1 - \frac{l^2}{4x^2} \right)^{-1} \approx \frac{l}{x^2} \left( 1 + \frac{l^2}{4x^2} \right), \end{aligned}$$

де  $\frac{l}{x^2} \ll 1$ .

Тобто формула (2) напруженості поля в точці А запишеться так:

$$E_x \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \left(1 + \frac{l^2}{4x^2}\right). \quad (4)$$

Тоді відносна похибка заміни формули (4) на формулу (3) буде:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{|E_x - E'_x|}{E_x} = \left|1 - \frac{E'_x}{E_x}\right| = \left|1 - \frac{1}{1 + \frac{l^2}{4x^2}}\right| = \\ &= \left|1 - \left(1 + \frac{l^2}{4x^2}\right)^{-1}\right| \cong \left|1 - 1 + \frac{l^2}{4x^2}\right| = \frac{l^2}{4x^2} \leq 0,03. \end{aligned}$$

Звідки знаходимо, що

$$\frac{x}{l} \geq \sqrt{\frac{1}{0,12}} \approx 2,9, \text{ тобто } x \geq 29 \text{ см.}$$

#### Висновок.

Для точок на осі Х, які віддалені від центра стержня на відстань більшу 29 см, можна для розрахунку напруженості поля використовувати формулу (3) для точкового заряду і при цьому відносна похибка такого розрахунку буде менша 3 %.

#### Задача 1.5.

Напівколо, радіус якого  $R = 1$  м, рівномірно заряджене зарядом  $q = 1,78$  нКл (рис.1.6). Визначити напруженість і потенціал електричного поля, що створюється цим зарядом, в геометричному центрі напівкола.

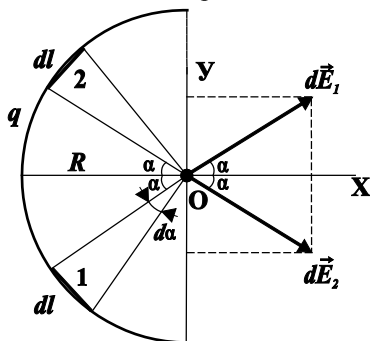


Рис. 1.6

#### Аналіз.

Фізична система складається з двох об'єктів: рівномірно зарядженого зарядом  $q$  напівкола і електричного поля цього заряду.

Напруженість поля невідома.

Заряд  $q$ , який знаходиться на півколі, є не точковим, тому що він знаходиться на тілі, розміри якого  $\pi R$

одного порядку з відстанню  $R$ , що розглядається в даній задачі. Тому неправильним був би розв'язок

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 16 \text{ В/м}. \quad (1)$$

Теорема Остроградського-Гаусса приведе в даному випадку до дуже складних обчислень. Тому, як і в попередніх задачах застосуємо принцип суперпозиції електричних полів.

**Розв'язок.** Розділимо напівколо на дуже малі дуги  $dl$ , щоб заряд  $dq = qdl / (\pi R)$  кожної такої елементарної дуги був точковим. Розглянемо один такий точковий заряд 1 (рис.1.6). Він в точці  $O$  створює електричне поле, вектор напруженості  $d\vec{E}_1$  якого в точці  $O$  складає кут  $\alpha$  з вісю  $OX$ . Очевидно, що любому елементарному заряду 1 в нижній напівплощині знайдеться симетрично розташований елементарний заряд 2 у верхній напівплощині. Геометрична сума векторів  $d\vec{E}_1$  і  $d\vec{E}_2$  є вектор, направлений вздовж осі  $OX$ . Значить при сумуванні необхідно враховувати тільки проекції елементарних векторів  $d\vec{E}$  на вісь  $OX$ :

$$dE_x = dE_1 \cos \alpha = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \alpha = \frac{q \cos \alpha \cdot dl}{4\pi^2 \epsilon_0 R^3}.$$

Перший етап (знаходження диференціалу невідомої величини) закінчений.

Виконаємо другий етап (інтегрування, сумування). Необхідно вибрати змінну інтегрування. Положення точкового заряду на напівколі визначається кутом  $\alpha$ . Тому кут  $\alpha$  і виберемо за змінну інтегрування. Довжина дуги  $dl = R d\alpha$ , тоді

$$dE_x = \frac{q \cos \alpha \cdot d\alpha}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

Інтегруючи це співвідношення по куту  $\alpha$ , отримаємо

$$E = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}. \quad (2)$$

Після підстановки числових значень знаходимо:

$$E = \frac{1,78 \cdot 10^{-9}}{2\pi^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1} = 10,2 \text{ В/м.} \quad (3)$$

Правильний розв'язок (2) і (3) значно відрізняється від неправильного розв'язку (1). Якщо перетворить формулу (2), врахувавши, що  $\lambda = q/(\pi R)$  – лінійна густина заряду, то отримаємо формулу

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R},$$

яка співпадає з формулою (1.11) при  $r = R$  для напруженості поля прямої нескінченно довгої рівномірно зарядженої нитки.

Для знаходження потенціалу використаємо формулу (1.14) і принцип суперпозиції (1.15). Точковий заряд  $dq$ , що знаходиться на дузі  $dl$ , в точці О створює потенціал

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Оскільки потенціал є скалярна величина, то його значення в точці О

$$\text{буде} \quad \varphi = \int_0^q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^q dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1,78 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1} \text{ В} = 16 \text{ В.}$$

Самостійно пропонується доказати, що напруженість електричного поля, яке створюється рівномірно зарядженим колом, в його геометричному центрі О дорівнює нулеві, а значення потенціалу не зміниться, якщо заряд напівкола і кола однаковий.

**Задача 1.6.** Позитивний заряд  $q = 3,56 \text{ нКл}$  рівномірно розподілений по тонкому кільцю, радіус якого  $R = 0,5 \text{ м}$  (рис. 1.7).

а) Визначити напруженість і потенціал поля в точці С, яка лежить на осі кільця на відстані ( $x_0 = 1 \text{ м}$ ) від його центру О.

б) Розглянути випадок, коли  $|x| \gg R$  і  $|x| \ll R$ .

в) Визначити максимальне значення модуля напруженості  $E_{\max}$  і координати точок, в яких воно спостерігається.

г) Побудувати приблизні графіки  $\varphi(x)$  і  $E_x(x)$ .

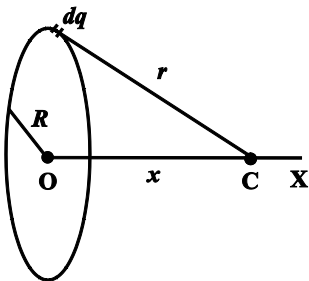


Рис. 1.7

**Аналіз.** Поле створене зарядом, який розподілений по тонкому кільцю заданого радіусу. Поле не має достатньої симетрії (не можливо вказати точну конфігурацію силових ліній), тому для розрахунку поля використаємо принцип суперпозиції. Розіб'ємо кільце на елементарні ділянки, заряд яких  $dq$  є точковим (рис.1.7). Цей заряд в точці С

згідно (1.14) створює потенціал:

$$d\varphi = dq / (4\pi\epsilon_0 r) . \quad (1)$$

**Розв'язок.** а) Потенціал результуючого поля отримаємо, інтегруючи вираз (1) і враховуючи, що  $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ .

$$\varphi = \int_{(q)} d\varphi = \int_{(q)} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}} . \quad (2)$$

При переході від одного елемента кільця до іншого  $(R^2 + x^2)^{1/2}$  не змінюється. Тоді вираз (2) можна записати:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}} = \int_{(q)} dq .$$

Очевидно, що  $\int_{(q)} dq = q$  незалежно від розподілу заряду. Значить як і для рівномірного розподілу заряду по кільцю, так і в будь-якому іншому випадку, в точках, які лежать на осі кільця, потенціал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}} . \quad (3)$$

Значення потенціалу для точки С ( $x = x_0$ ) буде

$$\varphi = \frac{3,56 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (0,25 + 1)^{1/2}} \text{ В} = 28,6 \text{ В} .$$

Проекцію вектора напруженості поля  $\vec{E}$  на вісь ОХ отримаємо, використавши формулу (1.17):



$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Після підстановки числових значень знаходимо, що

$$E_x = \frac{3,56 \cdot 10^{-9} 1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (0,25 + 1)^{3/2}} \text{ В/м} = 22,9 \text{ В/м}.$$

б) Якщо  $x \gg R$ , то вираз  $\frac{1}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \approx \frac{1}{|x|}$ , а вираз

$$\frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{|x|} \text{ і тоді формули (3) і (4) приймають вид}$$

формул для точкового заряду:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|x|}; \quad E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cdot \frac{x}{|x|}.$$

Якщо  $|x| \ll R$ , то вираз  $\frac{1}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \approx \frac{1}{R}$ , а вираз

$$\frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \approx \frac{x}{R^3} \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2} \approx \frac{x}{R^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{R^2}\right).$$

Тоді потенціал визначається за формулою

$$\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 R),$$

яка співпадає із формулою для потенціалу в попередній задачі.

Напруженість поля близько до точки  $O$  ( $x \ll R$ ) визначиться за формулою:

$$E_x = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{R^2}\right).$$

Якщо  $x = 0$  (точка  $O$ ), то  $E_x = 0$ , що теж співпадає із висновками попередньої задачі.

в) Функція  $\varphi(x)$  формула (3) має екстремальне значення при  $x = 0$  і потенціал поля в цій точці

$$\varphi(0) = q/(4\pi\epsilon_0 R).$$

Координати точок  $x_m$ , де  $E_x$  приймає максимальне значення, знайдемо, продиференціювавши формулу (4) по  $x$  і прирівнявши похідну до нуля:

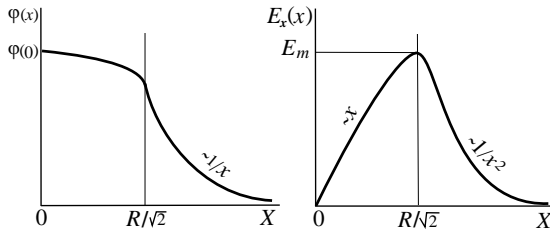
$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \right) = \frac{(R^2 + x^2)^{3/2} - x \frac{3}{2} (R^2 + x^2)^{1/2} 2x}{(R^2 + x^2)^3} = 0.$$

З цього рівняння знаходимо, що

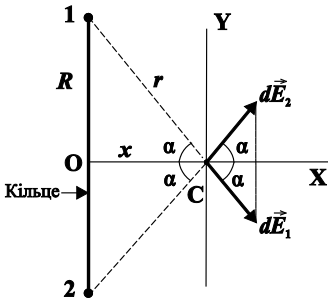
$$2x^2 = R^2 \quad \text{і} \quad |x_m| = R/\sqrt{2} = 35,36 \text{ см.}$$

Підставивши це значення  $x_m$  у формулу (4) отримаємо максимальне значення напруженості поля:

$$E_m = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{3,56 \cdot 10^{-9}}{6\sqrt{3}\pi 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,25} \text{ В/м} = 49,3 \text{ В/м.}$$



г) Приблизні графіки залежностей  $\varphi(x)$  та  $E_x(x)$  для  $x > 0$  показані на рисунку вище. Точка  $x_m = R/\sqrt{2}$  є точкою перегину.



**Зауваження.** Формулу (4) можна отримати і іншим способом: виходячи із виразу для напруженості поля точкового заряду (1.3) і принципу суперпозиції полів (1.4). Для любого точкового заряду  $dq$

$$|d\vec{E}_1| = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Рис. 1.8

Двом діаметрально протилежним точковим зарядам 1 і 2 (рис.1.8) відповідають вектори поля  $d\vec{E}_1$  і  $d\vec{E}_2$ . Геометрична сума цих векторів направлена вздовж осі ОХ (рис.1.8). Значить при сумуванні всіх векторів  $d\vec{E}$  необхідно враховувати тільки їхні проекції на вісь ОХ:

$$E_x = \int_{(q)} dE_1 \cos \alpha = \int_{(q)} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r} = \frac{x}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_{(q)} dq = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Підставивши в останню формулу замість  $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ , отримаємо формулу (4) цієї задачі.

**Задача 1.7.** По круглій тонкій пластинці, радіус якої  $R = 20$  см, рівномірно розподілений заряд  $q = 0,8$  нКл. Вісь пластинки, яка перпендикулярна до її площини, прийняти за вісь ОХ (рис.1.9).

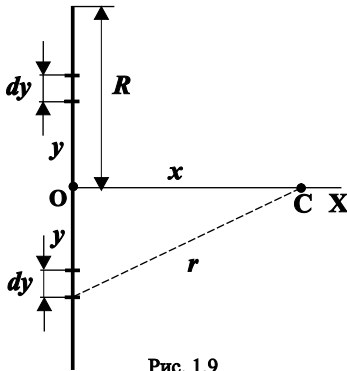


Рис. 1.9

а) знайти потенціал  $\varphi$  і напруженість  $E_x$  поля для точок, які лежать на осі, як функцію  $x$ ;

б) дослідити отримані залежності  $\varphi(x)$  і  $E_x(x)$  для випадку  $|x| \gg R$ ;

в) розрахувати  $\varphi$  і  $E_x$  в точці  $x = 0,2$  м.

**Аналіз.** Поле створене зарядом, який розподілений по площині. Таке поле не має достатньої симетрії (не можливо точно вказати конфігурацію силових ліній), тому для знаходження потенціалу поля в точці С скористаємось принципом суперпозиції.

Розіб'ємо пластину на тонкі концентричні кільця, центри яких знаходяться в точці О. Нехай радіус кільця  $y$ , а товщина  $dy$ . Тоді площа такого кільця  $dS = 2\pi y \cdot dy$ . Так як заряд  $q$  розподілений по пластинці рівномірно, то поверхнева густина заряду  $\sigma = q/(\pi R^2)$ . Тоді кільце містить заряд

$$dq = \sigma dS = \frac{2qydy}{R^2}.$$

**Розв'язок. а)** Скористаємось формулою (3) задачі (1.6). Тоді потенціал, який створюється кільцем в точці С буде:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(y^2 + x^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{ydy}{(y^2 + x^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Потенціал результуючого поля від усіх кілець отримаємо, інтегруючи вираз (1):

$$\varphi(x) = \int_0^R d\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{ydy}{(y^2 + x^2)^{1/2}}.$$

Розрахунок інтегралу:

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{ydy}{(y^2 + x^2)^{1/2}} &= \frac{1}{2} \int_0^R \frac{d(y^2 + x^2)}{(y^2 + x^2)^{1/2}} = \\ &= (y^2 + x^2)^{1/2} \Big|_0^R = (R^2 + x^2)^{1/2} - |x|. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\varphi(x) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} ((R^2 + x^2)^{1/2} - |x|). \quad (2)$$

Скориставшись співвідношенням (1.17) знаходимо:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \left( \frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right). \quad (3)$$

**б)** Для випадку  $|x| \gg R$  у формулі (2) вираз:

$$\begin{aligned} (R^2 + x^2)^{1/2} - |x| &= (x^2 (1 + \frac{R^2}{x^2}))^{1/2} - |x| = |x| (1 + \frac{R^2}{x^2})^{1/2} - |x| = \\ &= |x| (1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} - 1) = \frac{1}{2} \frac{|x|R^2}{x^2}. \end{aligned}$$

Тоді (2) приймає вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} |x| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |x|}. \quad (4)$$

Для випадку  $|x| \gg R$  у формулі (3) вираз

$$\begin{aligned} \frac{x}{|x|} - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} &= \frac{x}{|x|} - \frac{x}{|x|(1 + \frac{R^2}{x^2})^{1/2}} = \\ &= \frac{x}{|x|} \left( 1 - (1 + \frac{R^2}{x^2})^{-1/2} \right) = \frac{x}{|x|} \left( 1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{x R^2}{|x| x^2}. \end{aligned}$$

Тоді формула (3) для напруженості поля приймає вигляд:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cdot \frac{x}{|x|}. \quad (5)$$

Формули (4) і (5) представляють вирази для потенціалу і напруженості поля точкового заряду.

в) Підставивши числові значення  $x$  і  $R$  у формули (2) і (3) отримаємо для випадку  $x = R = 0,2$  м:

$$\varphi(x) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} (\sqrt{2}R - R) = \frac{(\sqrt{2}-1)q}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{(\sqrt{2}-1) \cdot 8 \cdot 10^{-10}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2} \text{ В} = 30 \text{ В}.$$

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 - \frac{R}{R\sqrt{2}} \right) = \\ &= \frac{\left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot 8 \cdot 10^{-10}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \text{ В/м} = 105 \text{ В/м}. \end{aligned}$$

**Задача 1.8.** Напівсфера рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду  $\sigma = 354 \text{ пКл/м}^2$ . Радіус напівсфери  $R = 0,5$  м. Визначити напруженість та потенціал електричного поля в центрі напівсфери.

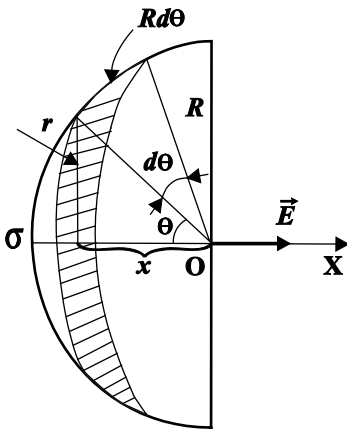


Рис. 1.10

### Розв'язок.

Використаємо принцип суперпозиції для розрахунку характеристик поля в точці О. Для цього розіб'ємо напівсферу на вузькі кільця, як показано на рис.1.10. Радіус кільця  $r = R \sin \theta$ . Ширина кільця  $R d\theta$ . Площа кільця  $dS = 2\pi R^2 \sin \theta \cdot d\theta$ . Заряд кільця  $dq = \sigma dS$ . Відстань від центра кільця до точки О  $x = R \cos \theta$ . Тоді напруженість поля кільця в точці О згідно формули (4) задачі (1.6) буде:

$$dE_x = \frac{dq \cdot x}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma R^3 \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0(R^2 \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta d(\sin \theta).$$

Інтегруючи це співвідношення по  $\theta$  в межах від  $\theta_1 = 0$  (найбільш віддалене від точки О кільце) до  $\theta = \pi/2$  (найближче кільце до точки О), знаходимо:

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \theta (\sin \theta) d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} = \frac{354 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \text{ В/м} = 10 \text{ В/м}.$$

Зауважимо, що напруженість електричного поля в центрі напівсфери не залежить від радіуса  $R$  напівсфери.

Для розрахунку потенціалу використаємо формулу (3) задачі (1.6). Згідно цієї формули потенціал в точці О, що створюється тонким кільцем буде:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(r^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{2\pi\sigma R^2 \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0(R^2 \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \sin \theta d\theta.$$

Інтегруючи це співвідношення, отримаємо:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} = \frac{354 \cdot 10^{-12} \cdot 0,5}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \text{ В} = 10 \text{ В}.\end{aligned}$$

**Задача 1.9.** У вакуумі є скупчення зарядів у формі довгого циліндра, радіус якого  $R_0 = 4$  см. Об'ємна густина заряду  $\rho$  постійна і дорівнює  $0,2$  мкКл/м<sup>3</sup> (рис.1.11). Знайти напруженість електричного поля в точках 1 і 2, які знаходяться на відстанях  $r_1 = 2$  см,  $r_2 = 5$  см від осі циліндра, і різницю потенціалів між цими точками.

**Аналіз.** Поле створене зарядом, який рівномірно розподілений по об'єму. Конфігурація зарядів дає підстави вважати, що поле має осьову симетрію: силові лінії – прямі і в будь-якій площині, яка перпендикулярна до осі циліндра, радіальні. Очевидно, що біля кінців циліндра і при дуже великих значеннях  $r$  силові лінії не будуть радіальні. Така симетрія поля дозволяє шукати напруженість поля за допомогою теореми Остроградського-Гаусса (1.8). Допоміжній поверхні слід надати форму циліндричної поверхні, яка коаксіальна зарядовому циліндру. Довжина цього циліндра може бути довільною, але наперед

набагато меншою, ніж довжина зарядженого циліндра, бо в протилежному випадку припущення про плоскорадіальну структуру поля буде несправедливим.

Різницю потенціалів знайдемо із (1.18), а саме:

$$\begin{aligned}d\varphi &= -\vec{E} d\vec{l} = -E_r dr \quad \text{і} \\ \int_1^2 d\varphi &= -\int_1^2 E_r dr.\end{aligned}$$

Тоді

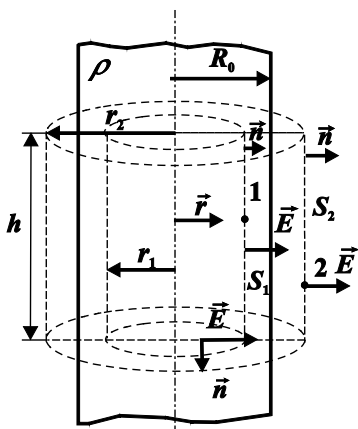


Рис. 1.11

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 E_r dr. \quad (1)$$

**Розв'язок.** Проведемо дві допоміжні циліндричні поверхні  $S_1$  і  $S_2$  з радіусами основ  $r_1$  і  $r_2$  ( $r_1 < R_0, r_2 > R_0$ ) (рис. 1.11). Бічна поверхня допоміжного циліндра і його торці знаходяться наперед в різних умовах відносно силових ліній поля. Для всіх точок торця нормаль  $\vec{n}$  є перпендикулярною до вектора  $\vec{E}$  і тому  $\vec{E}d\vec{S} = \vec{E}\vec{n}dS = 0$ . Це означає, що потік вектора напруженості через торцеві поверхні дорівнює нулеві. На бічних поверхнях  $S_1$  і  $S_2$  нормаль  $\vec{n}$  співпадає з напрямком вектора  $\vec{E}$  і радіус-вектора  $\vec{r}$ , тому  $\vec{E}d\vec{S} = \vec{E}\vec{n}dS = E_r dS$ . Це дає можливість ліву частину формули (1.8) записати так:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{\text{бічна}}} \vec{E} \vec{n} dS = \int_{S_{\text{бічна}}} E_r dS.$$

Всі точки бічної поверхні знаходяться в однакових умовах відносно заряду, що дозволяє вважати  $E_r$  сталою величиною для всіх точок бічної поверхні циліндра, радіус якої  $r$ .

Тоді

$$\int_{S_{\text{бічна}}} E_r dS = E_r \int_{S_{\text{бічна}}} dS = 2\pi r h E_r, \quad (2)$$

де  $h$  – висота допоміжного циліндра.

Сума зарядів, яка охоплюється допоміжною поверхнею і входить в праву частину (1.18), залежить від радіуса циліндра. Коли  $r < R_0$ , то

$$\sum q = \pi r^2 h \rho, \quad (3)$$

а коли  $r > R_0$ , то

$$\sum q = \pi R_0^2 h \rho. \quad (4)$$

Для випадку  $r < R_0$ , теорема Остроградського-Гауса (1.18) запишеться із врахуванням (2) і (3) :

$$2\pi r h E_r = \pi r^2 h \rho / \epsilon_0.$$

Звідки знайдемо

$$E_r = \rho r / (2\epsilon_0). \quad (5)$$



Для випадку  $r > R_0$  (2) і (4) підставляємо в (1.18) і отримуємо, що

$$2\pi r h E_r = \pi R_0^2 h \rho / \epsilon_0.$$

Звідки

$$E_r = R_0^2 \rho / (2r \epsilon_0). \quad (6)$$

Підставляємо в (5)  $r = r_1 = 0,02\text{м}$ , а в (6)  $r_2 = 0,05\text{м}$  і знаходимо що:

$$E_1 = \frac{0,2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ В}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ м}} = 226 \frac{\text{В}}{\text{м}}, \text{ а}$$

$$E_2 = \frac{0,2 \cdot 10^{-6} \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 \text{ В}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 361 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Для знаходження різниці потенціалів між точками 1 і 2 за допомогою рівності (1) необхідно врахувати, що  $E_r$  змінюється за різними законами для випадків  $r < R_0$  і  $r > R_0$ . Тому інтеграл (1) розіб'ємо на два: в межах від точки 1 до поверхні, яка обмежує об'ємний заряд, і від цієї поверхні до точки 2:

$$\int_1^2 E_r dr = \int_1^{R_0} E_r dr + \int_{R_0}^2 E_r dr.$$

В перший інтеграл замість  $E_r$  підставляємо вираз (5), а в другий – вираз (6). Тоді

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( \int_{r_1}^{R_0} r dr + R_0^2 \int_{R_0}^{r_2} \frac{dr}{r} \right) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} \Big|_{r_1}^{R_0} + R_0^2 \ln r \Big|_{R_0}^{r_2} \right) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( \frac{R_0^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} + \right. \\ &\left. + R_0^2 \ln \frac{r_2}{R_0} \right) = \frac{0,2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \left( \frac{(4 \cdot 10^{-2})^2}{2} - \frac{(2 \cdot 10^{-2})^2}{2} + (4 \cdot 10^{-2})^2 \ln \frac{5}{4} \right) \text{ В} = 10,8 \text{ В}. \end{aligned}$$

### Задача 1.10.

Потенціал деякого електричного поля має вигляд  $\varphi = a(x^2 + y^2) + bz^2$ , де  $a = 2 \text{ В/м}^2$ ,  $b = -1 \text{ В/м}^2$ . Знайти модуль і напрямок вектора напруженості поля в точці з координати  $x = 1 \text{ м}$ ,  $y = 2 \text{ м}$ ,  $z = 3 \text{ м}$ .

**Розв'язок.** Використаємо формули (1.16) і (1.17), які зв'язують потенціал  $\varphi$  з вектором напруженості  $\vec{E}$ . За допомогою цих формул знаходимо, що проекції вектора  $\vec{E}$  дорівнюють:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2ax, E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2ay, E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2bz.$$

Сам вектор напруженості

$$\vec{E} = -2a(x\vec{i} + y\vec{j}) - 2bz\vec{k},$$

а його модуль

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = 2\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2}.$$

Підставивши числові значення знаходимо,

$$|\vec{E}| = 2\sqrt{4(1+4)+9} = 2\sqrt{29} \text{ В/м.}$$

Кут  $\alpha$  між вектором  $\vec{E}$  і віссю OX знайдемо із співвідношення:

$$\cos \alpha = \frac{E_x}{|\vec{E}|} = \frac{-2ax}{|\vec{E}|} = \frac{-2 \cdot 2 \cdot 1}{2\sqrt{29}} = -0,37.$$

Звідки знаходимо, що  $\alpha = 112^\circ$ . Кути  $\beta$  і  $\gamma$  між вектором  $\vec{E}$  і осями OY і OZ, відповідно, знаходимо аналогічно як кут  $\alpha$ .

$$\cos \beta = \frac{-2ay}{|\vec{E}|} = \frac{-2 \cdot 2 \cdot 2}{2\sqrt{29}} = -0,74, \beta = 138^\circ.$$

$$\cos \gamma = \frac{-2bz}{|\vec{E}|} = -\frac{-2 \cdot (-1) \cdot 3}{2\sqrt{29}} = 0,557, \gamma = 56^\circ.$$

## 1.6.Задачі

**1.11.** Щоб представити собі величину електричного заряду в 1 Кл, підрахувати, з якою силою відштовхувались би два однойменні заряди, величина кожного з яких була би 1 Кл і знаходились би вони на відстані 1 км один від одного.

**1.12.** Вирахувати відношення сили електричного відштовхування  $F_e$  двох електронів до сили їх гравітаційного притягання  $F_g$ .

**1.13.** З якою силою притягується електрон в атомі водню до ядра, якщо діаметр атома порядку  $2 \cdot 10^{-8}$  см?

**1.14.** Знайти сумарний заряд всіх «вільних» електронів в міді, що знаходяться в  $1 \text{ см}^3$ . Вважати, що кількість «вільних» електронів приблизно дорівнює кількості атомів міді.

**1.15.** Вирахувати прискорення, яке надає один електрон іншому, який знаходиться від першого на відстані  $r = 1,00$  мм.

**1.16.** Два точкових заряди однакової величини  $q$  знаходяться на відстані  $l$  один від одного. Куди необхідно розмістити точковий заряд  $q'$ , щоб система знаходилась в рівновазі? Знайти величину  $q'$ .

**1.17.** Два точкових заряди  $+q$  і  $-q$  розташовані так як показано на рис.1.12. Показати напрямки напруженості поля  $\vec{E}$  в точках 1,2,3,4.

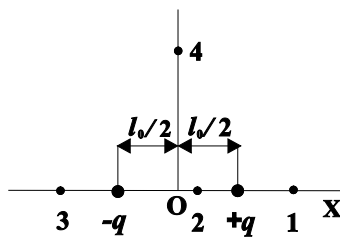


Рис. 1.12

**1.18.** Три однакових точкових заряди  $q$  розташовані у вершинах рівностороннього трикутника, а точковий заряд  $q'$  – в центрі трикутника. Яким повинен бути заряд  $q'$ , щоб сила, яка діє на кожний заряд, дорівнювала нулю?

**1.19.** У вершинах квадрата із стороною  $a$  знаходяться однакові однойменні заряди, величина кожного з яких  $q$ . Який заряд  $Q$

протилежного знаку необхідно розташувати в центрі квадрата, щоб результуюча сила, яка діє на кожний заряд, порівнювала нулевій ?

**1.20.** В електричному полі в трьох «близько» розташованих точках, які не лежать на одній прямій, потенціали однакові. Що можна сказати про напрямок напруженості поля біля цих точок?

**1.21.** На рис.1.13 приведена картина силових ліній поля  $\vec{E}$ . Зобразити еквіпотенційні лінії і вказати напрямок зростання потенціалу вдовж ліній  $\vec{E}$  поля.

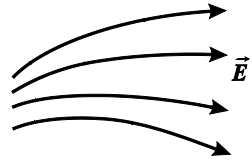


Рис. 1.13

**1.22.** У вершинах правильного шестикутника із стороною  $a$  розміщені точкові однакові за модулем заряди  $q$ . Знайти потенціал  $\phi$  і напруженість поля  $\vec{E}$  в центрі шестикутника при умові, що: а) знаки всіх зарядів однакові; б) знаки сусідніх зарядів протилежні.

**1.23.** Напруженість поля  $\vec{E} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ , де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – константи. Чи є це поле однорідним? Знайти його потенціал  $\phi(x, y, z)$ , якщо  $\phi(0, 0, 0) = 0$ .

**1.24.** Потенціал електростатичного поля в деякій області залежить тільки від координати  $x$ :

$$\phi = -ax^2/2 + \text{const.}$$

Яка буде напруженість поля в цій області існування поля? При якому розподілі зарядів отримається таке поле?

**1.25.** Чи може електростатичне поле мати вигляд  $\vec{E} = a(y\vec{i} - x\vec{j})$ , де  $a$  постійна величина?

**1.26.** Чи може існувати у вакуумі електростатичне поле, вектор напруженості якого  $\vec{E}$  у всьому об'ємі поля однаково направлений, але за величиною змінюється, якщо переходить від точки до точки по нормальному до вектора  $\vec{E}$  напрямку (див. рис.1.14).

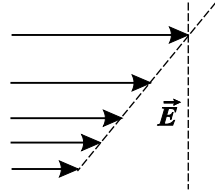


Рис. 1.14.

**1.27.** Потенціал поля, що створюється деякої системою зарядів, має вигляд  $\varphi = a(x^2 + y^2) + bz^2$ , де  $a = 2 \text{ В/м}^2$ ,  $b = 1 \text{ В/м}^2$ . Знайти: а) модуль напруженості  $E$  електричного поля в точці з координатами  $(1, 1, -1)$ ; б) кут між вектором напруженості поля  $\vec{E}$  і віссю  $OX$  в цій же точці.

**1.28.** Потенціал поля, що створюється деякою системою зарядів, має вид  $\varphi = a(x^2 + y^2) - bz^2$ , де  $a = 1 \text{ В/м}^2$ ,  $b = 2 \text{ В/м}^2$ . Знайти: а) модуль напруженості електричного поля в точці з координатами  $(1, 1, -1)$ ; б) кут між вектором напруженості поля  $\vec{E}$  і віссю  $OZ$  в цій же точці.

**1.29.** Знайти вектор напруженості електричного поля, потенціал якого має вид  $\varphi = \vec{a}\vec{r}$ , де  $\vec{a}$  – сталий вектор,  $\vec{r}$  радіус вектор точки поля.

**1.30.** Визначити вектор напруженості електричного поля, потенціал якого залежить від координат  $x$ ,  $y$  за законом:  
а)  $\varphi = a(x^2 - y^2)$ ; б)  $\varphi = axy$ , де  $a$  – стала.

**1.31.** В центрі куба знаходиться заряд  $q = 53,125 \text{ пКл}$ . Визначити потік вектора напруженості поля  $\vec{E}$  через одну із граней куба.

**1.32.** Чому дорівнює потік вектора напруженості поля  $\vec{E}$  через поверхню сфери, якщо в центрі сфери знаходиться диполь з моментом  $\vec{p}$ ?

**1.33.** На рисунку 1.15. приведені силові лінії вектора напруженості  $\vec{E}$  електричного поля. Визначити знак потоку  $\Phi_E$  вектора  $\vec{E}$  через замкнуту поверхню  $S$  у приведених випадках.

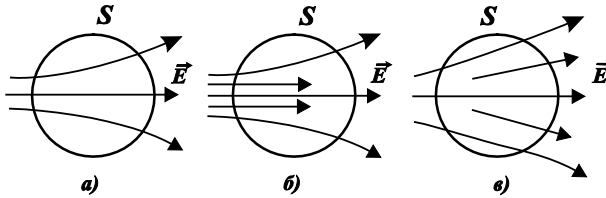


Рис. 1.15

**1.34.** У вакуумі тонкою нескінченно довгою однорідно зарядженою ниткою створене електричне поле. Лінійна густина заряду дорівнює  $\lambda = 1$  нКл/м. Проведена уявна сферична поверхня, радіус якої  $R = 18$  см, з центром на нитці. Знайти:

а) максимальну проекцію напруженості поля  $E_n$  на нормаль до поверхні;

б) потік  $\Phi_E$  вектора  $\vec{E}$  через поверхню.

**1.35.** Знайти залежність густини зарядів  $\rho$  від декартових координат  $x, y, z$ , при якій напруженість поля описувалась би функцією  $\vec{E} = 1x\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 3z^3\vec{k}$ .

**1.36.** 1. Яка система зарядів може створити у вакуумі поле з напруженістю  $\vec{E} = \alpha\vec{r}$  ( $\alpha$ —константа,  $\vec{r}$ — радіус-вектор)? 2. Чому дорівнює для такого поля потік  $\Phi_E$  вектора  $\vec{E}$  через довільну поверхню  $S$ , яка обмежує об'єм  $V$ ?

**1.37.** Напруженість поля  $\vec{E}(\vec{r}) = a\vec{r}$ , де  $a$  константа,  $\vec{r}$  — радіус-вектор,  $r = |\vec{r}|$ . Визначити густину зарядів  $\rho$ , які створюють це поле.

**1.38.** Безмежна пластина, ширина якої  $a$ , заряджена з постійною об'ємною густиною  $\rho$  (див.рис.1.16). Знайти напруженість поля  $E_x(x)$ . Побудувати графік залежності  $E_x$  від  $x$ . Знайти потенціал  $\varphi(x)$ , прийнявши  $\varphi(0) = 0$ , і побудувати графік  $\varphi(x)$ .

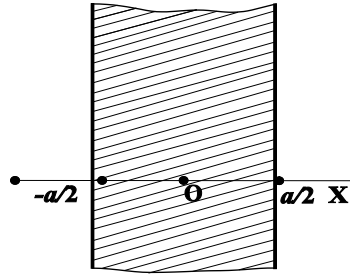


Рис. 1.16

**1.39.** Підрахувати середню об'ємну густину  $\rho$  електричних зарядів в атмосфері, якщо відомо, що напруженість електричного поля на поверхні землі дорівнює 100 В/м, а на висоті  $h = 1,5$  км ця напруженість зменшується до 25 В/м.

**1.40.** Скориставшись формулою (3) із розв'язку задачі (1.7), отримати вираз для напруженості поля  $E_x$  (формула 1.9) нескінченної площини, зарядженої однорідно з густиною заряду  $\sigma$ . Вісь  $OX$  перпендикулярна до площини.

**1.41.** Відомо, що потенціали двох близьких паралельних екіпотенціальних площин 1 і 2 дорівнюють  $\varphi_1 = 3,00$  В,  $\varphi_2 = 3,05$  В. Відстань між площинами  $l = 0,5$  см. Вказати напрямок і вирахувати значення модуля напруженості поля  $E$  між цими площинами.

**1.42.** Дві паралельні безмежні площини заряджені: одна з густиною  $\sigma_1 = -0,884$  нКл/м<sup>2</sup>, інша з густиною  $\sigma_2 = +1,768$  нКл/м<sup>2</sup> (див.рис.1.17). Знайти напруженість поля  $\vec{E}$  для кожної із областей А, В і С.

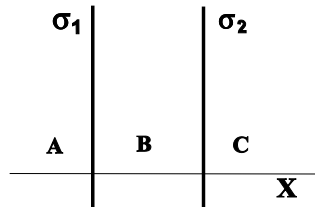


Рис. 1.17

**1.43.** Дві паралельні безмежні площини заряджені різнойменно з різними за модулем густинами заряду  $+\sigma_1$  і  $-\sigma_2$ . Абсциси, вказаних на рис.1.18 точок, дорівнюють:  $x_1 = -2$ м,

$x_2 = -1$  м,  $x_3 = +1$  м,  $x_4 = +5$  м.  
Різниця потенціалів між точками 2 і 1 дорівнює  $\varphi_2 - \varphi_1 = 100$  В.

а) Яка із густин  $(+\sigma_1, \text{чи } -\sigma_2)$  більша за модулем?

б) Чому дорівнює різниця потенціалів  $\varphi_4 - \varphi_3$ ?

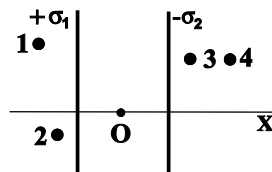


Рис. 1.18

**1.44.** Є безмежна однорідно заряджена площина (рис.1.19).

Візьмемо точку Р, що знаходиться на відстані  $b$  від площини. Проведемо навколо точки О коло, радіус якого  $a$ . Треба знайти  $a$ , при якому напруженість поля в точці Р, що створюється зарядами всередині кола, буде дорівнювати половині напруженості поля, яка створюється всією площиною. Знайти  $r$  і  $\varphi$ , які відповідають цьому значенню  $a$ .

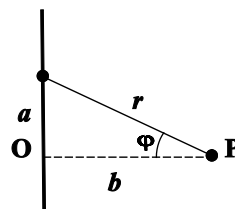


Рис. 1.19

**1.45.** У вакуумі знаходиться дуже тонкий прямий стержень заряджений з однаковою скрізь лінійною густиною заряду  $\lambda$ . Довжина стержня  $2a$ . Знайти модуль напруженості поля  $E$ , як функцію відстані  $r$  від центра стержня для точок, які лежать на прямій, що перпендикулярна до осі стержня і проходить через його центр. Розглянути випадки: а)  $r \ll a$  і б)  $r \gg a$ .

**1.46.** Дві довгих тонкі нитки, які розташовані паралельно на відстані  $d = 0,2$  м одна від одної, рівномірно заряджені різноименними зарядами з лінійними густинами  $\lambda_1 = +4,73$  нКл/м і  $\lambda_2 = -4,73$  нКл/м. Визначити напруженість поля в точці, яка лежить в площині симетрії на відстані  $h = 0,4$  м від площини, в якій лежать нитки.

**1.47.** Два нескінченно довгих коаксіальних циліндри з радіусами основ  $R_1 = 10$  мм і  $R_2 = 11$  мм заряджені однойменно з поверхневими густинами заряду  $\sigma_1 = +1$  мКл/м<sup>2</sup> і  $\sigma_2 = +2$  мКл/м<sup>2</sup> відповідно. Знайти різницю потенціалів між циліндрами.



**1.48.** При умові попередньої задачі визначити величину напруженості  $E$  електричного поля зовні циліндрів на відстані  $r = 2$  см від осі циліндрів.

**1.49.** Тонкий прямий заряджений стержень, довжина якого  $2a$ , а заряд  $q$ , знаходиться у вакуумі. Знайти модуль вектора напруженості електричного поля як функцію відстані  $r$  від центра стержня до точок осі стержня поза ним. Дослідити отриманий вираз при  $r \gg a$ .

**1.50.** Дуже довга пряма рівномірно заряджена нитка має заряд  $\lambda$  на одиницю довжини. Знайти модуль і напрямок вектора напруженості електричного поля в точці, яка знаходиться від нитки на відстані  $x$  і знаходиться на перпендикулярі до нитки, який проходить через один із її кінців.

**1.51.** Дві нескінченно довгі нитки, відстань між якими  $a = 5$  см, рівномірно заряджені з однаковими густинами заряду  $\lambda = 10$  нКл/м. Визначити максимальне значення напруженості поля для точок, що належать площині симетрії ниток.

**1.52.** Відстань між двома прямими нескінченно довгими однорідно зарядженими нитками  $a = 31$  см. Нитки заряджені різноименними зарядами з лінійними густинами  $\lambda_1 = +2$  нКл/м і  $\lambda_2 = -4$  нКл/м. Визначити напруженість поля в точці, віддаленій на відстань  $a$  як від першої так і від другої нитки.

**1.53.** Тонкий однорідно заряджений стержень зігнутий пополювині під прямим кутом як показано на рис.1.20. Довжина стержня  $2a = 2$  м. Лінійна густина заряду  $\lambda = 7,87$  нКл/м. Визначити напруженість електричного поля в точці А.

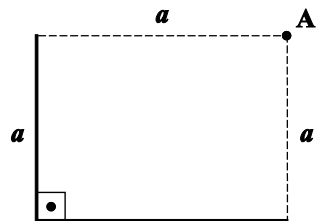


Рис. 1.20

**1.54.** Тонкий однорідно заряджений стержень зігнутий під прямими кутами, як показано на рисунку 1.21. Довжина стержня  $6a=6\text{м}$ . Лінійна густина заряду  $\lambda = 14,33\text{ нКл/м}$ . Визначити напруженість електричного поля в точці А.

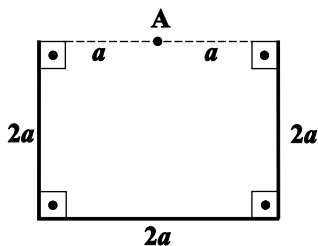


Рис. 1.21

**1.55.** На нескінченно довгій тонкій нитці рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною  $\lambda = 12\text{ нКл/м}$ . Визначити різницю потенціалів двох точок поля, які віддалені від нитки на відстані  $r_1 = 2\text{ см}$  і  $r_2 = 4\text{ см}$ .

**1.56.** Рівномірно заряджена нескінченна нитка, на одиницю довжини якої приходить заряд  $\lambda$ , має конфігурацію, як показано на рисунку 1.22. Знайти модуль вектора напруженості електричного поля в точці О, якщо радіус заокруглення  $R$  значно менший довжини нитки.

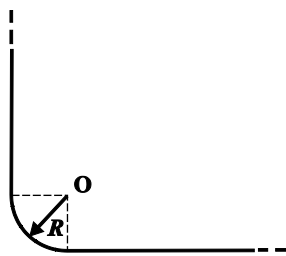


Рис. 1.22

**1.57.** Рівномірно заряджена нескінченно довга нитка, на одиницю довжини якої приходить заряд  $\lambda$ , має конфігурацію, яку показано на рисунку 1.23. Знайти модуль вектора напруженості електричного поля в точці О.

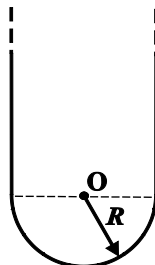


Рис. 1.23

**1.58.** Рівномірно заряджена дуже довга пряма нитка розташована по осі круга, радіус якого  $R = 10\text{ см}$ , і одним своїм кінцем впирається в його центр. Заряд нитки на одиницю довжини дорівнює  $\lambda = 8,85\text{ нКл/м}$ . Знайти потік вектора  $\vec{E}$  через площу круга.

**1.59.** Знайти модуль і напрямок напруженості поля  $\vec{E}$  в центрі кільця, радіус якого  $R$ , по якому рівномірно розподілений заряд  $q > 0$ , а в кільці зроблений проріз, ширина якого  $b \ll R$ .

**1.60.** Дуже тонка пластина має форму кільця з внутрішнім радіусом  $a$  і зовнішнім радіусом  $b$ . По пластинці рівномірно розподілений заряд  $q$ . Приймаючи вісь пластинки за вісь  $x$ , знайти потенціал  $\phi$  і напруженість поля  $E_x$  по осі пластинки як функцію  $x$  (початок відліку  $x$  розмістити в центр кільця). Дослідити випадок  $|x| \gg b$ .

**1.61.** Два однакових круглих диски, радіуси яких  $R = 10$  см, заряджені різнойменними зарядами, розподіленими рівномірно з поверхневою густиною  $|\sigma| = 8,85$  нКл/м<sup>2</sup> і знаходяться на відстані  $d = 1$  см один від одного. Знайти напруженість поля в точці А, яка знаходиться на спільній осі дисків на відстані  $h = 5$  см від ближнього диска (див. рис.1.24).

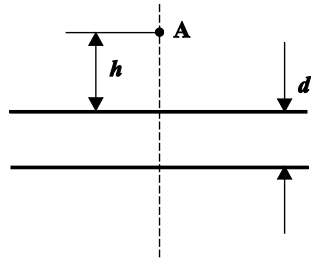


Рис. 1.24

**1.62.** Два однакових коаксіальних диски, радіуси яких  $R = 10$  см, заряджені рівномірно з густинами заряду  $\sigma_1 = +5$  мкКл/м<sup>2</sup> і  $\sigma_2 = -5$  мкКл/м<sup>2</sup>. Диски зближені до відстані  $d = 2$  мм (утворився плоский конденсатор). Визначити силу взаємодії дисків, нехтуючи краєвими неоднорідностями електричного поля.

**1.63.** Сферичною поверхнею, радіус якої  $R$ , рівномірно розподілені заряди з поверхневою густиною  $\sigma$ . Знайти потенціал  $\phi$  і напруженість поля  $E$  зарядів в залежності від відстані  $r$  до центра сфери. Побудувати графіки залежності цих величин від  $r$ .

**1.64.** Сфера рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду  $\sigma = 354 \text{ пКл/м}^2$ . Радіус сфери  $R = 0,5 \text{ м}$ . Визначити напруженість  $\vec{E}$  та потенціал поля  $\varphi$  в центрі сфери.

**1.65.** Знайти модуль і напрямок напруженості поля  $\vec{E}$  в центрі сфери, радіус якої  $R$ , по поверхні якої рівномірно розподілений заряд  $q > 0$ , а в сфері зроблений маленький отвір, площа якого  $S \ll R^2$ .

**1.66.** Приймаючи Землю за кулю, радіус якої  $R = 6400 \text{ км}$ , визначити заряд Землі, якщо напруженість електричного поля біля поверхні Землі дорівнює  $E = 130 \text{ В/м}$ . Визначити потенціал поверхні Землі, приймаючи потенціал на нескінченності  $\varphi_\infty = 0$ .

**1.67.** Заряд  $q = 593 \text{ нКл}$ , розподілений рівномірно в об'ємі кулі, радіус якої  $80 \text{ мм}$ . Знайти потенціал  $\varphi$  і напруженість поля  $\vec{E}$  в центрі кулі.

**1.68.** Яка була би напруженість електричного поля в центрі сферичної поверхні, якщо одна половина цієї поверхні була би покрита зарядами з постійною густиною  $\sigma$ , а інша половина теж рівномірно покрита зарядами такого ж знаку, але з удвічі меншою густиною?

**1.69.** Куля рівномірно заряджена електрикою з об'ємною густиною  $\rho$ . Всередині кулі зроблена порожнина, центр якої  $O'$ , зміщений відносно центра кулі  $O$  на відстань  $a$ . Визначити електричне поле всередині порожнини.

**1.70.** Два заряди  $+q$  і  $-q$  знаходяться в точках з координатами  $(l/2, 0, 0)$  і  $(-l/2, 0, 0)$  відповідно. Яку роботу виконають сили поля, які створюються цими зарядами, при видаленні заряду  $q_1$  із початку координат на нескінченність? Як зміниться відповідь, якщо обидва заряди однакові і дорівнюють  $+q$ ?

**1.71.** Знайти роботу, яку виконують сили однорідного поля з напруженістю  $\vec{E}$  над зарядом  $q$  при його переміщенні довільною траєкторією із точки 1 з радіус-вектором  $\vec{r}_1$  в точку 2 з радіус-вектором  $\vec{r}_2$ .

**1.72.** Яку роботу необхідно виконати, щоб повернути диполь з моментом  $\vec{p}$  із положення по полю  $\vec{E}$  в положення проти цього поля?

### Додаткові задачі

**1.73.** В електричному полі точкового заряду  $q = 1$  мКл на відстані  $r = 5$  см знаходиться електричний диполь з дипольним моментом  $p = 1,6 \cdot 10^{-26}$  Кл·м, який може вільно повертатись в полі. Яку роботу необхідно виконати, щоб видалити диполь на нескінченність? Вважати, що довжина диполя дуже мала порівняно з відстанню  $r$ .

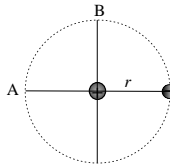
**1.74.** Є дві однакові крапельки води. Заряд однієї із них дорівнює п'яти зарядам електрона, а другої - восьми зарядам електрона. Краплі знаходяться одна від одної на відстані, при якій сила електричного відштовхування врівноважується силою їхнього взаємного гравітаційного притягання. Які радіуси крапельок?

**1.75.** Електрон знаходиться у вакуумі в електричному полі, напруженість якого  $E = 5$  В/м і направлена вертикально вгору. Де біля електрона напруженість поля дорівнює нулю?

**1.76.** Визначити положення точки, в якій напруженість електричного поля дорівнює нулю біля двох неоднакових зарядів  $q_1$  і  $q_2$ , що знаходяться на відстані  $l$ . Розглянути випадки: а) одноіменних зарядів; б) різноіменних зарядів.

**1.77.** Визначити напруженість поля в центрі шестикутника зі стороною  $a = 5$  см, у вершинах якого розташовані: а) шість однакових за модулем зарядів 8,85 пКл; б) розглянути випадок, коли три із цих зарядів позитивні, а три - негативні.

**1.78.** Радіус атома водню  $r = 0,53\text{\AA}$ . Вважаючи протон і електрон за точкові заряди, знайти напруженість електричного поля в



**Рис.1.25.**

точках А і В, які знаходяться на такій же відстані від протона, як і електрон, і розташовані так, як показано на рис.1.25.

**1.79.** На довгому прямому проводі, довжина якого  $l = 1\text{м}$ , рівномірно розподілений заряд  $q_1 = +6 \cdot 10^{-7}\text{Кл}$ . На відстані  $r = 5\text{мм}$  знаходиться порошинка, заряд якої  $q_2 = -3,2 \cdot 10^{-16}\text{Кл}$ . Визначити силу, яка діє на порошинку. Розглянути два випадки: а) порошинка знаходиться біля середини проводу; б) порошинка знаходиться на продовженні проводу на відстані  $r = 5\text{мм}$  від одного із його кінців.

**1.80.** Заряди пластин плоского конденсатора дорівнюють  $q_1 = +300\text{нКл}$  і  $q_2 = -300\text{нКл}$ , відповідно. Площа кожної пластини  $S = 200\text{см}^2$ . Яку роботу необхідно виконати, щоб розсунути пластини на відстань  $d = 2\text{см}$ .

**1.81.** Тонкий стержень рівномірно заряджений зарядом  $q = 400\text{нКл}$ . Визначити напруженість електричного поля в точці, яка знаходиться на відстані  $r_0 = 10\text{см}$  від середини стержня і на відстані  $r = 400\text{см}$  від його кінців.

**1.82.** Тонке кільце із тонкого проводу, радіус якого  $R = 6\text{см}$ , рівномірно заряджене зарядом  $q = 20\text{нКл}$ . Визначити максимальну напруженість електричного поля на осі кільця, що проходить через його центр і перпендикулярна до площини кільця.

**1.83.** Площина рівномірно заряджена з густиною заряду  $\sigma = 400\text{нКл/м}^2$ . Посередені площини є малий порівняно з її розмірами круглий отвір, радіус якого  $r = 10\text{мм}$ . Знайти напруженість електричного поля в точці на відстані  $b = 20\text{см}$  від

площини, яка знаходиться на перпендикулярі до площини, який проходить через центр отвору.

**1.84.** Визначити роботу електричних сил при перенесенні заряду  $q = 2 \text{ нКл}$ : а) із точки  $A$  в точку  $B$  (рис.1.26.) і б) із точки  $C$  в

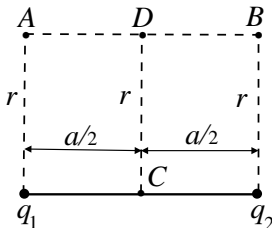


Рис.1.26.

точку  $D$ , якщо  $r = 8 \text{ см}$ ,  $a = 10 \text{ см}$ ,  $q_1 = +10 \text{ нКл}$  і  $q_2 = -10 \text{ нКл}$ .

в) Розглянути випадок  $q_1 = q_2 = +10 \text{ нКл}$ .

**1.85.** У вершинах правильного шестикутника, сторона якого  $a = 6 \text{ см}$ , розташовані однакові точкові заряди  $q = 8 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$ .

а) Визначити роботу електричних сил при перенесенні заряду  $q_0 = = 3,2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$  із центру шестикутника в середину однієї із його сторін. б) Чому дорівнює ця робота, якщо заряди  $q$  однакові за абсолютною величиною, але сусідні заряди протилежні за знаком?

**1.86.** Різниця потенціалів між довгими коаксіальними циліндрами ( $R_1 = 2 \text{ см}$  і  $R_2 = 4 \text{ см}$ ), які заряджені однаковими за величиною, але різнойменними зарядами, дорівнює  $U = 450 \text{ В}$ . Визначити: а) заряд на одиницю довжини циліндрів; б) поверхневу густину заряду на кожному циліндрі; в) напруженість електричного поля біля внутрішнього циліндра, посередині відстані між циліндрами і біля поверхні зовнішнього циліндра.

**1.87.** В радіолампі катод у вигляді нитки протягнутий по осі циліндричного анода. Катод і анод виготовлені із одного і того ж металу. Розжарений катод випускає електрони, які під дією електричного поля прискоренно рухаються до анода. Діаметр катода  $d = 0,1 \text{ мм}$ , діаметр анода  $D = 9 \text{ мм}$ . Напруга між анодом і катодом  $U = 50 \text{ В}$ . Початкова швидкість електронів, які вилітають із катода,

дуже мала. Визначити прискорення і швидкість в точці, що знаходиться на відстані  $r = 8,5\text{мм}$  від катода.

**1.88.** Між двома довгими паралельними проводами, які протягнуті на відстані  $l = 20\text{ см}$  один від одного, підтримується різниця потенціалів  $U = 2\text{ кВ}$ . Радіус проводів  $r = 2\text{ мм}$ . Визначити напруженість поля: а) в точці, яка лежить посередині відстані між проводами; б) в точці, яка знаходиться від одного проводу на відстані  $R_1 = 40\text{ см}$ , а від другого на відстані  $R_2 = 35\text{ см}$ .

**1.89.** Всередині сфери, радіус якої  $R = 20\text{ см}$ , на відстані  $r = R/2$  від центра розміщений точковий заряд. Знайти напруженість електричного поля в центрі сфери, якщо потік поля через її поверхню  $\Phi_E = 62,83\text{ В}\cdot\text{м}$ .

**1.90.** Куля із діелектрика з проникністю  $\epsilon = 2$ , радіус якої  $R = 6\text{ см}$ , рівномірно заряджена з об'ємною густиною заряду  $\rho = 17,7\text{ нКл/м}^3$ . Знайти напруженість електричного поля на відстані  $r = 3\text{ см}$  від поверхні кулі.

**1.91.** Пояснити, чому пташки злітають з проводу високої напруги, коли включають напругу?

**1.92.** Деколи говорять, що лінія напруженості електростатичного поля це лінія, по якій буде рухатись електричний заряд в електростатичному полі. Чи правильно це?

## **2. ДІЕЛЕКТРИКИ ТА ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ**

### **2.1. Питання теми**

1. Поляризація діелектриків та електричне поле всередині діелектриків.
2. Властивості провідників в електричному полі.
3. Електроємність.
4. Енергія електричного поля.



## 2.2. Основні визначення та формули

1. Основною характеристикою поляризації діелектрика в електричному полі є вектор поляризації

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^m \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad (2.1)$$

де  $\vec{p}_i$  – дипольний момент  $i$  – ої молекули, яка входить в об'єм  $\Delta V$ ;  $m$  – число молекул в цьому об'ємі,  $\Delta V$  – такий малий об'єм, в межах якого можна вважати постійним напруженість електричного поля, густину, температуру, але з іншого боку в ньому міститься достатньо велика для усереднення кількість молекул.

2. Потік вектора поляризації  $\vec{P}$  через замкнуту поверхню  $\vec{S}$ :

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum q', \quad (2.2)$$

де  $q'$  – алгебраїчна сума зв'язаних (поляризаційних) зарядів всередині цієї поверхні, а

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = -\rho', \quad (2.3)$$

де  $\rho'$  – об'ємна густина зв'язаних зарядів.

3. Поверхнева густина зв'язаних (поляризаційних зарядів)  $\sigma'$  на межі діелектрик – вакуум дорівнює проекції вектора  $\vec{P}$  на нормаль  $\vec{n}$  до поверхні діелектрика ( $\vec{n}$  направлений назовні діелектрика):

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n = \vec{P} \cdot \vec{n}. \quad (2.4)$$

4. Теорема Остроградського-Гаусса для електричного поля в діелектриках

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_i, \quad (2.5)$$

де  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  – вектор електричного зміщення (індукції),  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля всередині діелектрика,  $\sum q_i$  – алгебраїчна сума сторонніх (вільних) зарядів всередині замкнутої поверхні  $S$ .

5. Для ізотропного діелектрика

$$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}, \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \epsilon = 1 + \kappa, \quad (2.6)$$

де  $\kappa$  – діелектрична сприйнятливість, а  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність діелектрика.

**6.** На границі розділу двох діелектриків у випадку відсутності сторонніх (вільних) зарядів мають місце співвідношення:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (2.7)$$

де  $\sigma'$  – поверхнева густина зв'язаних зарядів, орт нормалі  $\vec{n}$  направлений із середовища 1 в середовище 2,  $D_n$ ,  $E_\tau$  – нормальна і тангенційна складові векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  відповідно,  $P_{1n}$  і  $P_{2n}$  – проекції векторів поляризації 1-го і 2-го середовищ на нормаль  $\vec{n}$ .

**7.** Для випадку ізотропного однорідного діелектрика, який заповнює весь простір між екіпотенційними поверхнями:

$$\vec{E} = \vec{E}_0/\epsilon, \quad (2.8)$$

де  $\vec{E}$  – напруженість поля всередині діелектрика,  $\vec{E}_0$  – напруженість поля зовні діелектрика,  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність діелектрика.

**8.** Напруженість електричного поля біля поверхні провідника у вакуумі:

$$E_n = \sigma/\epsilon_0, \quad (2.9)$$

де  $\sigma$  – густина зарядів поверхні провідника.

**9.** При умові рівноваги надлишкові заряди в провіднику розподіляються по поверхні таким чином, щоб потенціал поверхні був однаковим, а напруженість поля всередині провідника дорівнювала нулю.

**10.** Ємність провідника

$$C = q/\phi, \quad (2.10)$$

де  $q$  – надлишковий заряд на провіднику,  $\phi$  – потенціал провідника.

**11.** Ємність

а) провідної кулі:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R, \quad (2.11)$$

де  $R$  – радіус кулі,  $\epsilon$  – діелектрична проникність середовища, що оточує кулю;

б) плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}, \quad (2.12)$$

де  $S$  – площа поверхні пластин,  $d$  – відстань між пластинами,  $\varepsilon$  – діелектрична проникність діелектрика, що повністю заповнює простір між пластинами;

в) циліндричного конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(R_2 / R_1)}, \quad (2.13)$$

де  $l$  – довжина циліндричних електродів,  $R_1$  – радіус внутрішнього, а  $R_2$  – радіус зовнішнього циліндрів,  $\varepsilon$  – діелектрична проникність діелектрика між циліндрами;

г) сферичного конденсатора:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1), \quad (2.14)$$

де  $R_1$  – радіус внутрішньої,  $R_2$  – радіус зовнішньої сфери,  $\varepsilon$  – діелектрична проникність діелектрика, що повністю заповнює простір між концентричними сферами.

**12.** Об'ємна густина енергії електричного поля (енергія одиниці об'єму):

$$\omega = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (2.15)$$

**13.** Загальна формула для енергії електричного поля:

$$W = \int_V \omega dV, \quad (2.16)$$

де  $V$  – об'єм, в якому існує електричне поле,  $\omega$  – об'ємна густина енергії поля.

**14.** Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.17)$$

де  $U$  – різниця потенціалів між обкладинками конденсатора,  $C$  – ємність конденсатора,  $q$  – заряд пластини конденсатора.

### 2.3. Питання на самопідготовку

1. Вектор поляризації та його фізичний зміст.
2. Яким чином можна визначити поляризаційні (зв'язані) заряди за допомогою вектора поляризації?
3. Вектор електричного зміщення (індукції) та його фізичний зміст.
4. Теорема Остроградського-Гаусса для електричного поля в діелектриках.
5. Зв'язок між векторами електричного зміщення та вектором напруженості електричного поля.
6. Електричне поле на межі двох діелектриків.
7. Основні властивості провідників в електричному полі.
8. Напруженість електричного поля біля поверхні зарядженого провідника.
9. Які властивості провідника дають можливість ввести поняття його ємності?
10. Конденсатори. Їх властивості та вимоги до конструкцій. Типи конденсаторів.
11. Енергія зарядженого провідника та конденсатора.
12. Об'ємна густина енергії електричного поля та загальна формула для розрахунку енергії.

### 2.4. Методичні вказівки

При розрахунку електричного поля в діелектриках доцільно використовувати наступні два методи.

**Перший метод** базується на принципі суперпозиції полів:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}',$$

де  $\vec{E}$  – напруженість поля в діелектрику,  $\vec{E}_0$  – напруженість поля вільних (сторонніх) зарядів,  $\vec{E}'$  – напруженість поля зв'язаних (поляризаційних) зарядів. Спочатку розраховують поле вільних (сторонніх) зарядів  $\vec{E}_0$ , потім визначають поле зв'язаних зарядів  $\vec{E}'$ . Тоді знаходять напруженість  $\vec{E}$  поля в діелектрику. Таким же чином

можна отримати вираз для потенціалу  $\varphi$  поля в діелектрику. Зауважимо, що не все так просто в цій методиці, як може здаватися на перший погляд. Нерідко приходится застосовувати метод диференціювання і інтегрування, зустрічаються труднощі при визначенні густини зв'язаних зарядів  $\sigma'$  і їх напруженості  $\vec{E}'$  і т.п.

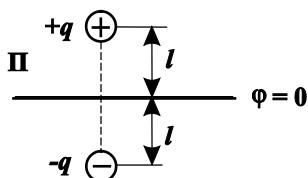
**Другий метод** базується на теоремі Остроградського-Гаусса (2.5). Спочатку за допомогою (2.5) знаходять вектор електричного зміщення  $\vec{D}$ , потім за формулою (2.6) визначають напруженість електричного поля  $\vec{E}$  в діелектрику і далі (якщо необхідно) із співвідношень (1.16), (1.17) розраховують потенціал  $\varphi$ . Цим методом часто простіше досягнути цілі, ніж методом суперпозиції. Проте в деяких випадках другий метод застосовувати неможливо і використовують метод суперпозиції.

### Електричне поле, яке створюється зарядженими провідниками.

Складність розрахунку напруженостей і потенціалів полів, які створюються в присутності провідників або самими зарядженими провідниками обумовлена тим, що розподіл зарядів на провідниках, як наданих їм, так і індукованих, наперед не відомий. Відомо тільки, що заряди ці розподіляються по поверхні так, що в всередині металу (в умовах електростатичної рівноваги) напруженість поля тотожно дорівнює нулеві. Ця умова разом з наслідками із неї дозволяє в деяких випадках знайти розподіл індукованих і наданих провідникам зарядів простими в математичному відношенні методами.

**Наприклад.** Так, як напруженість поля всередині провідника дорівнює нулеві, то поверхня провідника є екіпотенціальною. На цій властивості провідника базується метод дзеркальних зображень. Суть

його в наступному. Якщо в довільному електростатичному полі замінити екіпотенціальну поверхню металічною поверхнею такої ж форми і створити на ній такий же потенціал, то дане



електростатичне поле не зміниться. Наприклад, розглянемо електричне поле між точковим зарядом  $+q$  і безмежною металічною площиною  $\Pi$ , потенціал якої дорівнює нулю. Згідно методу дзеркальних зображень це поле еквівалентне електричному полю, що створюється даним точковим зарядом  $+q$  і точковим зарядом  $-q$ , який є дзеркальним зображенням даного заряду  $+q$  в металічній площині (див. рисунок вище).

## 2.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 2.1.** Два безмежно довгих тонкостінних коаксіальних циліндри, радіуси яких  $R_1 = 2$  см і  $R_2 = 4$  см рівномірно заряджені з поверхневими густинами заряду  $\sigma_1 = +5$  нКл/м<sup>2</sup> і  $\sigma_2 = -10$  нКл/м<sup>2</sup>. Простір між циліндрами заповнений парафіном ( $\epsilon = 2$ ). Визначити напруженість  $E$  електричного поля в точках, які знаходяться на відстанях  $r_1 = 1$  см,  $r_2 = 3$  см і  $r_3 = 6$  см від осі циліндрів, тобто в точках А, В і С відповідно (рис.2.1).

**Розв'язок.** Застосуємо теорему Остроградського-Гаусса (2.5). Електричне поле, яке створюється зарядженими циліндрами має циліндричну симетрію, тобто вектори зміщення  $\vec{D}_B$  і  $\vec{D}_C$  є перпендикулярні до поверхні циліндрів. За замкнуту поверхню  $S$  вибираємо коаксіальні циліндри, висота яких  $h$ , а бічні поверхні

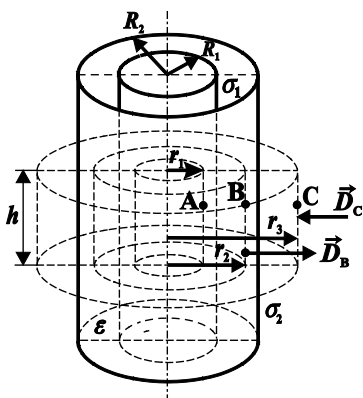


Рис. 2.1

проходять через точки А, В, С відповідно (рис.2.1). За теоремою (2.5) циліндр, на бічній поверхні, якого знаходиться точка А не охоплює зарядів, тому індукція поля на відстані  $r_1 = 1$  см дорівнює нулю. Тобто  $D_A = 0$  і  $E_A = 0$ . Для точки В теорема (2.5) запишеться так:

$$D_B \cdot 2\pi r_2 h = 2\pi R_1 \cdot h \sigma_1.$$

Звідки

$$D_B = \frac{R_1 \sigma_1}{r_2}. \quad (1)$$

З урахуванням (2.6)  $D_B = \varepsilon \varepsilon_0 E_B$  і

$$E_B = \frac{R_1 \sigma_1}{\varepsilon \varepsilon_0 r_2} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \text{ В/м} = 188 \text{ В/м}.$$

Аналогічно для точки С запишемо:

$$D_C \cdot 2\pi r_3 h = 2\pi R_1 \sigma_1 h + 2\pi R_2 \sigma_2 h.$$

Звідки

$$D_C = \frac{R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2}{r_3},$$

або з урахуванням (2.6)

$$E_C = \frac{R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2}{\varepsilon_0 r_3} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-9} - 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} \text{ В/м} = -565 \text{ В/м}.$$

Знак «мінус» означає, що вектор  $\vec{E}_C$  направлений до циліндрів, протилежно вектору  $\vec{E}_B$ .

**Задача 2.2.** Плоский шар із діелектрика з діелектричною проникністю  $\varepsilon$  рівномірно заряджений з об'ємною густиною  $\rho > 0$

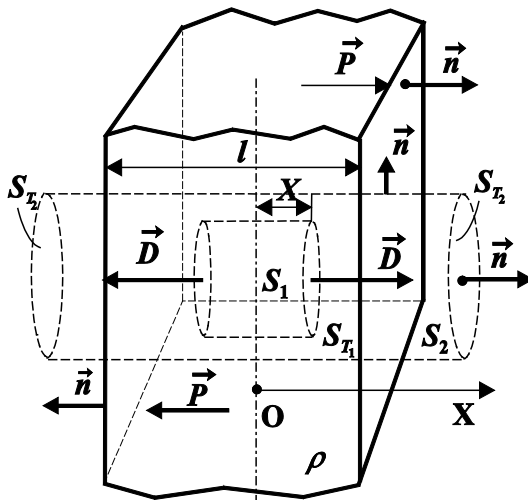


Рис. 2.2

(рис.2.2.) Товщина шару  $l$ . Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів, різницю потенціалів між серединою шару і його поверхнею, між поверхнею і точкою, яка лежить на відстані  $l$  від середини шару. Побудувати графіки залежності  $D_x(x)$ ,  $E_x(x)$ ,  $P_x(x)$ , ( $\vec{P}$  – вектор поляризації) і

$\varphi(x)$ , де  $x$  – відстань по перпендикуляру до шару від його середини до точки, що розглядається. Вважати, що лінійні розміри шару значно більші його товщини.

**Аналіз.** Так як лінійні розміри бічних поверхонь шару значно більші його товщини, то можна вважати, що в точках достатньо віддалених від країв шару, як всередині його, так і зовні (поблизу) силові лінії є прямі, які нормальні до бічних поверхонь шару. Така плоскосиметрична конфігурація поля дозволяє знайти напруженість поля за допомогою теореми Остроградського-Гаусса. Знаючи напруженість поля як функцію координат, можна визначити різницю потенціалів між заданими точками.

Так як об'ємний заряд розподілений по діелектрику, то використаємо узагальнену теорему (2.5). Щоб знайти електричне зміщення  $D$  і напруженість  $E$  всередині і зовні шару, проведемо дві допоміжні поверхні  $S_1$  і  $S_2$  у вигляді циліндричних поверхонь, торці яких паралельні середній площині шару, симетричні відносно неї і значно менші за площею.

**Розв'язок.** Розглянемо ліву частину рівняння (2.5). Так як конфігурація поля плоско симетрична, то у всіх точках бічних поверхонь циліндрів  $S_1$  і  $S_2$  вектори  $\vec{D}$  і  $d\vec{S} = \vec{n}dS$  взаємно перпендикулярні і тому  $\vec{D}d\vec{S} = 0$ . Для торцевих поверхонь вектори  $\vec{D}$  і  $d\vec{S}$  колінеарні і  $\vec{D}d\vec{S} = DdS$ . Тому

$$\oint_{S_{1,2}} \vec{D}d\vec{S} = \oint_{S_{1,2}} DdS = 2DS_T, \quad (1)$$

де  $S_T$  – площа основи (торця) допоміжної поверхні інтегрування. Рівність (1) справедлива, тому що обидва торці розташовані симетрично відносно зарядженого шару і  $D$  у всіх точках обох торців можна вважати однаковим. Індеси 1 і 2 означають, що всі проведені міркування справедливі як для першої  $S_1$ , так і для другої  $S_2$  поверхонь.



Сума вільних зарядів, що охоплюються поверхнею  $S_1$ , залежить від висоти  $h$  цієї циліндричної поверхні. Якщо ввести вісь  $OX$ , то  $h = 2|x|$ , де  $x$  – координата торця. Для поверхні  $S_1$  ( $|x| < l/2$ )

$$\sum q_i = 2|x|S_{T_1} \cdot \rho. \quad (2)$$

Тоді згідно теореми (2.5) і рівностей (1) і (2) отримаємо:

$$D \cdot 2S_{T_1} = 2|x|S_{T_1} \rho.$$

Звідки

$$D = \rho|x|, \text{ а } D_x = \rho x \text{ } (D_y = D_z = 0). \quad (3)$$

Сума вільних зарядів, що охоплюються поверхнею  $S_2$  ( $|x| > l/2$ ), вже не залежить від координати торців і  $\sum q_i = S_{T_2} l \rho$ .

Тоді згідно теореми (2.5) і рівності (1) отримаємо:

$$D \cdot 2S_{T_2} = S_{T_2} l \rho.$$

Звідки

$$D = \rho l/2 \text{ і } D_x = \frac{\rho l}{2} \cdot \frac{x}{|x|} \text{ } (D_y = D_z = 0). \quad (4)$$

Знак  $D_x$  у виразах (3) і (4) визначається знаком координати  $x$  і об'ємної густини  $\rho$ .

Врахуємо співвідношення (2.6) між векторами  $\vec{P}$ ,  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$ .

Тоді згідно рівностей (3) і (4) отримаємо, що:

$$\begin{cases} E_x = \frac{\rho x}{\epsilon_0 \epsilon} \text{ для } |x| < l/2, \\ E_x = \frac{\rho l}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|} \text{ для } |x| > l/2, \\ E_y = E_z = 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} P_x = \frac{\epsilon-1}{\epsilon} \rho x \text{ для } |x| < l/2, \\ P_x = 0 \text{ для } |x| > l/2, \\ P_y = P_z = 0. \end{cases} \quad (6)$$

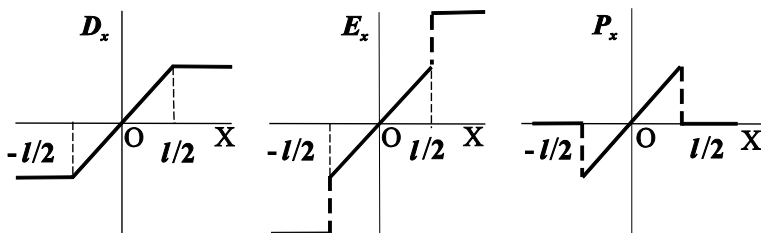


Рис. 2.3

Графіки  $D_x(x)$ ,  $E_x(x)$ ,  $P_x(x)$  побудовані за виразами (3), (4), (5), (6) приведені на рис.2.3.

На границі шару терплять розрив  $E_x$  і  $P_x$  (нормальні складові векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{P}$ ), але не терпить розриву  $D_x$ . Це означає, що на поверхні діелектричного шару, який заряджений по об'єму, поверхнева густина вільних зарядів дорівнює нулеві, але внаслідок поляризації діелектрика виникають зв'язані заряди. Поверхневу густину зв'язаних зарядів можна визначити за формулою (2.4) і рівності (6) при  $x = l/2$ , а саме

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\rho l}{2}.$$

Так як кут між нормальми  $\vec{n}$  до бічних поверхонь шару і вектором поляризації  $\vec{P}$  дорівнює нулю, то на обох поверхнях шару поверхнева густина зв'язаних зарядів  $\sigma' > 0$ . Це означає, що в середині шару повинен існувати від'ємний зв'язаний заряд (сумарний зв'язаний заряд дорівнює нулю). Цим і пояснюється розрив  $E_x$  і  $P_x$ . Графік потенціалу  $\varphi(x)$  можна побудувати за графіком  $E_x(x)$ . Початок відліку потенціалу на безмежності вибрати не можна так як плоско симетрична конфігурація поля не зберігається на великих відстанях від шару. Тому будемо вважати, що  $\varphi = 0$  для точок середньої площини шару ( $x = 0$ ). Тоді для всієї області  $x > 0$

$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} > 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dx} < 0$  і це означає, що  $\varphi(x)$  зменшується із ростом

$x$ . Для всієї області  $x < 0$   $E_x = -\frac{d\varphi}{dx} < 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dx} > 0$  і це означає  $\varphi(x)$

збільшується із ростом  $x$ . Таким чином, крива  $\varphi(x)$  симетрична відносно початку координат і в точці  $x = 0$  має максимум

( $E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = 0$ ). Для області  $0 < x < l/2$  з урахуванням рівності

(5) можемо записати, що

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int_0^x x dx.$$

Звідки отримаємо, що

$$\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (7)$$

Для області  $-\frac{l}{2} < x < 0$  аналогічно запишемо:

$$\int_{\varphi}^0 d\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int_x^0 x dx.$$

Звідки теж отримаємо співвідношення (7). Для області  $|x| > l/2$ ,

$E_x = \text{const}$ . Це означає що функція  $\varphi(x)$  є лінійна. Точкам

$|x| = l/2$ , де  $E_x$  терпить розрив, на

графіку  $\varphi(x)$  відповідають точки згину

(L, M) (рис.2.4). Співвідношення (7)

дозволяє знайти різницю потенціалів між серединою шару і його поверхнею, а саме  $\varphi(0) - \varphi(l/2) = \rho l^2 / (8\varepsilon \varepsilon_0)$ .

Рівність (5) дозволяє знайти різницю потенціалів між поверхнею шару і

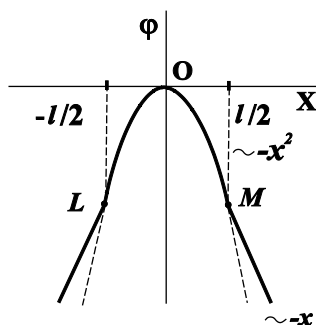


Рис. 2.4

точкою, яка знаходиться на відстані  $l$  від середини шару.

$$\varphi(l/2) - \varphi(l) = \int_{l/2}^l E_x dx = \frac{\rho l}{2\epsilon_0} \int_{l/2}^l dx = \frac{\rho l^2}{4\epsilon_0}.$$

**Задача 2.3.** В просторі, який наполовину заповнений парафіном ( $\epsilon_2 = 2$ ), створене однорідне електричне поле, напруженість якого в повітрі  $E_1 = 10$  В/м. Вектор  $\vec{E}_1$  утворює кут  $150^\circ$  з нормаллю  $\vec{n}$  до межі парафін - повітря, яку можна вважати плоскою, рис.2.5,а. Визначити вектори електричного зміщення, напруженості, поляризації та поверхневу густину  $\sigma'$  зв'язаних зарядів в парафіні. Парафін вважати однорідним діелектриком.

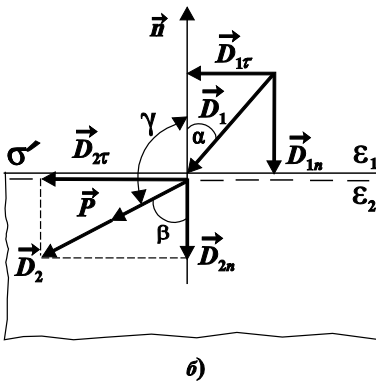
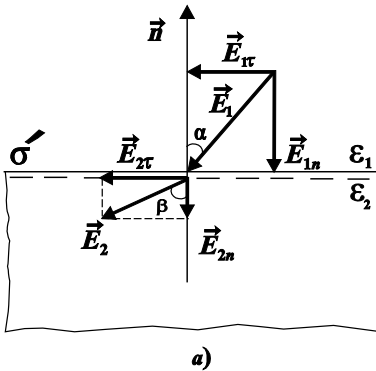


Рис. 2.5

**Розв'язок.** За умовою задачі відомі модуль і напрямок вектора напруженості  $\vec{E}_1$  в повітрі ( $\epsilon_1 = 1$ ), а значить, і вектор електричного зміщення. Тому мета задачі зводиться до використання співвідношень між нормальними і тангенціальними (дотичними) складовими векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  при переході через межу повітря-діелектрик. Згідно співвідношень (2.7) нормальна складова вектора  $\vec{D}$  і дотична складова вектора  $\vec{E}$  при переході через межу повітря-діелектрик не змінюються.

Знаючи нормальні і дотичні складові векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$ , можна знайти модулі і напрямки цих векторів в парафіні.

Вектор  $\vec{D}_1$  колінеарний вектору  $\vec{E}_1$  (напрямок останнього заданий). Електричні властивості повітря практично співпадають із властивостями вакууму. Тому

$$D_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 E_1, \quad D_{1n} = D_1 \cos \alpha = \varepsilon_0 E_1 \cos \alpha$$

(див. рис.2.5б), а значить згідно (2.7)

$$D_{2n} = \varepsilon_0 E_1 \cos \alpha, \quad (1)$$

де  $\alpha = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ . Так як згідно (2.7) і (рис.2.5,а)  $E_{1\tau} = E_{2\tau} = E_1 \sin \alpha$ , то врахувавши (2.6), отримаємо:

$$D_{2\tau} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_1 \sin \alpha. \quad (2)$$

Тоді

$$\begin{aligned} D_2 &= \sqrt{D_{2n}^2 + D_{2\tau}^2} = \varepsilon_0 E_1 \sqrt{\cos^2 \alpha + \varepsilon_2^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \sqrt{\cos^2 30^\circ + 2^2 \sin^2 30^\circ} \text{ Кл/м}^2 = 117 \text{ пКл/м}^2. \end{aligned}$$

При цьому вектор  $\vec{D}_2$  утворює кут  $\beta$  з лінією нормалі  $\vec{n}$ , який знайдемо із співвідношення:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_1 \sin \alpha}{\varepsilon_0 E_1 \cos \alpha} = \varepsilon_2 \operatorname{tg} \alpha = 1,155.$$

Звідки  $\beta = 49,1^\circ$ . Діелектрик є ізотропним, тому вектори  $\vec{E}_2$  і  $\vec{D}_2$  колінеарні в діелектрику. Тому згідно (2.6)

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{117 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \text{ В/м} = 6,6 \text{ В/м}.$$

Вектор поляризації  $\vec{P}$  і вектор  $\vec{E}_2$  теж колінеарні (ізотропність діелектрика). Тому згідно (2.6)

$$\begin{aligned} P &= \kappa_2 \varepsilon_0 E_2 = \\ &= (\varepsilon_2 - 1) \varepsilon_0 \cdot \frac{D_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} D_2 = \frac{D_2}{2} = 58,5 \text{ пКл/м}^2. \end{aligned}$$

Поверхневу густину  $\sigma'$  зв'язаних (поляризаційних) зарядів знайдемо за формулою (2.4), тобто

$$\begin{aligned}\sigma' &= P \cos \gamma = P \cos(\pi - \beta) = \\ &= -P \cos \beta = -58,5 \cdot \cos 49,1^\circ \text{ пКл/м}^2 = -38,3 \text{ пКл/м}^2.\end{aligned}$$

**Задача 2.4.** Одній із пластин плоского конденсатора, площа якої  $S = 0,1 \text{ м}^2$ , наданий заряд  $q = +1 \text{ нКл}$  (інша пластина з'єднана тонким провідником із землею). Між пластинами (паралельно до них) знаходяться скляна ( $\epsilon_1 = 7$ ) і фарфорова ( $\epsilon_2 = 6$ ) пластинки, які щільно прилягають одна до одної і до пластин конденсатора. Визначити напруженість електричного поля в склі і фарфорі, а також поверхневі густини  $\sigma'_1$  і  $\sigma'_2$  зв'язаних зарядів на них (рис.2.6).

**Розв'язок.** Фізична система складається із конденсатора, на пластинах якого розподілені вільні електричні заряди з густиною  $\sigma = q/S$  і двох діелектриків, на яких виникають зв'язані електричні заряди з густинами  $\sigma'_1$  і  $\sigma'_2$ . Необхідно визначити напруженості  $E_1$  і  $E_2$  електричного поля в діелектриках, а також густини  $\sigma'_1$  і  $\sigma'_2$  зв'язаних зарядів.

## Метод суперпозиції

Поле в кожному діелектрику створюється вільними зарядами розташованими на пластинах конденсатора, напруженість якого дорівнює

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S} \quad (1)$$

і відповідно зв'язаними зарядами  $\sigma'_1$  і  $\sigma'_2$ , розташованими на двох діелектричних пластинах, напруженості яких дорівнюють:

$$E'_1 = \frac{\sigma'_1}{\epsilon_0} \text{ і } E'_2 = \frac{\sigma'_2}{\epsilon_0}. \quad (2)$$

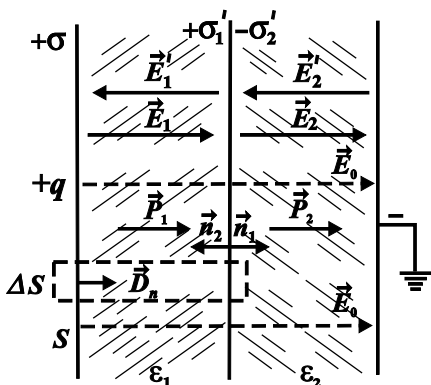


Рис. 2.6

Зауважимо, що зв'язані заряди створюють поле, відмінне від нуля тільки в «своєму» діелектрику. Як видно із рис.2.6 результуюче поле в діелектриках буде:

$$E_1 = E_0 - E'_1 \text{ і}$$

$$E_2 = E_0 - E'_2.$$

За формулою (2.8)

$$E_1 = E_0 / \epsilon_1, \quad E_2 = E_0 / \epsilon_2.$$

Тоді

$$\frac{E_0}{\epsilon_1} = E_0 - \frac{\sigma'_1}{\epsilon_0}, \text{ а } \frac{E_0}{\epsilon_2} = E_0 - \frac{|\sigma'_2|}{\epsilon_0}.$$

Врахувавши формули (1) і (2) цієї задачі, отримаємо:

$$E_1 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_1 S}; \quad E_2 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_2 S}; \quad \sigma'_1 = \frac{(\epsilon_1 - 1)q}{\epsilon_1 S}; \quad |\sigma'_2| = \frac{(\epsilon_2 - 1)q}{\epsilon_2 S}.$$

Після підстановки числових значень знаходимо:

$$E_1 = \frac{10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} \text{ В/м} = 161 \text{ В/м}; \quad E_2 = 188 \text{ В/м};$$

$$\sigma'_1 = \frac{(7 - 1) \cdot 10^{-9}}{7 \cdot 0,1} \text{ Кл/м}^2 = 8,57 \text{ нКл/м}^2;$$

$$|\sigma'_2| = \frac{(6 - 1) \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 0,1} \text{ Кл/м}^2 = 8,33 \text{ нКл/м}^2.$$

**Метод Остроградського-Гауса.** За теоремою (2.5) і співвідношенням (2.7) визначаємо вектор електричного зміщення в будь-якому діелектрику (рис.2.6):

$$D_n \Delta S = \sigma \Delta S, \quad D_n = \sigma = q / S.$$

За формулою (2.7) отримаємо, що

$$D_{1n} = D_{2n} = q / S,$$

а із врахування (2.6)

$$\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2 = q/S.$$

Звідки отримаємо:

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}; \quad E_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}.$$

За формулами (2.4) і (2.6) знаходимо:

$$\sigma'_1 = P_{1n} = \kappa_1 \varepsilon_0 E_1 = (\varepsilon_1 - 1) \varepsilon_0 E_1 = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{q}{S}$$

і

$$\sigma'_2 = P_{2n} = -\kappa_2 \varepsilon_0 E_2 = -(\varepsilon_2 - 1) \varepsilon_0 E_2 = -\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{q}{S}.$$

**Задача 2.5.** В безмежному однорідному і ізотропному діелектрику, в якому створене відоме однорідне поле, напруженість якого  $E_0$ , є сферична порожнина, радіус якої  $R$  (рис.2.7). Знайти напруженість електричного поля в центрі порожнини.

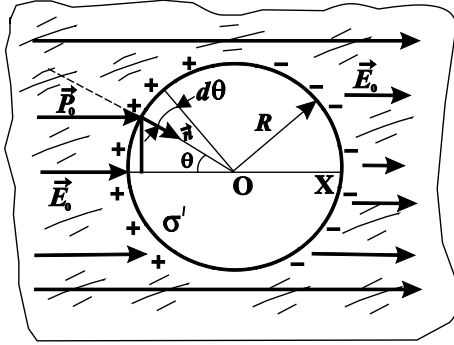


Рис. 2.7

**Розв'язок.** Задача дуже подібна до задачі 1.8 з тією різницею, що поверхнева густина заряду  $\sigma'$  за формулою (2.4) буде:

$$\begin{aligned} \sigma' &= P_0 \cos \theta = \\ &= (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E_0 \cos \theta. \end{aligned}$$

Як і в задачі 1.8, розділимо порожнину на тонкі кільця. Заряд такого кільця

$$dq = 2\pi R^2 \sigma' \sin \theta d\theta.$$

Проекція напруженості поля кільця на вісь OX в точці O буде:



$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta = \frac{P_0}{2\epsilon_0} \cos^2\theta \sin\theta d\theta.$$

Звідки після інтегрування знаходимо напруженість однієї напівсфери:

$$E_{1x} = \frac{P_0}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{\epsilon - 1}{6} E_0.$$

Напруженість поля двох напівсфер

$$E_{2x} = 2E_{1x} = \frac{\epsilon - 1}{3} E_0.$$

Сумарна напруженість поля в точці 0

$$E = E_0 + E_{2x} = \frac{\epsilon + 2}{3} E_0.$$

**Задача 2.6.** У гас ( $\epsilon = 2$ ) на глибині  $h = 4$  см від вільної поверхні (поверхня, що межує з повітрям), знаходиться точковий заряд  $q = 30$  нКл (рис.2.8). Визначити густину поляризаційних (зв'язаних) зарядів на поверхні гасу: а) над зарядом в точці 1 і б) на відстані  $r = 8$  см від заряду в точці 2; в) визначити сумарну величину зв'язаних зарядів на поверхні гасу.

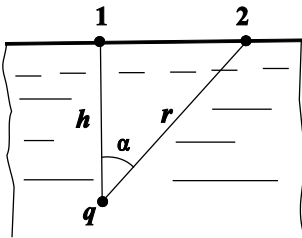


Рис. 2.8

Для розв'язку задачі будемо користуватись формулами: (2,4), (2,6), (2,7).

**Розв'язок. а)** Розглянемо спочатку точку 1. За формулами (2,4) і (2,6) поверхнева густина зв'язаних зарядів в цій точці буде

$$\sigma'_1 = P_{n1} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E_{1n},$$

де  $E_{1n}$  – проекція напруженості електричного поля в гасі на нормаль  $\vec{n}$  в точці 1 (рис.2.9).

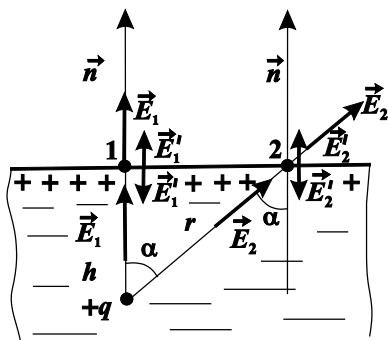


Рис. 2.9

$E_{1n} = E_1 - E'_1$ , де  
 $E_1 = q / (4\pi\epsilon_0 h^2)$  – напруженість поля, яку в точці 1 створює заряд  $q$ ,  $E'_1 = \sigma'_1 / 2\epsilon_0$  – напруженість, що створюється зарядженою поверхнею в точці 1. Тоді  

$$\sigma'_1 = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2} - \frac{\sigma'_1}{2\epsilon_0} \right).$$

Звідки знаходимо:

$$\sigma'_1 = \frac{q}{2\pi h^2} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}. \quad (1)$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо:

$$\sigma'_1 = \frac{30 \cdot 10^{-9}}{2\pi(4 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \frac{2 - 1}{2 + 1} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 1 \text{ мкКл/м}^2.$$

Формулу (1) можна отримати із формули (2.7), а саме  $D_{1n} = D_{2n}$ . Гас будемо вважати першим середовищем, а повітря другим середовищем. Тоді згідно рисунка 2.9 і формули (2.6)

$$(E_1 - E'_1)\epsilon\epsilon_0 = (E_1 + E'_1)\epsilon_0.$$

Із цього співвідношення можна отримати формулу (1).

б) Для точки 2 аналогічно як і для точки 1 можемо записати:

$$\sigma'_2 = P_{2n} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 (E_2 \cos \alpha - E'_2),$$

де  $E_2 = q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$  – напруженість поля, яку створює заряд  $q$  в точці 2,  $\sigma'_2$  – густина зв'язаних зарядів,  $E'_2 = \sigma'_2 / (2\epsilon_0)$ ,  $\cos \alpha = h / r$ . Тоді

$$\sigma'_2 = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{h}{r} - \frac{\sigma'_2}{2\epsilon_0} \right).$$

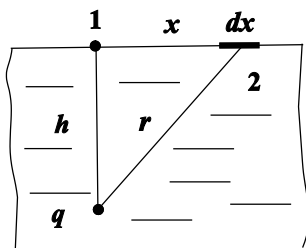


Рис. 2.10

З цього співвідношення знаходимо, що

$$\sigma'_2 = \frac{qh}{2\pi r^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}. \quad (2)$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо:

$$\sigma'_2 = \frac{30 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2\pi(8 \cdot 10^{-2})^3} \cdot \frac{2 - 1 \text{ Кл}}{2 + 1 \text{ м}^2} =$$

$$= 0,124 \text{ мкКл/м}^2.$$

Формулу (2) можна отримати за допомогою співвідношення (2.7) для точки 2, а саме

$$(E_2 \cos \alpha - E'_2) \varepsilon \varepsilon_0 = (E_2 \cos \alpha + E'_2) \varepsilon_0.$$

З цього співвідношення легко отримати формулу (2).

в) Для розрахунку сумарної величини зв'язаних зарядів розглянемо нескінченно вузьке кільце, радіус якого  $x$ , а центр

знаходиться в точці 1, а ширина кільця  $dx$  (рис.2.10). Площа такого кільця  $dS = 2\pi x dx$ . Заряд на ньому дорівнює  $dq' = \sigma'_2 dS$ . Якщо використати формулу (2) із врахуванням, що  $r = \sqrt{h^2 + x^2}$ , то

$$dq' = \frac{qh(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Повний заряд на всій поверхні:

$$q' = \frac{qh(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 1} \int_0^\infty \frac{x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{q(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 1} = 10 \text{ нКл.}$$

При отриманні цього результату враховано, що інтеграл дорівнює  $1/h$ .

**Задача 2.7.** Визначити ємність провідника у вигляді кулі, радіус якої  $R_1 = 10$  см. Куля оточена концентричним шаром

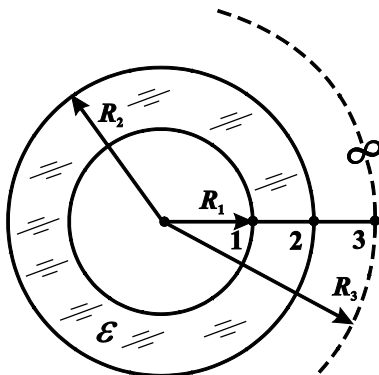


Рис. 2.11

однорідного діелектрика ( $\epsilon = 6$ ) із зовнішнім радіусом  $R_2 = 15$  см, який щільно прилягає до кулі (рис.2.11). Порівняти значення ємності кулі з ємністю конденсатора з такими ж параметрами.

**Розв'язок.** Надамо кулі деякий заряд  $q$ . Тоді біля поверхні провідника ззовні нього виникає електричне поле. Якщо знайдемо потенціал провідника  $\varphi(R_1)$ , то за

формулою (2.10) зможемо знайти електроємність  $C$ .

Перемістимо уявно деякий пробний заряд із точки 1 в точку 3. При цьому згідно формули (1.12) буде виконана робота

$$A_{13} = \frac{qq_{np}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1} - \frac{qq_{np}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_2} + \frac{qq_{np}}{4\pi\epsilon_0 R_2} - \frac{qq_{np}}{4\pi\epsilon_0 R_3}.$$

Тоді різниця потенціалів між точками 1 і 3 згідно (1.13) буде:

$$\varphi(R_1) - \varphi(R_3) = \frac{A_{13}}{q_{np}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon R_1} - \frac{1}{\epsilon R_2} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right).$$

Якщо прийняти  $\varphi(R_3) = 0$  при умові, що  $R_3 \rightarrow \infty$ , то потенціал в точці 1 (тобто потенціал кулі) буде:

$$\varphi(R_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_1} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} (\epsilon - 1) \right).$$

Звідки знаходимо, що електроємність кулі

$$C = \frac{q}{\varphi(R_1)} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2} (\epsilon - 1)} = 15,4 \text{ пФ}.$$

За формулою (2.14) електроємність конденсатора буде:

$$C' = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 200 \text{ пФ}.$$

**Задача 2.8.** Визначити ємність сферичного конденсатора з радіусами обкладок  $R_1 = 10\text{см}$  і  $R_2 = 15\text{см}$  (рис.2.12), який заповнений ізотропним діелектриком, проникність якого змінюється за законом  $\epsilon = a / r^2$ , де  $a = 0,006\text{ м}^2$  – постійна,  $r$  – відстань від центру конденсатора ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ).

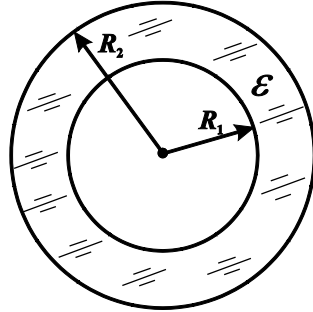


Рис. 2.12

**Розв'язок :** Надамо внутрішній обкладці заряд  $q$ . Тоді напруженість поля всередині діелектрика буде:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Так як  $E = -\frac{d\phi}{dr}$ , то  $d\phi = -E dr$  і різниця потенціалів між сферами:

$$\phi_2 - \phi_1 = \int_{\phi_2}^{\phi_1} d\phi = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} dr = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} (R_1 - R_2).$$

Звідки знаходимо, що ємність такого конденсатора

$$C = \frac{q}{\phi_2 - \phi_1} = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-2}} \text{ Ф} = 133,5 \text{ пФ}.$$

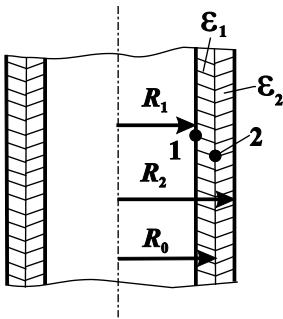


Рис. 2.13

**Задача 2.9.** Циліндричний конденсатор, радіуси обкладинок якого  $R_1 = 1\text{ см}$ ,  $R_2 = 1,5\text{ см}$ , заповнений двома коаксіальними шарами діелектрика (рис.2.13). Перший шар просякнутий папір ( $\epsilon_1 = 4$ ), другий – кераміка ( $\epsilon_2 = 7$ ). Радіус межі розділу діелектриків  $R_0 = 1,3\text{ см}$ . При якій різниці потенціалів

між обкладинками почнеться пробій конденсатора? Гранична напруженість поля для паперу  $E_{1max} = 12$  МВ/м; для кераміки  $E_{2max} = 10$  МВ/м.

**Аналіз.** Граничною або пробійною називається така напруженість електричного поля при якій починається руйнування молекул діелектрика. Сам процес пробією дуже складний, тому в електростатиці можна говорити тільки про початок пробією і не розглядати подальший розвиток процесу.

В даній задачі необхідно перш за все визначити, який із двох шарів діелектрика при підвищенні різниці потенціалів між обкладинками буде пробитий першим, тобто в якому діелектрику напруженість досягне граничного значення. Поле всередині конденсатора неоднорідне і напруженість зменшується із збільшенням відстані від осі системи. Тому пробій може початись в точках, найбільш близьких до осі системи, тобто в першому шарі при  $r = R_1$ , в другому – при  $r = R_0$ .

Аналогічно як в задачах 1.3, 2.1 можемо отримати, що модуль вектора електричного зміщення

$$D = \lambda / (2\pi r), \quad (1)$$

де  $\lambda$  – лінійна густина заряду на внутрішній обкладинці,  $r$  – відстань від будь-якої точки конденсатора до осі системи. При цьому вектор  $\vec{D}$  нормальний до межі розділу і вираз (1) справедливий в будь-якій точці конденсатора. Врахувавши (2.6) отримаємо вираз для напруженості поля у вказаних вище точках:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 R_1} \quad (r = R_1), \\ E_2 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2 R_0} \quad (r = R_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Значення цих напруженостей залежить від  $\lambda$ , тобто зростають із збільшенням заряду, а значить, і різниці потенціалів на обкладинках, але їх відношення залишається незмінним, так як згідно (2.7)  $D_{1n} = D_{2n}$ . Тобто:

$$E_1 / E_2 = \epsilon_2 R_0 / \epsilon_1 R_1 = 7 \cdot 1,3 / (4 \cdot 1) = 2,275.$$

Це відношення дозволяє визначити в якому шарі почнеться пробій. Прирівнявши  $E_1$  або  $E_2$  відповідній пробійній напруженості поля, визначимо значення  $\lambda_{\max}$ , при якій настає пробій. Різницю потенціалів при цьому знайдемо за формулою (1.18):

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr. \quad (3)$$

**Розв'язок.** Відношення пробивних значень напруженостей  $E_{1\max}/E_{2\max} = 1,2$ , а відношення цих напруженостей при будь-якій різниці потенціалів  $E_1/E_2 = 2,275$ . Це означає, що коли в точці 1 (папір) напруженість буде пробійною (12 МВ/м), то в точці 2 (кераміка) напруженість буде 5,275 МВ/м, тобто меншою, ніж пробійна напруженість кераміки. Таким чином, пробій почнеться в папері. Тоді із (2) отримаємо:

$$\lambda_{\max} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_1 E_{1\max}. \quad (4)$$

Щоб знайти різницю потенціалів, необхідно знайти  $E(r)$ . Із (1) отримаємо:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 r} \quad (R_1 < r < R_0),$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2 r} \quad (R_0 < r < R_2).$$

$E(r)$  терпить розрив при  $r = R_0$ . Тому інтеграл в (3) розбиваємо на два:

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \int_{R_1}^{R_0} \frac{dr}{r} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2} \int_{R_0}^{R_2} \frac{dr}{r}.$$

Врахувавши, що  $\int \frac{dr}{r} = \ln r$ , отримаємо, що

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0} \right).$$

Підставимо  $\lambda = \lambda_{\max}$  із (4):

$$U_{\max} = \varepsilon_1 R_1 E_{1\max} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0} \right).$$

Підставимо числові значення:

$$U_{\max} = 4 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^6 \left( \frac{1}{4} \ln \frac{1,3}{1} + \frac{1}{7} \ln \frac{1,5}{1,3} \right) \text{В} = 41,3 \text{ кВ}.$$

**Задача 2.10.** Визначити електроємність двопровідної лінії, що приходить на одиночну довжину. Вважати, що інші тіла знаходяться далеко від лінії і їхнім впливом на електричне поле між провідниками можна знехтувати. Прийняти, що радіуси проводів  $r = 0,5$  мм, а відстань між ними  $l = 10$  мм.

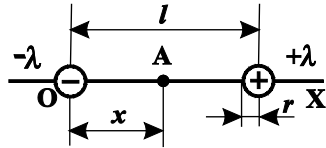


Рис. 2.14

**Розв'язок.** Будемо вважати, що провідники прямі, тонкі, безмежно довгі і паралельні. Нехай вони заряджені з лінійними густинами  $-\lambda$  і  $+\lambda$ . Тоді напруженість електричного поля в точці А (рис.2.14) згідно формули (1.11) і принципу суперпозиції (1.4) буде:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(l-x)}.$$

Враховуючи зв'язок між напруженістю і потенціалом (1.17) знайдемо різницю потенціалів між проводами:

$$|\Delta\varphi| = \int_r^{l-r} E dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left( \int_r^{l-r} \frac{dx}{x} + \int_r^{l-r} \frac{dx}{l-x} \right) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{l-r}{r}.$$

Тоді ємність лінії одиничної довжини буде:

$$C = \frac{\lambda}{|\Delta\varphi|} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{l-r}{r}} = \frac{\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\ln \frac{10-0,5}{0,5}} \text{ Ф/м} = 9,45 \text{ пФ/м}.$$

**Задача 2.11.** Тонка нескінченно довга нитка рівномірно заряджена електрикою з лінійною густиною  $\lambda = 10,55$  нКл/м і розташована паралельно безмежній провідній площині на відстані  $l = 10$  см від неї (рис.2.15). Знайти: а) модуль вектора сили, яка діє на



ділянку нитки одиничної довжини; б) розподіл поверхневої густини заряду  $\sigma(x)$  на площині, де  $x$  – відстань від площини, яка проходить через нитку і перпендикулярна до провідної площини.

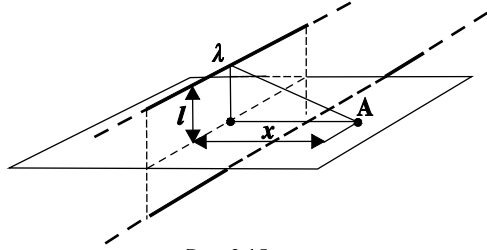


Рис. 2.15

**Розв’язок.** Для визначення сили, яка діє на ділянку нитки одиничної довжини, необхідно розрахувати поле її зображення. За формулою (1.11) напруженість цього поля

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(2l)}.$$

Тоді сила, яка діє на ділянку нитки одиничної довжини,

$$F = E\lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{(10,55 \cdot 10^{-9})^2}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} = 10 \text{ мкН}.$$

Для відповіді на друге питання задачі необхідно визначити напруженість поля в точці А. Для цього розглянемо рис.2.15 в іншій проекції. „Дзеркальне” зображення нитки в провідній площині будемо вважати ниткою зарядженою негативним зарядом рис.2.16. Як видно з рис.2.16. напруженість поля в точці А згідно принципу суперпозиції

$$\vec{E}_A = \vec{E}^+ + \vec{E}^-,$$

де  $|\vec{E}^+| = |\vec{E}^-| = \lambda / (2\pi\epsilon_0 \sqrt{l^2 + x^2})$  – напруженості полів, які створюються кожною ниткою. Внаслідок симетрії задачі

$$|\vec{E}_A| = 2|\vec{E}^-| \cos \alpha,$$

$$\text{де } \cos \alpha = l / \sqrt{l^2 + x^2}.$$

Тоді напруженість поля в точці А буде

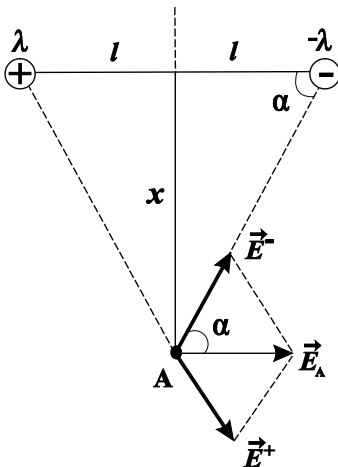


Рис. 2.16

$$|\vec{E}_A| = \lambda l / (\pi \epsilon_0 (l^2 + x^2)). \quad (1)$$

Напруженість поля індукованих зарядів біля провідної поверхні (поза нею) за формулою (2.9) буде:

$$E' = \sigma / \epsilon_0. \quad (2)$$

Індуковані заряди розподіляються так, що їхнє поле всередині площини компенсує зовнішнє поле  $E_A$  (напруженість поля всередині провідника, який розташований в електростатичному полі, дорівнює нулю):

$$\vec{E}_A + \vec{E}' = 0, \text{ або } |\vec{E}_A| = |\vec{E}'|. \quad (3)$$

Підставивши (1) і (2) в (3) отримаємо:

$$\sigma = \frac{\lambda l}{\pi(l^2 + x^2)} \approx \frac{0,336}{0,01 + x^2} \text{ нКл/м}^2.$$

**Задача 2.12.** Плоский конденсатор, площа пластин якого  $S = 500 \text{ см}^2$ , заповнений двома шарами із діелектриків. Межа між ними паралельна обкладкам. Перший шар слюда ( $\epsilon_1 = 7,5$ ) товщиною  $d_1 = 0,1 \text{ см}$ , другий шар – скло ( $\epsilon_2 = 6$ ) товщиною  $d_2 = 0,3 \text{ см}$  (рис.2.17). Конденсатор заряджений до різниці потенціалів  $U = 400 \text{ В}$ . Визначити енергію зарядженого конденсатора.

**Аналіз.** В конденсаторі електричне поле практично локалізоване між його обкладками. Енергія зарядженого конденсатора може бути знайдена, або за загальною формулою (2.15), або за (2.16). Для знаходження напруженості електричного поля треба скористатись співвідношенням (1.18), з якого

$$\phi_2 - \phi_1 = U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (1)$$

**Розв'язок.** Так як поле в конденсаторі однорідне, то рівність (1) можна записати так:

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2, \quad (2)$$

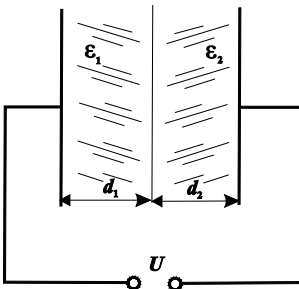


Рис. 2.17

де  $E_1$  – напруженість поля в слюді,  $E_2$  – напруженість поля в склі. Межа розділу діелектриків паралельна обкладкам конденсатора і тому вона нормальна силовим лініям поля. Згідно (2.7)  $D_1 = D_2$  і

$$E_1 = \varepsilon_2 E_2. \quad (3)$$

Рівняння (2) і (3) представляють собою систему рівнянь відносно невідомих  $E_1$  і  $E_2$ . Розв'язок цих рівнянь дає:

$$E_1 = \varepsilon_2 U / (\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2); E_2 = \varepsilon_1 U / (\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2); \quad (4)$$

В межах кожного шару густина енергія постійна і згідно (2.15):

$$\omega_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1^2 / 2, \quad \omega_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2^2 / 2. \quad (5)$$

Тоді за формулою (2.16) енергія конденсатора

$$W = \omega_1 V_1 + \omega_2 V_2,$$

де  $V_1 = S d_1$ , а  $V_2 = S d_2$ . Із урахуванням (4) і (5) отримаємо:

$$W = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 U^2 S}{2(\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2)} = \frac{7,5 \cdot 6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 16 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2(6 \cdot 10^{-3} + 7,5 \cdot 3 \cdot 10^{-3})} \text{ Дж} =$$

$$= 56 \text{ мкДж}.$$

Для знаходження енергії цього зарядженого конденсатора за формулою (2.17) розрахуємо його ємність. Даний конденсатор можна розглядати як два послідовно з'єднані конденсатори, ємність кожного з яких є :

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{d_2}.$$

Тоді ємність комбінованого конденсатора буде

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

і за (2.17) отримаємо вираз для енергії конденсатора, який буде співпадати із раніше отриманим.

**Задача 2.13.** Повітряний конденсатор, ємність якого  $C_1 = 0,4$  мкФ, заряджений до різниці потенціалів  $U_0 = 1000$  В. Знайти зміну енергії конденсатора і роботу сил поля при заповненні конденсатора рідким діелектриком (чиста вода  $\varepsilon = 81$ ). Розрахунок

виконати для двох випадків: 1) заповнення конденсатора рідиною відбувається при відключеному джерелі напруги; 2) заповнення конденсатора рідиною відбувається при включеному джерелі напруги.

**Аналіз.** Робота  $A$  сил кулонівського поля конденсатора може бути розрахована із рівняння енергетичного балансу:

$$\Delta W = -A + A_{\text{джер}}, \quad (1)$$

де  $\Delta W$  – зміна енергії конденсатора,  $A_{\text{джер}}$  – робота джерела напруги по перенесенню заряду в колі.

При внесенні діелектрика в електричне поле конденсатора сили поля здійснюють позитивну роботу  $A$  незалежно від того, відключений попередньо конденсатор від джерела чи ні. Сили кулонівського поля поляризують діелектрик, втягують його в область більшої напруженості. Таким чином  $A > 0$ .

В першому випадку за рахунок цієї позитивної роботи сил поля енергія конденсатора зменшується. В другому випадку напруга на обкладинках конденсатора залишається незмінною, значить при внесенні діелектрика заряд конденсатора повинен зростати. Це значить, що джерело напруги «посилає» додатковий заряд конденсатору, здійснюючи позитивну роботу і характер зміни енергії конденсатора наперед невідомий.

Очевидно, що в першому випадку ( $q = \text{const}$ ) і зміну енергії конденсатора зручно розраховувати за формулою (2.17)

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1}, \quad (2)$$

а в другому ( $U = \text{const}$ ) –

$$\Delta W = \frac{C_2 U_0^2}{2} - \frac{C_1 U_0^2}{2}, \quad (3)$$

де  $C_2 = \epsilon C_1$ , оскільки діелектрик повністю заповнює весь конденсатор.

**Розв’язок.** 1. В першому випадку  $A_{\text{джер}} = 0$  (джерело відключене при заповненні конденсатора діелектриком) і рівняння (1) з урахуванням (2) запишеться:

$$\Delta W = \frac{q^2}{2} \left( \frac{1}{\epsilon C_1} - \frac{1}{C_1} \right) = -A_1,$$

або, врахувавши, що  $q = C_1 U_0$  -

$$\Delta W = \frac{C_1 U_0^2}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{2} \left( \frac{1}{81} - 1 \right) = -0,2 \text{ Дж};$$

$$A_1 = 0,2 \text{ Дж.}$$

2. Конденсатор весь час підключений до джерела напруги. Згідно (3) зміна енергії конденсатора буде:

$$\Delta W = \frac{C_1 U_0^2}{2} (\varepsilon - 1) = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{2} (81 - 1) \text{ Дж} = 16 \text{ Дж.}$$

Звернемо увагу на те, що в цьому випадку хоч сили кулонівського поля здійснювали позитивну роботу, енергія конденсатора суттєво збільшилась, що можливо тільки за рахунок роботи джерела живлення по перенесенню заряду-  
 $\Delta q = C_2 U_0 - C_1 U_0 = C_1 U_0 (\varepsilon - 1)$ . Ця робота дорівнює

$$A_{\text{джер}} = \Delta q \cdot U_0 = C_1 U_0^2 (\varepsilon - 1) = 2\Delta W.$$

Тоді згідно (1)

$$A_2 = A_{\text{джер}} - \Delta W = \Delta W = 16 \text{ Дж.}$$

Як видно,  $A_2 \gg A_1$ . Це пояснюється тим, що в першому випадку в процесі заповнення конденсатора діелектриком сили поля слабшають.

**Задача 2.14.** Заряд  $q$ , рівномірно розподілений в вакуумі по об'єму, який має форму кулі, радіус якої  $R$  (рис.2.18). Розрахувати енергію електричного поля.

**Аналіз.** Заряд  $q$  створює електричне поле як в області, яку займає він сам, так і поза нею. За формулою (2.16) можемо розрахувати енергію електричного поля, де об'ємну густину енергії електричного поля будемо визначати за формулою (2.15).

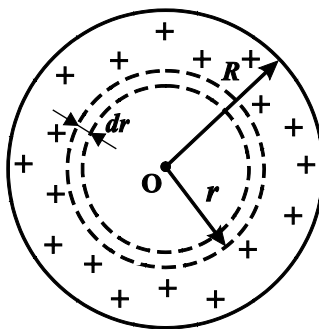


Рис. 2.18

**Розв'язок.** 1. Розглянемо випадок  $r \leq R$ , де  $r$  відстань, що відрховується від центра кулі. Напруженість поля в середині кулі знайдемо за законом (2.5)

$$E_1(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, \quad (1)$$

де  $\rho = q/(4\pi R^3/3)$  – густина заряду. Тоді об'ємна густина енергії

$$\omega_1 = \frac{\varepsilon_0 E_1(r)^2}{2} = \frac{q^2 r^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^6} \quad (r < R). \quad (2)$$

Для випадку, коли ( $r > R$ ), напруженість поля визначається за формулою для точкового заряду, а саме:

$$E_2(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

а об'ємна густина енергії –

$$\omega_2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \quad (r > R). \quad (3)$$

Так як залежність  $\omega(r)$  різна для областей простору всередині і зовні заряду  $q$ , інтеграл (2.16) в правій частині розіб'ємо на два:

$$W = \int_{V_1} \omega_1 dV + \int_{V_2} \omega_2 dV, \quad (4)$$

де  $V_1$  – об'єм простору, який займає заряд  $q$ ;  $V_2$  – об'єм простору поза кулею. Враховуючи симетрію задачі, за об'єм  $dV$  необхідно вибрати тонкий кульовий прошарок, товщина якого  $dr$ , а радіус  $r$  (в межах об'єму такого прошарку  $W$  і  $\omega$  постійні):

$$dV = 4\pi r^2 dr. \quad (5)$$

Підставляючи вирази (2), (3) і (5) в (4) отримаємо, що

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right) = \frac{3q^2}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

**Задача 2.15.** Пояснити, чому всі заряди, які знаходяться на пластині плоского конденсатора, не дивлячись на їхнє взаємне відштовхування, розташовуються на внутрішній поверхні пластини (тобто на тій поверхні, яка повернута до сусідньої пластини).

**Розв'язок.** Пластини конденсатора є провідниками. Допустимо, що заряди розподілені і по зовнішній 1 – 1 і по внутрішній 2 – 2 площині пластини А (всередині провідника при електричній рівновазі зарядів не має) (рис.2.19). Якщо вважати пластини безмежними (відстань між пластинами і їхня товщина є набагато меншою порівняно з лінійними розмірами пластин), то заряди розподіляються

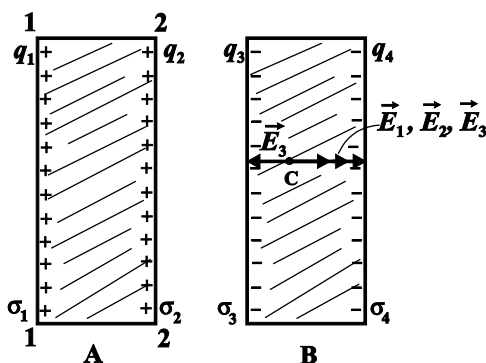


Рис. 2.19

по поверхням рівномірно. Тому заряджений конденсатор можна представити як систему чотирьох рівномірно заряджених площин. Нехай заряди на них  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$ , а поверхневі густини зарядів  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  (рис.2.19). Тоді напруженість поля в

будь-якій точці С всередині пластини В згідно принципу суперпозиції (1.4) та формули (1.9) буде:

$$E_c = \frac{1}{2\varepsilon_0} (|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_4| - |\sigma_3|) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} (|q_1| + |q_2| + |q_4| - |q_3|),$$

де  $S$  – площа пластин.

Так як  $|q_1| + |q_2| = |q_3| + |q_4|$ , то

$$E_c = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} (|q_3| + |q_4| + |q_4| - |q_3|) = \frac{|q_4|}{\varepsilon_0 S}.$$

З другої сторони напруженість в точці С всередині провідника дорівнює нулеві, тобто  $E_c = 0$  і як наслідок  $q_4 = 0$ . Це означає, що на зовнішній поверхні пластини В зарядів не має, всі заряди

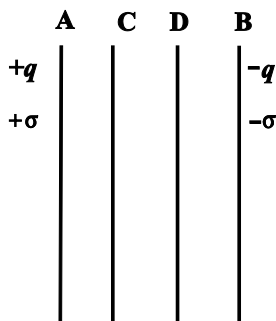
розподіляються по внутрішній поверхні пластини. Із симетрії задачі зрозуміло, що і на пластині А заряди розподіляються тільки по її внутрішній поверхні.

**Задача 2.16.** В поле плоского конденсатора АВ розміщують дві, паралельні пластинам А і В, провідні незаряджені пластини С і D (рис.2.20). Відстані  $AC = CD = DB = \frac{d}{3} = 1\text{ см}$ . Між пластинами А і В спочатку є різниця потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B = U = 90\text{ В}$ . Пластинки С і D з'єднують провідником, а потім роз'єднують. Після цього цю ж процедуру проводять із пластинами А і В. Визначити: а) Яка буде різниця потенціалів між пластинами А і С, С і D, D і В? б) Чи є заряди на пластинах С і D? в) Яка напруженість поля між пластинами А і С, С і D, D і В?

**Розв'язок.** Електричне поле конденсатора зосереджене між пластинами А і В. Напруженість поля

$$E = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{d} = \frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Звідки знайдемо, що початкова густина заряду на пластинах А і В за модулем дорівнює  $\sigma = \varepsilon_0 U / d$ . На



**Рис.2.20**

пластинах С і D зарядів не має. Коли з'єднати пластини С і D провідником, то потенціали їх повинні стати однаковими. Для цього відбудеться переміщення заряду по провіднику до тих пір, поки напруженість поля між пластинами С і D не стане дорівнювати нулеві. Це буде тоді, коли пластина С зарядиться негативно з поверхневою густиною  $-\sigma$ , а пластина D – позитивно з поверхневою густиною  $+\sigma$ . Різниця потенціалів між пластинами С і D  $\varphi_C - \varphi_D = 0$ . Коли пластини С і D роз'єднати, то заряди на них залишаться (рис.2.21).

Коли з'єднати провідником пластини А і В, то різниця потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B = 0$ , це означає, що на цих пластинах



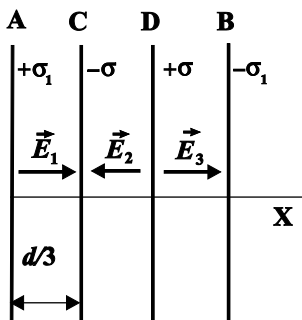


Рис. 2.21

відбудеться перерозподіл зарядів і густина заряду пластини А стане  $+\sigma_1$ , а пластини В –  $(-\sigma_1)$ . Напруженості полів між пластинами А і С та D і В будуть однаковими  $\vec{E}_1 = \vec{E}_3$ .

$$E_1 = \frac{+\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{|-\sigma|}{2\varepsilon_0} - \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{|-\sigma_1|}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}.$$

Напруженість поля між пластинами С і D буде:

$$E_2 = \frac{+\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{|-\sigma|}{2\varepsilon_0} - \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{|-\sigma_1|}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Так як  $\varphi_A - \varphi_B = 0$ , то формально (маючи на увазі, що  $|\sigma_1| < |\sigma|$  і  $E_2 < 0$ )

$$E_1 \cdot \frac{d}{3} + E_2 \cdot \frac{d}{3} + E_3 \cdot \frac{d}{3} = (2E_1 + E_2) \frac{d}{3} = 0,$$

або

$$2\sigma_1 + \sigma_1 - \sigma = 0.$$

Звідки знаходимо, що  $\sigma_1 = \sigma/3$ . Тоді

$$E_1 = E_3 = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} = \frac{U}{3d} = \frac{90}{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 1 \text{ кВ/м},$$

а

$$E_2 = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{2}{3} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{2U}{3d} = \frac{90}{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = -2 \text{ кВ/м}.$$

Знак «-» означає, що напруженість поля  $\vec{E}_2$  направлена проти осі X (рис.2.21). Різниця потенціалів між пластинами А і С і D і В буде:

$$\varphi_A - \varphi_C = \varphi_D - \varphi_B = E_1 \frac{d}{3} = \frac{U}{9} = 10\text{В},$$

а між пластинами С і D –

$$\varphi_C - \varphi_D = E_2 \cdot \frac{d}{3} = -\frac{2U}{9} = -20\text{В}.$$

**Дещо інший підхід до розв'язку цієї задачі.** Після з'єднання провідником пластин А і В, напруженість електричного поля між пластинами А і С та D і В стане  $E_1$ , а між пластинами С і D

$E_2 = E_1 - E$ , де  $E=U/d$ . Так як після з'єднання провідником пластин А і В  $\varphi_A - \varphi_B = 0$ , то можемо записати рівність:

$$\varphi_A - \varphi_B = E_1 \cdot \frac{d}{3} + E_2 \cdot \frac{d}{3} + E_1 \cdot \frac{d}{3} = 0,$$

або 
$$2E_1 \cdot \frac{d}{3} + (E_1 - E) \cdot \frac{d}{3} = 0.$$

Звідки 
$$E_1 = E/3 = U/(3d) = 10^3 \text{ В/м}.$$

Тоді

$$E_2 = E_1 - E = U/(3d) - U/d = -2U/(3d) = -2 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Відповідно різниця потенціалів:

$$\varphi_A - \varphi_C = \varphi_D - \varphi_B = E_1 \cdot \frac{d}{3} = 10\text{В},$$

а

$$\varphi_C - \varphi_D = E_2 \cdot \frac{d}{3} = -20\text{В}.$$

Заряди на пластинах С і D будуть такими, як початкові заряди на пластинах А і В, відповідно.

**Задача 2.17.** Точковий заряд  $q = 0,1$  мкКл знаходиться на відстані  $a = 10$  см від центру заземленої провідної кулі, радіус якої  $R = 5$  см (рис.2.22). З якою силою  $F$  заряд  $q$  притягується до кулі? Яку роботу  $A$  потрібно виконати, щоб точковий заряд видалити на безмежність?

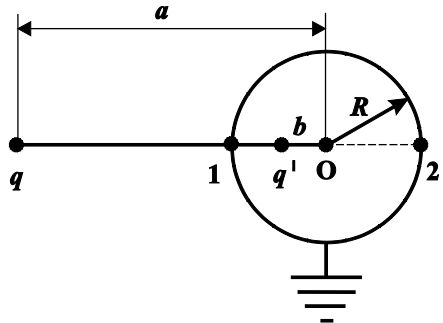


Рис. 2.22

**Аналіз.** Поле заряду  $q$  наводить на кулі заряд  $q'$ . Враховуючи симетрію кулі, поле наведеного на кулі

заряду можна замінити полем точкового заряду, який розміщений на відстані  $b$  від центру кулі (рис.2.22.) Величину заряду  $q'$  і відстань  $b$  знайдемо із умови, що потенціал заземленої кулі дорівнює нулеві. Тоді сила взаємодії заряду  $q$  із кулею дорівнює силі взаємодії між зарядами  $q$  і  $q'$ .

**Розв'язок.** Потенціали точок 1 і 2 (рис.2.22) дорівнюють нулеві. Згідно принципу суперпозиції

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a-R)} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(R-b)} = 0, \quad (1)$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a+R)} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(R+b)} = 0. \quad (2)$$

Розв'язуючи ці два рівняння відносно  $q'$  і  $b$  знаходимо:

$$q' = -q \frac{R}{a}, \quad (3)$$

$$b = R^2/a. \quad (4)$$

Тоді сила взаємодії заряду  $q$  і кулі буде:

$$\begin{aligned} F &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(a-b)^2} = -\frac{q^2 R/a}{4\pi\epsilon_0(a - \frac{R^2}{a})^2} = \\ &= -\frac{q^2 Ra}{4\pi\epsilon_0(a^2 - R^2)^2} = -8 \text{ мН}. \end{aligned}$$

Знак «-» означає, що заряд  $q$  притягується до кулі.

Так як заряд  $q$  буде переміщуватись в електричному полі, то

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = W_1,$$

де  $W_2 = 0$  (потенційну енергію на безмежності приймаємо за нуль), а

$$W_1 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(a-b)}.$$

Врахувавши (3) і (4) даної задачі, отримаємо, що

$$A = -\frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0(a^2 - R^2)} = -0,6 \text{ мДж.}$$

Знак «-» означає, що роботу повинні виконати ми, щоб перенести заряд  $q$  на безмежність.

## 2.6. Задачі

**2.18.** В деякій точці ізотропного діелектрика з проникністю  $\epsilon = 7$  електричне зміщення має значення  $D = 14 \text{ нКл/м}^2$ . Визначити поляризованість  $P$  діелектрика в цій точці.

**2.19.** Всередині діелектрика відомі його поляризованість

$$\vec{P} = a(2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 6z\vec{k})$$

і напруженість поля

$$\vec{E} = a(x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k})/\epsilon_0,$$

де  $a$  – константа. а) Визначити густину  $\rho'$  зв'язаних зарядів і густину  $\rho$  сторонніх зарядів всередині діелектрика. б) Чому дорівнює діелектрична проникність  $\epsilon$  матеріалу діелектрика?

**2.20.** Є дві безмежні паралельні площини, які заряджені з густинами заряду  $+\sigma$  і  $-\sigma$ . Спочатку вони знаходились у вакуумі. Потім зазор між площинами заповнюється однорідним ізотропним діелектриком з проникністю  $\epsilon$ . Що відбувається при цьому з: а) напруженістю  $\vec{E}$  поля в зазорі, б) зміщенням  $\vec{D}$ , в) різницею потенціалів  $U$  між площинами?

**2.21.** В однорідному електричному полі з напруженістю  $E_0 = 100 \text{ В/м}$  розташована безмежна плоскопаралельна пластинка із однорідного і ізотропного діелектрика з проникністю  $\epsilon = 2$ . Пластинка розташована перпендикулярно до  $\vec{E}_0$ . Визначити: а) напруженість поля  $E$  і електричне зміщення  $D$  всередині пластинки;

б) поляризованість діелектрика  $P$ ; в) поверхневу густину зв'язаних зарядів  $\sigma'$ .

**2.22.** Скляна пластинка, проникність якої  $\epsilon_2 = 6$ , розташована в однорідному електричному полі з напруженістю  $E_1 = 10 \text{ В/м}$  і розташована так, що кут  $\alpha_1$  між напрямком нормалі до пластинки і напрямком зовнішнього поля дорівнює  $150^\circ$ . Знайти напруженість  $E_2$  поля в пластинці, кут  $\alpha_2$ , який це поле утворює з нормаллю до пластинки, а також густину  $\sigma'$  зв'язаних зарядів, що виникають на поверхні пластинки. Вважати діелектричну проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 1$ .

**2.23.** Плоский конденсатор, між обкладками якого розміщена скляна пластинка ( $\epsilon = 6$ ) товщиною  $d = 2 \text{ мм}$ , заряджений до напруги  $U = 200 \text{ В}$ . Нехтуючи величиною зазору між пластинкою і обкладками, знайти поверхневу густину  $\sigma$  вільних зарядів на обкладках конденсатора, а також поверхневу густину  $\sigma'$  зв'язаних зарядів на склі.

**2.24.** Показати, що на межі однорідного, ізотропного діелектрика з провідником, поверхнева густина зв'язаних зарядів  $\sigma' = -(\epsilon - 1)\sigma/\epsilon$ , де  $\epsilon$  – діелектрична проникність діелектрика,  $\sigma$  поверхнева густина заряду на провіднику.

**2.25.** Всередині кулі із однорідного ізотропного діелектрика з  $\epsilon = 5$  створене однорідне електричне поле з напруженістю  $E = 100 \text{ В/м}$ . Знайти максимальну поверхневу густину  $\sigma'_{\text{max}}$  зв'язаних зарядів і середнє значення  $\sigma'$  одного знаку.

**2.26.** Всередині кулі із однорідного ізотропного діелектрика з проникністю  $\epsilon = 7$  створене однорідне електричне поле, напруженість якого  $E = 100 \text{ В/м}$ . Радіус кулі  $R = 3 \text{ см}$ . Знайти повний зв'язаний заряд одного знаку.

**2.27.** Скляна пластинка ( $\epsilon_2 = 6$ ) внесена в однорідне електричне поле, напруженість якого  $|\vec{E}| = 100 \text{ В/м}$ , і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до площини пластинки і напрямком поля складає  $150^\circ$ . Визначити вектор поляризації скла. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 1$ .

**2.28.** Скляна пластинка ( $\epsilon_2 = 6$ ) внесена в однорідне електричне поле, напруженість якого  $|\vec{E}| = 1 \text{ кВ/м}$ , і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до площини пластинки і напрямком поля складає  $135^\circ$ . Визначити поверхневу густину  $\sigma'$  зв'язаних зарядів на поверхні пластинки. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 1$ .

**2.29.** Скляна пластинка з проникністю ( $\epsilon_2 = 6$ ) внесена в однорідне електричне поле, напруженість якого  $|\vec{E}| = 10 \text{ В/м}$ , і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до поверхні пластинки і напрямком поля складає  $120^\circ$ . Визначити вектор електричного зміщення  $\vec{D}$  в пластинці. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 2$ .

**2.30.** Скляна пластинка з проникністю ( $\epsilon_2 = 6$ ) внесена в однорідне електричне поле, вектор індукції якого  $|\vec{D}| = 8,85 \text{ нКл/м}^2$ , і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до площини пластинки і вектором  $\vec{D}$  складає  $135^\circ$ . Знайти вектор  $\vec{E}$  напруженості електричного поля в пластинці. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 3$ .

**2.31.** Пластинка із однорідного ізотропного діелектрика ( $\epsilon_2 = 8$ ) внесена в однорідне електричне поле, вектор індукції якого  $\vec{D}$  складає кут  $\alpha = 150^\circ$  з напрямком нормалі до поверхні пластинки.  $|\vec{D}| = 17,6 \text{ нКл/м}^2$ . Визначити поверхневу густину  $\sigma'$  зв'язаних зарядів на поверхні пластинки. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 1$ .

**2.32.** Пластинка із однорідного ізотропного діелектрика ( $\epsilon_2 = 8$ ) внесена в однорідне електричне поле і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до поверхні пластинки і напрямком поля складає  $120^\circ$ . Який кут складає вектор поляризації  $\vec{P}$  із напрямком нормалі до поверхні пластинки? Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 1$ .

**2.33.** Пластинка із однорідного ізотропного діелектрика ( $\epsilon_2 = 8$ ) знаходиться в однорідному електричному полі, вектор індукції якого  $|\vec{D}| = 35,4 \text{ нКл/м}^2$  і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до поверхні пластинки і вектором  $\vec{D}$  складає  $30^\circ$ . Орт нормалі направлений із середовища 1 в середовище 2. Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 2$ .

**2.34.** Однорідно поляризована ізотропна діелектрична пластинка ( $\epsilon_2 = 8$ ) знаходиться в повітрі. Вектор поляризації  $\vec{P}$  складає кут  $135^\circ$  з напрямком нормалі до поверхні пластинки.  $|\vec{P}| = 17,6 \text{ нКл/м}^2$ . Визначити вектор напруженості електричного поля біля пластинки.

**2.35.** Провідник довільної форми, який має заряд, оточений однорідним діелектриком з проникністю  $\epsilon$  (рис.2.23). Знайти сумарні поверхневі зв'язані заряди на внутрішній і зовнішній поверхнях діелектрика.

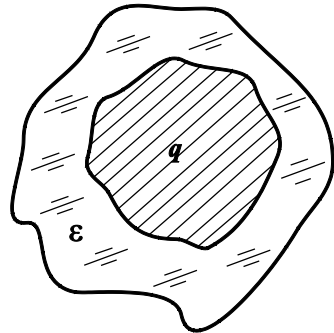


Рис. 2.23

**2.36.** Точковий заряд  $q$  знаходиться в центрі кулі із однорідного ізотропного діелектрика з проникністю  $\epsilon$ . Знайти поляризованість діелектрика, як функцію радіус-вектора  $\vec{r}$  відносно центру системи, а також заряд  $q'$  всередині сфери, радіус якої менший радіуса кулі.

**2.37.** Біля точки А (рис.2.24) на межі розділу скло – вакуум напруженість електричного поля в вакуумі  $E_0 = 10$  В/м, причому кут між вектором  $\vec{E}_0$  і нормаллю  $\vec{n}$  до границі розділу  $\alpha_0 = 30^\circ$ . Знайти напруженість  $E$  поля в склі біля точки А, кут  $\alpha$  між вектором  $\vec{E}$  і  $\vec{n}$ , а також поверхневу густину зв'язаних зарядів в точці А.

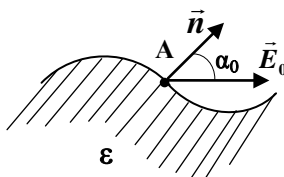


Рис.2.24.

**2.38.** Біля плоскої поверхні однорідного ізо­тропного діелектрика з проникністю  $\epsilon = 7$  напруженість електричного поля в вакуумі дорівнює  $E_0 = 10$  В/м, причому вектор  $\vec{E}_0$  складає кут  $\alpha = 60^\circ$  з нормаллю до поверхні діелектрика (рис.2.25). Вважаючи поле всередині і зовні діелектрика однорідним, знайти потік вектора  $\vec{E}$  через сферу, радіус якої  $R = 2$  см, а центр О знаходиться на поверхні діелектрика.

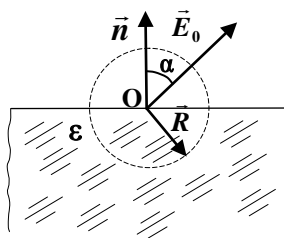


Рис.2.25.

**2.39.** Біля плоскої поверхні однорідного ізо­тропного діелектрика з проникністю  $\epsilon = 7$  напруженість електричного поля в вакуумі дорівнює  $E_0 = 20$  В/м, причому вектор  $\vec{E}_0$  складає кут  $\alpha = 30^\circ$  з нормаллю до поверхні діелектрика (рис.2.26.). Вважаючи поле всередині і зовні діелектрика однорідним знайти циркуляцію вектора  $\vec{D}$  по контуру  $\Gamma$ , довжина якого  $l = 1$  см. Площина контуру перпендикулярна до поверхні діелектрика і паралельна вектору  $\vec{E}_0$ .

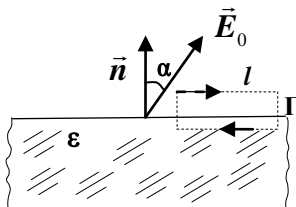


Рис.2.26.

**2.40.** Безмежна площина рівномірно заряджена позитивним зарядом з поверхневою густиною



$\sigma = 7,1 \text{ нКл/м}^2$ . Знайти різницю потенціалів між точкою А, яка знаходиться на відстані  $d = 5 \text{ см}$  від площини, і точкою В, що знаходиться на площині.

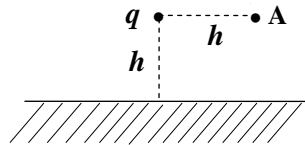
**2.41.** Невелика хмара із зарядом  $q = 20 \text{ Кл}$  знаходиться на висоті  $h = 1 \text{ км}$  над поверхнею Землі. Вважаючи Землю провідником, визначити напруженість електричного поля в точці на поверхні Землі, яка знаходиться на відстані  $S = 3 \text{ км}$  від місця на Землі, над яким знаходиться хмара. Кривизною поверхні Землі знехтувати.

**2.42.** Два точкових заряди  $q_1 = + 7,91 \text{ нКл}$  і  $q_2 = + 2,63 \text{ нКл}$  знаходяться на відстані  $d_1 = 4 \text{ см}$  один від одного. Між ними на однакових від них відстанях розташована провідна, заземлена пластина, товщина якої  $d_2 = 2 \text{ см}$ . Поверхні пластини перпендикулярні до прямої, яка з'єднує заряди.

а) Визначити силу, яка діє на пластину.

б) Як зміниться відповідь, якщо один із зарядів замінити таким же за величиною негативним зарядом?

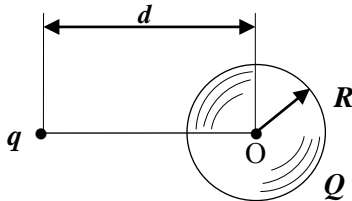
**2.43.** На відстані  $h = 5 \text{ м}$  від провідної безмежної площини знаходиться точковий заряд  $q = 10 \text{ нКл}$ . Визначити напруженість поля в точці А (рис.2.27), яка знаходиться на відстані  $h$  від заряду і площини.



**Рис.2.27.**

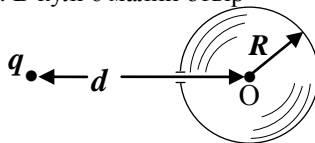
**2.44.** Металева куля, радіус якої  $R$ , з'єднана дуже тонким проводом із Землею. На відстані  $d = 2R$  від центра цієї кулі знаходиться електричний заряд  $+q$ . Чому дорівнює негативний заряд  $Q$  кулі? Поверхню Землі і всі інші предмети можна вважати досить віддаленими, а впливом проводу знехтували.

**2.45.** Металева куля, радіус якої  $R$ , має заряд  $Q$ . Точковий заряд  $q$  розміщений на відстані  $d$  від центра кулі (рис.2.28). Знайти потенціал кулі.



**Рис.2.28.**

**2.46.** Порожниста металева куля, радіус якої  $R$ , має заряд  $Q$ . В кулі є малий отвір (рис.2.29). Як буде змінюватись потенціал кулі, якщо точковий заряд переміщувати із нескінченності через отвір всередину кулі?



**Рис.2.29.**

**2.47.** Заряджений провідник знаходиться всередині замкнутої металевої оболонки.

1) Чи зміниться електричне поле всередині оболонки, якщо зовні піднести до неї заряджений провідник?

2) Чи зміниться поле зовні і всередині оболонки, якщо заряджений провідник, що знаходиться всередині оболонки, переміщувати всередині неї?

**2.48.** Система складається із двох концентричних провідних сфер, радіуси яких  $a$  і  $b$ . На внутрішній сфері знаходиться позитивний заряд  $q_1$ . Який заряд необхідно надати зовнішній сфері, щоб потенціал внутрішньої сфери став дорівнювати нулеві? Як буде залежати при цьому потенціал  $\phi$  від відстані  $r$  до центра системи?

**2.49.** Із трьох – концентричних безмежно тонких металевих сфер, радіуси яких  $R_1 < R_2 < R_3$  відповідно, крайні заземлені, а середній надано заряд  $q$ . Сфери знаходяться у вакуумі. Знайти напруженість електричного поля у всьому просторі.

**2.50.** Показати, що робота при перенесенні першого точкового заряду від однакового за величиною, але протилежного за знаком другого точкового заряду на безмежність в 4 рази більша від

роботи по перенесенню першого заряду на безмежність від безмежної провідної стінки, розташованої на такій же відстані, як і другий заряд.

**2.51.** Точковий заряд  $q = 1$  мкКл знаходиться на відстані  $l = 1$  см від безмежної провідної площини. Яку роботу необхідно виконати, щоб повільно видалити цей заряд на дуже велику відстань від площини?

**2.52.** Точковий заряд  $q$  знаходиться на відстані  $l$  від провідної безмежної площини. Визначити поверхневу густину зарядів, індукованих на площині, як функцію відстані  $r$  від основи перпендикуляра, що опущений із заряду на площину.

**2.53.** Точковий заряд  $q = 5,655$  мкКл знаходиться на відстані  $a = 3$  см від заземленої металевої стінки. Знайти поверхневу густину індукованого заряду на стінці:

- а) в точці, яка найближча до заряду;
- б) в точці, яка знаходиться на відстані  $r = 5$  см від заряду;
- в) довести, що сумарний індукований заряд на поверхні стінки дорівнює  $-q$ .

**2.54.** Велику металеву пластинку, товщина якої  $a = 0,5$  см, зарядили так, що густина заряду на поверхні кожної сторони пластини дорівнює  $\sigma = 10$  нКл/м<sup>2</sup>. Потім пластинку розмістили в однорідне електричне поле, напруженість

якого  $\vec{E}_x = E_0 \vec{i}$ , де  $E_0 = 565$  В/м, перпендикулярна площині пластини (рис.2.30). Визначити напруженість поля  $\vec{E}'$  всередині і зовні пластинки, поверхневу густину зарядів  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ , яка виникне на лівій і правій сторонах пластинки.

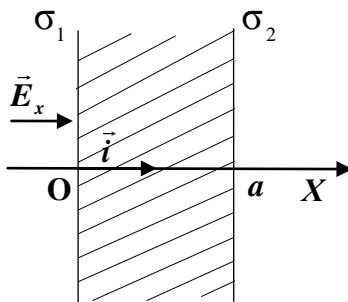
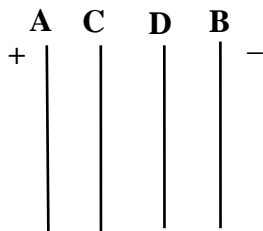


Рис.2.30.

**2.55.** В поле плоского конденсатора АВ розмішують дві паралельні провідні пластини С і D (рис.2.31). Відстань  $AC = CD = DB = d/3$ . Між пластинами А і В спочатку є різниця потенціалів  $U$ .

Визначити:

- Різницю потенціалів між пластинами А і С, С і D, D і В.
- Чи є заряди на пластинах С і D?
- Напруженість поля між пластинами А і С, С і D, D і В.



**Рис.2.31.**

**2.56.** В поле плоского конденсатора АВ розмішують дві паралельні провідні пластини С і D (рис.2.31). Відстань  $AC = CD = DB = d/3$ . Між пластинами А і В спочатку є різниця потенціалів  $U$ . Пластини С і D з'єднуються провідником, а потім роз'єднуються.

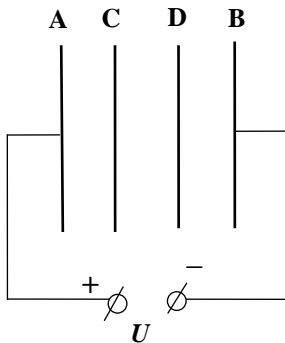
Визначити:

- Різницю потенціалів між пластинами А і С, С і D, D і В;
- Чи є заряди на пластинах С і D ?;
- Напруженість поля між А і С, С і D, D і В.

**2.57.** Для умови задачі № 2.55 пластини D і В з'єднують провідником, а потім роз'єднують.

**2.58.** Для умови задачі № 2.55 пластини А і D з'єднують провідником, а потім роз'єднують.

**2.59.** В поле плоского конденсатора АВ розмішують дві провідні пластини С і D, які паралельні до пластин А і В (рис.2.32). Відстані



**Рис.2.32.**

$AC = CD = DB = d/3$ . Між пластинами А і В підтримується різниця потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B = U$ . Пластини D і В з'єднують провідником, а потім роз'єднують. Визначити: а) Яка буде різниця потенціалів між пластинами А і С, С і D, D і В? б) Чи є заряди на пластинах С і D? в) Напруженість поля між А і С, С і D, D і В.

**2.60.** В поле плоского конденсатора АВ розміщують дві провідні пластини С і D, які паралельні до пластин А і В (рис.2.33). Відстані  $AC = CD = DB = d/3 = 1$  см. Між пластинами А і В підтримується різниця потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B = U = 90$  В. Пластинки С і D з'єднуються провідником, а потім роз'єднуються. Визначити:

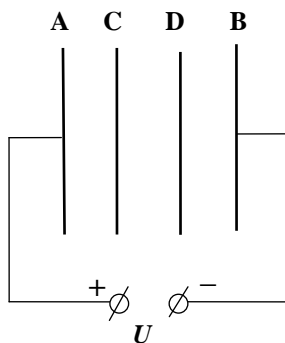


Рис.2.33.

- Яка буде різниця потенціалів між пластинками А і С, С і D, D і В?
- Яка буде густина заряду на пластинах С і D?
- Яка стане напруженість поля між пластинами А і С, С і D, D і В?

**2.61.** Для умови попередньої задачі пластини А і В від'єднують від джерела напруги. Проводять маніпуляції із пластинами С і D такі як в задачі 2.60. Потім пластини А і В з'єднують провідником, а потім їх роз'єднують. Дати відповіді на запитання попередньої задачі.

**2.62.** В установках для очистки повітря від пилюки повітря пропускають через металеві трубки, по осі яких протягується металевий провід. Між проводом і трубою створюють сильне електричне поле, причому провід має негативний потенціал, а труба заземляється. Як будуть вести себе порошинки:

- незаряджені?

б) заряджені негативно або позитивно? Відповідь пояснити.

**2.63.** Як відомо, кут розходження листочків електроскопа, який з'єднаний із зарядженим провідником, залежить від потенціалу провідника. Оцінити співвідношення між електроємностями провідника і електроскопа, щоб похибка вимірювання потенціалу провідника не перевищувала 5 %.

**2.64.** Показати, що формули для ємності циліндричного і сферичного конденсаторів переходять у формулу для ємності плоского конденсатора при малій різниці між радіусами внутрішньої та зовнішньої обкладок.

**2.65.** Плоский конденсатор складається із двох пластин, що знаходяться на відстані 0,5 мм одна від одної. Як зміниться ємність конденсатора, якщо його розмістити в ізолювану металеву коробку («екранувати»), стінки якої будуть знаходитись на відстані 0,25 мм від пластин (рис.2.34). Спотворенням поля біля країв конденсаторів знехтувати.

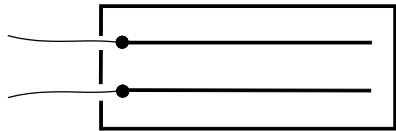


Рис. 2.34

**2.66.** Як зміниться ємність конденсатора (див. попередню задачу), якщо коробку з'єднати з однією із пластин конденсатора?

**2.67.** Яка напруженість електричного поля  $E$  в повітряному зазорі плоского конденсатора, якщо різниця потенціалів між пластинами  $U = 200$  В? Відстань між пластинами  $d = 0,2$  см і між ними знаходиться лист скла ( $\epsilon = 7$ ), товщина якого  $h = 0,1$  см.

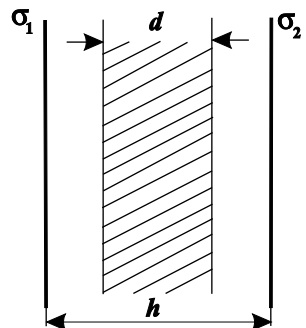


Рис. 2.35

**2.68.** Дві паралельні пластини дуже малої товщини заряджені однойменно, причому поверхнева густина

заряду на одній пластині  $\sigma_1 = 236 \text{ нКл/м}^2$ , а на другій  $\sigma_2 = 72 \text{ нКл/м}^2$ . Відстань між пластинами  $h = 1 \text{ см}$  мала порівняно з лінійними розмірами пластин. Між пластинами розміщена парафінова плоско – паралельна пластинка, товщина якої  $d = 5 \text{ мм}$  (рис.2.35). Діелектрична проникність парафіну  $\varepsilon = 2$ . Визначити різницю потенціалів між пластинами.

**2.69.** Для умови попередньої задачі визначити: 1) напруженість поля  $E_1$  між пластинами поза діелектриком; 2) напруженість поля  $E_2$  всередині діелектрика; 3) електричне зміщення  $D$  між пластинами поза діелектриком і всередині діелектрика; 4) поляризованість  $P$  діелектрика.

**2.70.** Металеve тіло розміщують між пластинами плоского повітряного зарядженого конденсатора. На поверхні тіла виникають внаслідок електризації позитивні і негативні заряди. Після цього простір між пластинами заповнюють гасом ( $\varepsilon = 2$ ). Чи зміниться величина наведених на тілі зарядів у випадках:

- а) заряд конденсатора залишається незмінним?
- б) напруга на конденсаторі підтримується незмінною?

**2.71.** До пластин плоского конденсатора, відстань між якими дорівнює  $d = 3 \text{ см}$ , подана різниця потенціалів  $U = 1000 \text{ В}$ . Простір між пластинами заповнюється діелектриком ( $\varepsilon = 7$ ). Знайти:

- а) на скільки зміниться поверхнева густина заряду на пластинах при заповненні конденсатора діелектриком;
- б) поверхневу густину зв'язаних (поляризаційних) зарядів.

Задачу розв'язати для двох випадків: 1) заповнення конденсатора діелектриком відбувається при включеному джерелі живлення; 2) заповнення конденсатора діелектриком відбувається при виключеному джерелі живлення.

**2.72.** Як зміниться різниця потенціалів між обкладинками усамітненого плоского конденсатора, якщо на одній із обкладок заряд буде збільшений у два рази?

**2.73.** Плоский конденсатор має ємність 600 пФ. Як зміниться ємність цього конденсатора, якщо розмістити між обкладками паралельно їм мідний лист, товщина якого дорівнює  $\frac{1}{4}$  відстані між обкладками? Чи буде впливати на результат положення листа?

**2.74.** Два конденсатори, ємності яких  $C_1$  і  $C_2$ , з'єднані послідовно і підключені до джерела з е.р.с.  $\mathcal{E}$ . Визначити спад напруги  $U_1$  на конденсатор  $C_1$  і спад напруги  $U_2$  на конденсаторі  $C_2$ .

**2.75.** Металева куля, радіус якої  $R_1 = 5$  см, оточена сферичним шаром діелектрика ( $\epsilon = 7$ ) товщиною  $d = 1$  см, що щільно прилягає до кулі. Куля разом із шаром діелектрика оточена концентрично металевою сферою із внутрішнім радіусом  $R_2 = 7$  см. Визначити ємність такого конденсатора.

**2.76.** Спочатку простір між обкладками плоского конденсатора заповнений повітрям, а напруженість поля в зазорі  $E_0$ . Потім половину зазору, як показано на рис.2.36 заповнили однорідним ізотропним діелектриком з проникністю  $\epsilon$ .

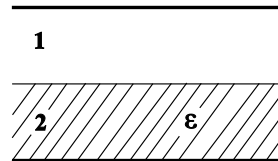


Рис.2.36

Знайти модулі векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  в обох частинах зазору (1 і 2), якщо при заповненні діелектриком:

а) напруга між обкладками не змінювалась;

б) заряди на обкладках залишались незмінними.



Рис.2.37.

**2.77.** Розв'язати попередню задачу з тією відмінністю, що діелектриком заповнили половину зазору, так як показано на рис.2.37.

**2.78.** Половину простору між двома концентричними обкладками сферичного конденсатора заповнено, як показано на рис.2.38, однорідним ізотропним діелектриком з

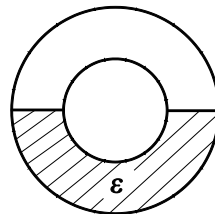


Рис.2.38.



проникністю  $\epsilon$ . Заряд конденсатора дорівнює  $q$ . Знайти модуль вектора напруженості електричного поля між обкладками як функцію відстані  $r$  від центра кривизни цих обкладок.

**2.79.** Повітряний циліндричний конденсатор складається із прямого проводу, діаметр якого  $d = 5$  мм, і коаксіального з ним циліндра, діаметр якого  $D = 5$  см. До якої різниці потенціалів  $U$  можна зарядити цей конденсатор, якщо діелектрична міцність повітря при заданих умовах дорівнює  $E = 30$  кВ/см?

**2.80.** Зазор між пластинами плоского повітряного конденсатора заповнили діелектриком з діелектричною проникністю  $\epsilon = 3$ . Як зміниться: а) заряд на пластинах; б) напруженість поля в конденсаторі; в) енергія конденсатора; г) густина енергії поля в конденсаторі? Розглянути два випадки. 1. Конденсатор весь час підключений до джерела живлення. 2. Конденсатор зарядили від джерела і тут же відключили від нього, а потім заповнили діелектриком.

**2.81.** Електрична проникність речовин суттєво змінюється при підвищенні температури (як правило зменшується). Допустимо, що заряджений конденсатор, який відключений від джерела зарядки, охолоджується, внаслідок чого його електрична енергія змінюється (наприклад зменшується). Куди щезає енергія конденсатора?

**2.82.** В кулі із однорідного ізотропного діелектрика, радіус якої  $R = 10$  см, а проникність  $\epsilon = 2$ , створена однорідна поляризованість  $|\vec{P}| = 3,25$  кКл/м<sup>2</sup>. Знайти енергію електричного поля, яка зосереджена всередині кулі.

**2.83.** Металева куля, радіус якої  $R = 3$  см, заряджена зарядом  $q = 0,02$  мкКл. Куля оточена шаром парафіну, товщина якого  $d = 2$  см. Визначити енергію електричного поля, яке зосереджене в шарі діелектрика.

**2.84.** Три конденсатори, ємність яких  $C_1 = 1$  мкФ,  $C_2 = 2$  мкФ,  $C_3 = 3$  мкФ підключені до джерела живлення з напругою  $U = 1100$  В. Визначити енергію кожного конденсатора у випадку а) послідовного і б) паралельного їх підключення.

**2.85.** Два конденсатори ( $C_1 = 600$  пФ і  $C_2 = 1000$  пФ) з'єднані послідовно. Батарейку заряджають до напруги  $U = 20$  кВ. Потім, не розряджаючи конденсатори, з'єднують їх паралельно. Визначити роботу розряду, який відбувається при такому з'єднанні.

**2.86.** Повітряний конденсатор заряджається до деякого потенціалу і в зарядженому стані заливається гасом ( $\epsilon = 2$ ), від чого енергія конденсатора зменшується в  $\epsilon$  раз. Куди щезає частина енергії?

**2.87.** Заряджений конденсатор з'єднується паралельно з точно таким же незарядженим конденсатором. Показати, що при такому з'єднанні конденсаторів електрична енергія зменшується у два рази. Пояснити це.

**2.88.** Всередині плоского конденсатора, площа пластин якого  $S = 200$  см<sup>2</sup> і відстань між ними  $d = 0,1$  см, знаходиться пластина із скла ( $\epsilon = 5$ ), яка повністю заповнює простір між пластинами конденсатора. Як зміниться енергія конденсатора, якщо видалити склянку пластику? Яка механічна робота затрачується на видалення пластини. Задачу розв'язати при умові, що конденсатор весь час під'єднаний до джерела напруги  $U = 300$  В.

**2.89.** Попередню задачу розв'язати при умові, що конденсатор спочатку був під'єднаний до джерела живлення, потім відключений і тільки після цього пластина була видалена.

**2.90.** Пластинки повітряного плоского конденсатора мають площу  $S = 300$  см<sup>2</sup> і віддалені одна від одної на відстань  $d_1 = 3$  мм. Між ними, паралельно до них, знаходиться металева пластинка з такою ж площею і товщиною  $d_2 = 1$  мм, яка ізольована від Землі. Конденсатор заряджають до напруги  $U = 600$  В і від'єднують від

джерела напруги. Яку роботу необхідно виконати, щоб вийняти пластину?

**2.91.** Задачу 2.90 розв'язати для випадку, коли замість металевої пластинки знаходиться скляна пластинка ( $\epsilon = 7$ ) тих же розмірів.

**2.92.** Задачу 2.90 розв'язати для випадку, коли конденсатор постійно підключений до джерела напруги.

**2.93.** Задачу 2.90 розв'язати для випадку, коли конденсатор постійно підключений до джерела напруги, а замість металевої пластинки знаходиться скляна пластинка ( $\epsilon = 7$ ) тих же розмірів.

**2.94.** Один конденсатор ( $C_1 = 600$  пФ) зарядили до напруги  $U_1 = 3000$  В, інший конденсатор ( $C_2 = 800$  пФ) зарядами до напруги  $U_2 = 4000$  В. Полюси конденсаторів, які мають протилежні знаки, з'єднали провідниками. Визначити роботу розряду конденсаторів.

**2.95.** Батарея із  $n = 5$  послідовно з'єднаних конденсаторів, ємність кожного з яких  $C = 445$  пФ підтримується при постійній напрузі  $U = 60$  кВ. Один із конденсаторів пробивається. Визначити: а) зміну енергії батареї конденсаторів; б) роботу розряду; в) роботу джерела напруги.

**2.96.** Два однакових повітряних конденсатори, ємності яких однакові і дорівнюють 1 нФ заряджені до напруги  $U = 900$  В. Один із конденсаторів в зарядженому стані занурюється в гас. Після чого конденсатори з'єднуються паралельно. Визначити роботу розряду, який при цьому відбудеться.

#### Додаткові задачі

**2.97.** Дві маленькі провідні кульки, радіуси яких однакові, підвішені на довгих однакової довжини непровідних нитках до одного крючка. Кульки заряджені однаковими зарядами і знаходяться в рівновазі на відстані  $r = 4$  см одна від одної. Що відбудеться, якщо одну кульку розрядити?

**2.98.** Молекулу води можна розглядати як електричний диполь, момент якого  $p = 6,25 \cdot 10^{-30} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ . Вважаючи, що диполь складається із позитивного і негативного зарядів, які за модулем дорівнюють заряду електрона, визначити довжину (плече) диполя. Визначити напруженість електричного поля на відстані  $r = 3 \text{ нм}$  від середини диполя в точці, яка лежить на продовженні осі диполя і в точці, яка лежить на перпендикулярі до осі диполя.

**2.99.** Плоский повітряний конденсатор, який складається із двох пластин, заряджають і поміщають в посудину. Потім в посудину наливають гас. Як змінюється при цьому напруженість і індукція електричного поля в наступних випадках:

а) під час наливання гасу конденсатор від'єднаний від джерела напруги;

б) під час наливання гасу конденсатор під'єднаний до джерела напруги.

**2.100.** Пластини плоского конденсатора, площа яких  $S = 300 \text{ см}^2$ , заряджені однаковими за модулем зарядами і притягуються, знаходячись в гасі, з силою  $F = 25 \text{ мН}$ . Відстань між пластинами достатньо мала. Визначити: а) заряди пластин; б) електричну індукцію поля в гасі.

**2.101.** Металева куля, радіус якої  $R_1 = 3 \text{ см}$ , оточена сферичною металевою оболонкою, радіус якої  $R_2 = 5 \text{ см}$ . На кулі знаходиться заряд  $q_1 = +20 \text{ нКл}$ , на оболонці —  $q_2 = -50 \text{ нКл}$ . Визначити напруженість електричного поля на відстані: а)  $r_1 = 4 \text{ см}$  від центра кулі; б)  $r_2 = 6 \text{ см}$  від центра кулі.

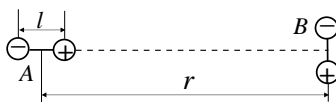
**2.102.** Плоский шар діелектрика ( $\epsilon = 2$ ), товщина якого  $d = 4 \text{ см}$  значно менша інших розмірів шару, рівномірно заряджений електрикою із об'ємною густиною  $\rho = 0,3 \text{ мКл/м}^3$ . Визначити: а) напруженість електричного поля посередині шару; б) всередині шару на відстані  $b = 0,1 \text{ см}$  від поверхні; в) зовні шару.

**2.103.** Плоский шар діелектрика ( $\epsilon = 6$ ), товщина якого  $d = 3 \text{ см}$  значно менша інших розмірів шару, рівномірно заряджений

електрикою із об'ємною густиною  $\rho = 10 \text{ мкКл/м}^3$ . Визначити різницю потенціалів між поверхнею шару і його серединою.

**2.104.** Визначити силу взаємодії двох молекул води, диполі яких направлені по прямій, яка проведена через центри молекул. Дипольний момент молекули води  $p = 6,25 \cdot 10^{-30} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ , відстань між центрами молекул  $r = 5 \text{ \AA}$ .

**2.105.** На рисунку показані дві молекули води, які розташовані взаємно перпендикулярно на відстані  $r \gg l$  ( $l$  – плече диполя). Визначити обертальні моменти, які діють на молекули А і В.



Вважати, що дипольний момент молекули води  $p = 6,25 \cdot 10^{-30} \text{ Кл} \cdot \text{м}$  і знаходяться молекули на відстані  $r = 20 \text{ \AA}$ .

**2.106.** Маленька кулька, яка заряджена зарядом  $q = 3,2 \text{ нКл}$ , знаходиться на відстані  $r = 4 \text{ см}$  від плоскої металевої стінки, яка заземлена. З якою силою вони взаємодіють?

**2.107.** Дві провідні пластини, площа кожної з яких  $300 \text{ см}^2$ , знаходяться в гасі на відстані  $d = 3 \text{ мм}$  одна від одної. З якою силою вони взаємодіють, якщо вони заряджені до різниці потенціалів  $U = 100 \text{ В}$ .

**2.108.** Конденсатор складається із трьох провідних пластинок, площа кожної з яких  $S = 8 \text{ см}^2$ , розділені двома шарами слюди, товщина яких  $d = 0,1 \text{ мм}$ . Крайні провідні пластини з'єднані між собою провідником. Визначити ємність такого конденсатора.

**2.109.** Два однакових металевих диски, діаметри яких  $D = 15 \text{ см}$ , розташовані паралельно один до одного і розділені

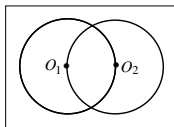


Рис.2.39.

парафінованим папером, товщина якого  $d = 0,3$  мм. Диски зсунуті так, що центр одного із них знаходиться на краю іншого (рис.2.39). Визначити ємність такої системи.

**2.110.** Металева кулька, радіус якої  $R = 6$  см, занурена наполовину в гас і заряджена до потенціалу  $U = 1000$  В. Який заряд знаходиться на кульці?

**2.111.** Визначити ємність конденсатора, який складається із двох металевих кульок, радіуси яких  $R = 1$  см, а відстань між їхніми центрами  $l = 22$  см. Вважати, що кульки знаходяться у повітрі, а заряди на поверхнях кульок розподіляються рівномірно.

**2.112.** а) Визначити ємність конденсатора, який складається із металевої кульки, радіус якої  $R = 1$  см, і великої провідної пластини, яка знаходиться на відстані  $l = 22$  см від центра кульки.

б) Порівняти цю ємність із ємністю ізольованої кульки.

**2.113.** Паралельно одному із п'яти послідовно з'єднаних однакових конденсаторів під'єднаний статичний вольтметр, ємність якого у два рази менша кожного із конденсаторів. Вольтметр показує напругу  $U = 400$  В. Знайти напругу на всій батареї конденсаторів.

**2.114.** Напруга пробоя для діелектрика, товщина якого 1 мм, дорівнює 18000 В. Два конденсатори з ізолюючим шаром із такого діелектрика, один ємністю 1100 пФ, другий ємністю 400 пФ, з'єднані послідовно. Чи буде ця батарея пробита, якщо на неї подати напругу 30000 В?

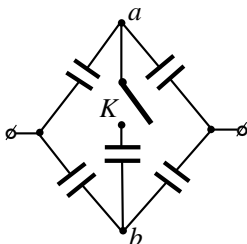
**2.115.** Визначити ємність плоского конденсатора з площею обкладок  $S = 150$  см<sup>2</sup>. Між обкладками знаходяться скло, товщина якого  $d_1 = 2$  мм, яке покрите з обох сторін шаром парафіну, товщина якого  $d_2 = 0,3$  мм.

**2.116.** Визначити ємність двох довгих паралельних проводів, які натягнуті на відстані  $l = 15$  см один від одного. Довжина і радіус проводів  $L = 1$  км і  $R = 3$  мм, відповідно.

**2.117.** Як зміниться ємність системи, яка описана в задачі 2.116, якщо один із проводів замінити заземленою широкою

металевою пластиною такої ж довжини? Напрямок пластини перпендикулярний до площини, в якій були розташовані проводи.

**2.118.**



Є система конденсаторів, з'єднаних так як показано на рисунку. Збільшиться чи зменшиться ємність системи, якщо замкнати ключ  $K$ ?

**2.119.** Повітряний конденсатор заряджається до деякої напруги і в зарядженому стані заливається гасом, із-за чого енергія конденсатора зменшується в  $\epsilon$  раз. Куди дівається частина енергії?

**2.120.** Розрахувати густину енергії електричного поля в атомі водню в точці, що знаходиться посередині між протоном і електроном. Радіус атома водню  $r = 0,53 \cdot 10^{-10}$  м.

**2.121.** Провідна куля, діаметр якої  $d = 5$  см, заряджена зарядом  $q = 4 \cdot 10^{-8}$  Кл. Куля занурена в гас і розміщена на значній відстані від стінок посудини. Визначити густину енергії електричного поля в точках, які знаходяться на відстанях: а)  $r_1 = 2$  см; б)  $r_2 = 3$  см від центра кулі.

**2.122.** Дуже маленьку кульку, яка має заряд  $q = 3,2 \cdot 10^{-10}$  Кл, піднесли до великого металевого листа на невелику відстань  $d = 1$  см. Визначити напруженість поля  $E$ : 1) в основі перпендикуляра, який опущений із кульки на площину листа; 2) на відстані  $2d$  від площини на тому ж перпендикулярі.

**2.123.** Металева кулька, радіус якої  $R_1 = 1,0$  см, має заряд  $0,12$  нКл. Її з'єднують довгою тонкою дротиною з металевою кулькою, радіус якої  $R_2 = 2,0$  мм. Знайти поверхневі густини заряду на кульках та напруженості електричного поля біля їх поверхонь після з'єднання.

**2.124.** Металева кулька, радіус якої  $R_1 = 5$  мм, заряджена до потенціалу  $\varphi_0 = 90$  В. Її з'єднують довгою тонкою дротиною з незарядженою металевою сферичною оболонкою, радіус якої  $R_2 = 4,5$  см. Знайти потенціал кульки  $\varphi$  після з'єднання.

**2.125.** Розв'язати попередню задачу за умови, що кулька знаходиться всередині оболонки й спочатку не контактує з нею.

**2.126.** До конденсатора  $C_1 = 25$  мкФ, який заряджений до напруги  $U_0 = 100$  В, приєднали незаряджений конденсатор  $C_2 = 100$  мкФ. Знайти, яку енергію  $W_2$  при цьому отримав конденсатор  $C_2$ , та яку енергію  $W$  втратив конденсатор  $C_1$ . Відповідь пояснити.

**2.127.** Яким способом заряджений провідник може віддати весь свій заряд іншому ізольованому провіднику?

**2.128.** Як відомо, заряджена кулька притягує папірець. Як зміниться сила притягання, якщо оточити концентрично металевою сферою заряджену кульку або папірець?

**2.139.** Маленька металева кулька заряджена до потенціалу  $\varphi_1 = +1$  В. Її вносять всередину великої пустої металевої сфери, яка заряджена до потенціалу  $\varphi_2 = 10$  кВ, і торкаються кулькою поверхні сфери. Пояснити протиріччя, яке начебто має місце: перехід позитивного заряду відбувається в напрямку від більш низького потенціалу до більш високого, тоді як повинно все відбуватися навпаки.



### 3. ЗАКОНИ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

#### 3.1. Питання теми:

1. Електричний струм та основні його характеристики.
2. Закони Ома.
3. Визначення сили струму, напруги та опору в електричних колах.
4. Розгалужені електричні кола. Правила Кірхгофа.

#### 3.2. Основні визначення та формули

1. Сила струму – це кількість заряду, що проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.1)$$

Сила струму вимірюється в Амперах (А). Сила струму дорівнює 1А, якщо через поперечний переріз провідника за одну секунду проходить заряд один Кулон. Зауважимо, що одиниця сили струму один Ампер встановлюється із магнітної взаємодії провідників зі струмом.

2. Густина струму  $j$  є векторна фізична величина, яка чисельно дорівнює силі струму, що протікає через одиничну площу поперечного перерізу провідника. Переріз вважається перпендикулярним до напрямку протікання струму.

$$j = \frac{dI}{dS}. \quad (3.2)$$

Густина струму вимірюється в одиницях: А/м<sup>2</sup> або в похідних одиницях, наприклад: мА/мм<sup>2</sup>.

3. Опір  $R$  однорідного провідника, довжина якого  $l$ , а площа поперечного перерізу  $S$  розраховується за формулою:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.3)$$

де  $\rho$  – питомий опір матеріалу провідника, тобто опір провідника, для якого  $l = 1$  м, а  $S = 1$  м<sup>2</sup>. Питомий опір залежить від якості кристалічної структури провідника, кількості домішок (інші атоми хімічних речовин порівняно з атомами матеріалу провідника) в провіднику, температури провідника. Для чистих (без домішок) провідників (металів) залежність питомого опору від температури лінійна, тобто

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (3.4)$$

де  $\rho_0$  – питомий опір при  $t = 0$  °С,  $\alpha = \frac{d\rho}{\rho_0 dt}$  – температурний коефіцієнт опору, значення якого для різних металів приводиться у справочних таблицях. Питома електропровідність

$$\sigma = 1/\rho. \quad (3.5)$$

4. Електрорушійна сила (е.р.с.)  $\mathcal{E}$  – це робота сторонніх сил  $A_{cm}$ , які мають не електростатичну природу, по переміщенню одиничного позитивного заряду в колі:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{cm}}{q}. \quad (3.6)$$

Одиниця вимірювання е.р.с. – Вольт.

5. Закон Ома для однорідної ділянки кола, яка не містить електрорушійної сили (е.р.с.):

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \text{ або } I = \frac{U}{R}, \quad (3.7)$$

де  $I$  – сила струму пропорційна різниці потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  (або напрузі  $U$ ) на кінцях ділянки (провідника) і обернено пропорційна опору  $R$  провідника.

6. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола, яка містить е.р.с. (узагальнений закон Ома):

$$I = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \sum_i \mathcal{E}_i}{R_{12}}, \quad (3.8)$$

де  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \sum_i \mathcal{E}_i$  – спад напруги на даній ділянці кола 1–2,  $\varphi_1 - \varphi_2$  – різниця потенціалів на кінцях ділянки кола,

$\sum_i \varepsilon_i$  – алгебраїчна сума\* усіх е.р.с на цій ділянці кола,  $R_{12} = \sum_k R_k$  – загальний опір ділянки кола.

**7.** Закон Ома для замкнутого кола (кінці ділянки 1–2 з’єднані між собою і як наслідок  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ):

$$I = \frac{\sum_i \varepsilon_i}{\sum_k R_k}, \quad (3.9)$$

де  $\sum_i \varepsilon_i$  – алгебраїчна сума\* усіх е.р.с., які діють у колі,  $\sum_k R_k$  – повний опір кола, який включає і внутрішні опори е.р.с.

**8.** Закон Ома у диференційній формі (для точки провідника):

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}_\kappa + \vec{E}_{cm}), \quad (3.10)$$

де  $\vec{E}_\kappa$  – вектор напруженості кулонівського електричного поля,  $\vec{E}_{cm}$  – вектор напруженості сторонніх сил, що діють на носії заряду,  $\vec{j}$  – вектор густини струму,  $\sigma$  – електропровідність для даної точки провідника.

**9.** Вектор густини струму для металів

$$\vec{j} = en\vec{v}_{dr}, \quad (3.11)$$

де  $e$  – заряд електрона,  $n$  – концентрація електронів,  $\vec{v}_{dr}$  – середня швидкість направленого руху електронів (або дрейфова швидкість).

**10.** Перше правило Кірхгофа – алгебраїчна сума струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю (це правило є наслідком закону збереження заряду):

$$\sum_k I_k = 0. \quad (3.12)$$

**11.** Друге правило Кірхгофа – алгебраїчна сума\*\* спадів напруг для замкнутого контура (кола) дорівнює алгебраїчній сумі\*\* е.р.с., що діють у контурі:

$$\sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i. \quad (3.13)$$

**12.** Потужність струму на ділянці кола 1–2:

$$P = IU_{12} = I(\varphi_1 - \varphi_2 + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i). \quad (3.14)$$

13. Теплова потужність  $P_Q$  на даній ділянці кола 1 – 2:

$$P_Q = I^2 R_{12}. \quad (3.15)$$

14. Питома потужність струму  $P_{\text{пит}}$ :

$$P_{\text{пит}} = j(\vec{E}_k + \vec{E}_{cm}), \quad (3.16)$$

де  $\vec{E}_k$  – напруженість електростатичних кулонівських сил,  $\vec{E}_{cm}$  – напруженість сторонніх сил.

15. Питома тепла потужність струму  $Q_{\text{питом}}$ :

$$Q_{\text{питом}} = \rho j^2. \quad (3.17)$$

Питома потужність – це кількість енергії, що виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу. Питома потужність вимірюється в таких одиницях: Дж/(м<sup>3</sup>·с) або Вт/м<sup>3</sup>.

\* Знак е.р.с. на даній ділянці кола або в замкненому колі визначається за правилом, яке розглядається в методичних вказівках до даної теми.

\*\* Правило визначення знаків напруги і е.р.с. розглядається у методичних вказівках до даної теми.

### 3.3. Питання на самопідготовку

1. Визначення струму. Умови існування струму провідності. Характеристики струму.

2. Причини існування електричного опору металів.

3. Визначення електрорушійної сили сторонніх сил. В чому різниця між е.р.с. та різницею потенціалів?

4. Закон Ома в інтегральній та диференціальній формах для неоднорідної ділянки кола.

5. Закон Ома в інтегральній та диференціальній формах для однорідної ділянки кола.

6. Закон Ома для замкнутого кола.

7. Вектор густини струму. Дрейфова швидкість носіїв заряду та її фізичний зміст.

8. Перше правило Кірхгофа. На основі якого фізичного закону воно базується?

9. Друге правило Кірхгофа. На основі якого фізичного закону воно базується?

10. Потужність та теплова потужність струму на ділянці кола.

### 3.4. Методичні вказівки

Задачі даної теми присвячені застосуванню законів постійного електричного струму: законів Ома, правил Кірхгофа та закону Джоуля-Ленца.

1. При використанні узагальненого закону Ома (3.8) в інтегральній формі

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_i$$

необхідно звернути увагу на принципіальну відмінність між різницею потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$ , електрорушійною силою  $\mathcal{E}$  і напругою  $U_{12} = IR_{12}$ . Кожна із цих величин визначається як питома робота  $A/q$  електричного поля. Але різниця потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  – це робота кулонівського потенційного поля  $\vec{E}_k$ , яка не залежить від

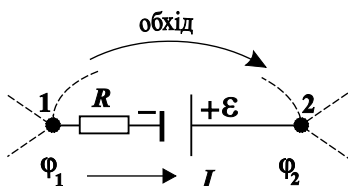


Рис. 3.1

шляху інтегрування. Електрорушійна сила – робота непотенційного стороннього поля  $\vec{E}_{cm}$  (локалізованого всередині джерела) і тому залежить від шляху інтегрування. Під напругою розуміють питому роботу  $A/q$

результуючого електричного поля ( $\vec{E} = \vec{E}_k + \vec{E}_{cm}$ ) і згідно узагальненого закону Ома вона дорівнює добутку сили струму на повний опір ділянки кола 1–2 (рис.3.1). Таким чином, напруга повинна залежати від шляху інтегрування, тому на паралельних ділянках кола, які містять різні джерела е.р.с., добуток  $IR$  буде теж різним.

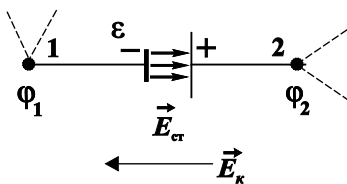


Рис. 3.2

2. При використанні узагальненого закону Ома і другого правила Кірхгофа рекомендується дотримуватися наступного правила знаків: добуток  $IR$  береться із знаком «+», якщо напрямок струму (який задаємо) співпадає з вибраним

напрямком обходу ділянки 1–2 кола або контуру.

Окремо розглянемо джерело е.р.с.  $\mathcal{E}$  (рис.3.2). Всередині любого джерела існує стороннє електричне поле  $\vec{E}_{cm}$ , під дією якого на полюсах джерела відбувається накопичення зарядів протилежних знаків. Вектор  $\vec{E}_{cm}$  направлений завжди від «-» до «+». Кулонівське поле  $\vec{E}_k$  створюється зарядами, що накопичились на полюсах джерела. Якщо в колі не має інших джерел, то кулонівське поле  $\vec{E}_k$  направлене назустріч сторонньому  $\vec{E}_{cm}$ , причому

$$\vec{E}_k \leq \vec{E}_{cm}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 \leq \mathcal{E}.$$

Очевидно, знак рівності відповідає розімкненому колу.

При наявності інших джерел в колі різниця потенціалів  $\varphi_2 - \varphi_1$  може бути і менша, і більша, ніж е.р.с.  $\mathcal{E}$ , може виявитись і від'ємною величиною. В останньому випадку  $\varphi_2 < \varphi_1$  і вектори  $\vec{E}_k$  і  $\vec{E}_{cm}$  мають однаковий напрямок.

Напрямок струму, який протікає через джерела, визначається напрямком результуючого поля

$$\vec{E} = \vec{E}_k + \vec{E}_{cm}$$

(згідно закону Ома в диференціальній формі  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  формула (3.10)).

Враховуючи вище викладене, прийнято е.р.с.  $\mathcal{E}$  джерела в рівняннях закону Ома, чи правила Кірхгофа брати зі знаком «+», якщо напрямок  $\vec{E}_{cm}$  співпадає з вибраним напрямком обходу. Тобто можна вважати, що джерело  $\mathcal{E}$  діє від «+» зовні самого джерела (рис. 3.2). У виразі закону Ома (3.8)  $\varphi_1 - \varphi_2$  є різниця потенціалів між початковою і кінцевою точками ділянки кола, тобто знову ж таки залежить від вибраного напрямку обходу.

### **Правила при користуванні законом Ома для неоднорідної ділянки кола:**

- 1) довільно вибрати обхід ділянки;
- 2) початок ділянки (точка 1) вважати такою, що має потенціал  $\Phi_1$ , а кінець ділянки (точка 2) такою, що має потенціал  $\Phi_2$ ;
- 3) якщо напрямок струму на ділянці не вказаний, то вибрати його довільно (за або проти обходу). Струм, напрямок якого співпадає з обходом в рівнянні (3.8) приймати зі знаком «+», струм, напрямок якого не співпадає з обходом в рівнянні (3.8) брати зі знаком «-»;
- 4) знак е.р.с.  $\mathcal{E}$  в рівнянні (3.8) визначається так, як написано вище. Якщо при обході на ділянці кола спочатку зустрічається негативний полюс джерела, а потім – позитивний, то така е.р.с. в рівнянні (3.8) береться зі знаком «+». В протилежному випадку – зі знаком «-». Якщо в результаті розрахунку значення струму буде число зі знаком «-», то це означатиме, що попередній вибір напрямку струму необхідно змінити на протилежний.

### **Правила при використанні правил Кірхгофа до розрахунку розгалужених електричних кіл:**

- 1) визначити вузли та замкнуті контури електричних кіл;
- 2) вибрати (довільно) напрямки струмів на всіх ділянках замкнутого контуру позначивши їх стрілочками;
- 3) записати перше правило Кірхгофа (3.12) для всіх незалежних вузлів. Вважати струми, що входять у вузол – додатніми, а струми, що виходять із вузла, – від'ємними. Число незалежних рівнянь складених за (3.12) на одиницю менше числа вузлів;
- 4) вибрати напрям обходу замкнутого контуру (за годинниковою стрілкою чи проти);
- 5) при складанні рівнянь за другим правилом Кірхгофа (3.13) знаки струмів і е.р.с. на ділянках замкнутого контуру вибирати згідно правил користування законом Ома для неоднорідної ділянки кола (пункти 3) і 4));
- 6) щоб усі рівняння, які складені на основі другого правила Кірхгофа, були незалежними, необхідно кожен раз розглядати

контури, що містять хоча б одну ділянку кола, що не входила у вже розглянуті контури;

7) якщо деякі розв'язки складених рівнянь на основі правил Кірхгофа є від'ємними, то це означає, що напрямки струмів на ділянках кола, або полярність включення цих е.р.с. треба змінити на протилежні.

**3. Закон Ома в диференціальній формі (3.10) рекомендується використовувати для розрахунку струмів і опорів при наявності провідних безмежних середовищ. Важливим є те, що напруженість електричного поля  $E$  при наявності струму можна розрахувати методом електростатики. Це можливо тому, що напруженість електричного поля при сталій напрузі між електродами не залежить від того, чи провідне чи непровідне середовище між ними.**

### 3.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 3.1.** Сила струму в провіднику зменшується від 36 А до нуля, причому через кожні 0,005с вона зменшується у три рази. Яка кількість електрики переноситься через поперечний переріз провідника при цьому?

**Розв'язок.** Згідно визначення сили струму (3.1.), кількість електрики, що переноситься струмом за проміжок часу від  $t$  до  $t+dt$ , дорівнює

$$dq = Idt.$$

Тоді кількість електрики, що переноситься струмом, можна визначити за загальною формулою:

$$q = \int I(t)dt,$$

де  $I(t)$ – залежність сили струму від часу.

Для умови нашої задачі можемо записати, що

$$I(t) = 36 \cdot 3^{-200t} \text{ А.}$$



Тоді

$$q = 36 \int_0^{\infty} 3^{-200t} dt = -36 \cdot \frac{3^{-200t}}{200 \ln 3} \Big|_0^{\infty} = \frac{36}{200 \ln 3} = 0,164 \text{ Кл.}$$

**Задача 3.2.** Для вимірювання опору ізоляції в проводах, які знаходяться під напругою, вимірюють за допомогою вольтметра з великим внутрішнім опором  $R$  напругу: 1) між першим і другим проводами ( $U$ ); 2) між першим проводом і землею ( $U_1$ ); 3) між другим проводом і землею ( $U_2$ ). Визначити опори ізоляції першого і другого проводів відносно землі  $R_1$  і  $R_2$  при таких даних:  $R = 20 \text{ кОм}$ ;  $U = 120 \text{ В}$ ;  $U_1 = 8 \text{ В}$ ;  $U_2 = 10 \text{ В}$ .

**Розв'язок.** Процес вимірювання опору ізоляції представлений на рис. 3.3, а, б і в.

Для рис.3.3,б струм через опір  $R_2$  згідно (3.7) можемо записати як

$$I_2 = \frac{U_1}{\frac{R_1 R}{R_1 + R}} = \frac{U}{R_2 + \frac{R_1 R}{R_1 + R}}, \quad (1)$$

а через опір  $R_1$  (рис. 3.3,в) –

$$I_1 = \frac{U_2}{\frac{R_2 R}{R_2 + R}} = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R}}. \quad (2)$$

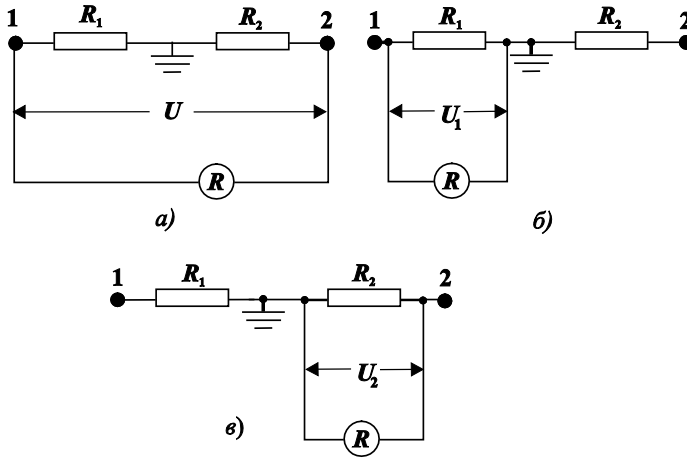
Після алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$\frac{R_1 R}{U_1} = \frac{R_2 R_1 + R(R_1 + R_2)}{U}, \quad (1')$$

$$\frac{R_2 R}{U_2} = \frac{R_2 R_1 + R(R_1 + R_2)}{U}. \quad (2')$$

Праві частини співвідношень (1') і (2') однакові, тому однакові і їхні ліві частини. Тобто

$$R_2 = \frac{U_2}{U_1} R_1. \quad (3)$$



**Рис. 3.3**

На рис.3.3 такі позначення: 1 – перший провід, 2 – другий провід,  $R_1$  – опір ізоляції між першим проводом і землею,  $R_2$  – опір ізоляції між другим проводом і землею,  $R$  – внутрішній опір вольтметра. Проводи направлені перпендикулярно до площини рис.3.3.

Підставимо (3) в (1') і отримаємо, що

$$R_1 = \frac{R(U - U_1 - U_2)}{U_2} = 204 \text{ кОм.} \quad (4)$$

Підставимо (4) в (3) і знайдемо, що

$$R_2 = \frac{R(U - U_1 - U_2)}{U_1} = 255 \text{ кОм.}$$

**Задача 3.3.** Визначити різницю потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  на затискачах джерела е.р.с. ( $\mathcal{E} = 4,2 \text{ В}$ ; внутрішній опір  $r = 0,2 \text{ Ом}$ ), який включений в деяке коло. Напрямки струмів, що протікають через джерело, показані на рис.3.4 а, б, в ( $I_1 = 0$ ;  $I_2 = 1 \text{ А}$ ;  $I_3 = 4 \text{ А}$ ).

**Розв'язок.** Для запису рівняння на основі закону Ома (3.8) виберемо напрямок обходу ділянки кола від точки 1 до точки 2. Тоді

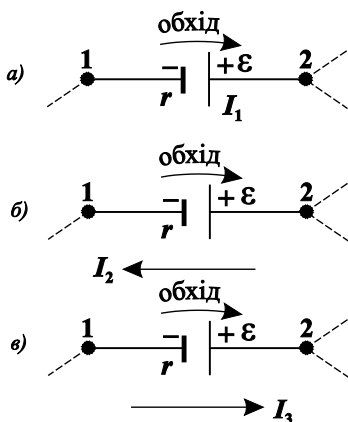


Рис. 3.4

для першого випадку **а)** ( $I_1 = 0$ ) (3.8) запишеться так:

$$0 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{r}.$$

Звідки знаходимо, що

$\varphi_1 - \varphi_2 = -\varepsilon = -4,2$  В. Для випадку

**б)** ( $I_2 = 1$  А) (3.8) запишеться так:

$$-I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{r}.$$

Звідки  $\varphi_1 - \varphi_2 = -I_2 r - \varepsilon =$

$$= (-0,2 - 4,2) \text{ В} = -4,4 \text{ В}.$$

Для третього випадку **в)** ( $I_3 = 4$  А) (3.8) запишеться так:

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{r}.$$

Звідки

$$\varphi_1 - \varphi_2 = I_3 r - \varepsilon = (0,8 - 4,2) \text{ В} = -3,4 \text{ В}.$$

**Аналіз отриманих результатів.** В першому випадку **а)**  $I = 0$ , це означає, що сумарне електричне поле

$$\vec{E} = \vec{E}_k + \vec{E}_{cm} = 0.$$

Значить,

$$\vec{E}_k = \vec{E}_{cm} \text{ і } \varphi_1 - \varphi_2 = -\varepsilon.$$

Це може бути як при розімкнутому колі, так і при наявності в колі ще одного джерела з е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = \varepsilon$ , яке включене назустріч джерелу  $\varepsilon$  ( $\mathcal{E}_1$  і  $\varepsilon$  з'єднані однойменними полюсами).

Для другого **випадку б)**, судячи із напрямку струму  $I_2$ , результуючий вектор  $\vec{E} = \vec{E}_k + \vec{E}_{cm}$  і вектор  $\vec{E}_{cm}$  мають протилежні напрямки (методичні вказівки). Значить кулонівське поле протилежне сторонньому, тобто  $\vec{E}_k > \vec{E}_{cm}$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1 > \varepsilon$ . Це справедливо при наявності в колі хоча би ще одного джерела  $\mathcal{E}_1$ , яке включене назустріч джерелу  $\varepsilon$ ; очевидно, що  $\mathcal{E}_1 > \varphi_2 - \varphi_1$ . В третьому

**випадку  $\vartheta$** ), судячи із напрямку струму  $I_3$ , результуючий вектор  $\vec{E}$  і вектор  $\vec{E}_{cm}$  мають однаковий напрямок, хоч вектор  $\vec{E}_\kappa$  і вектор  $\vec{E}_{cm}$  мають протилежні напрямки. Це означає, що  $\vec{E}_\kappa < \vec{E}_{cm}$ , тобто  $\varphi_2 - \varphi_1 < \mathcal{E}$ . Це має місце тоді, коли зовнішнє коло складається тільки із навантаження.

Кулонівське поле  $\vec{E}_\kappa$  може мати такий же напрямок як і стороннє поле  $\vec{E}_{cm}$ . Для цього в колі повинно бути ще одне джерело е.р.с. включене послідовно (узгоджено) з джерелом  $\mathcal{E}$ .

**Задача 3.4.** В кінці зарядки акумулятора при силі струму в колі  $I_1 = 1$  А показ вольтметра, був  $U_1 = 12,40$  В (рис.3.5,а). Коли акумулятор замкнули накоротко (процес розрядки), то на початку розрядки при силі струму в колі  $I_2 = 9$  А показ вольтметра був  $U_2 = 12,00$  В (рис.3.5,б). Визначити е.р.с.  $\mathcal{E}$  і внутрішній опір  $r$  акумулятора.

**Аналіз.** Акумулятори є багаторазовими хімічними джерелами струму. На протязі роботи вони поступово розряджаються, тобто їхня е.р.с. зменшується. Акумулятори можуть бути знову заряджені при пропусканні електричного струму від зовнішнього джерела в напрямку, протилежному сторонньому полю акумулятора. В кінці зарядки, так же як і на початку розрядки, можна вважати, що е.р.с. акумулятора має максимальне номінальне значення, яке необхідно визначити.

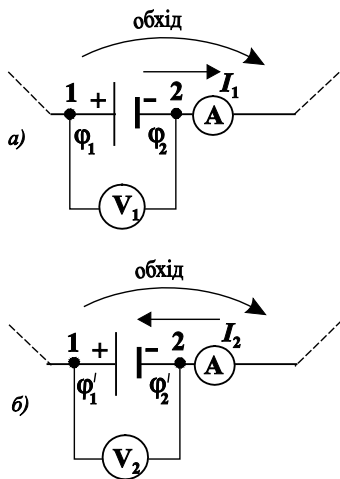


Рис.3.5

В умові задачі відомі покази вольтметра, який підключений до затискачів акумулятора. Вольтметр, який включений в коло, завжди показує напругу на самому собі, яка дорівнює різниці потенціалів між точками, до яких він підключений. В даному випадку покази вольтметра

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

(при умові, що  $\varphi_1 > \varphi_2$ ). Внутрішній опір вольтметра не заданий, тому будемо вважати, що він настільки великий порівняно із опорами всіх елементів кола, що силою струму, який протікає через вольтметр можна знехтувати. Тоді сила струму, який протікає через акумулятор, дорівнює заданому значенню  $I_1$  (при розряді  $I_2$ ).

При зарядці акумулятора, коли струм  $I_1$  направлений так, як показано на рис.3.5,а  $\varphi_1 - \varphi_2 > \mathcal{E}$ . При розрядці струм  $I_2$  направлений в протилежну сторону і  $\varphi_1 - \varphi_2 < \mathcal{E}$ . Значить е.р.с. акумулятора повинна задовільняти умові:

$$U_2 < \mathcal{E} < U_1.$$

**Розв'язок.** Застосуємо узагальнений закон Ома (3.8) до ділянки кола 1- $\mathcal{E}$ -2.

При зарядці

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E}}{r}, \quad (1)$$

при розрядці

$$-I_2 = \frac{\varphi'_1 - \varphi'_2 - \mathcal{E}}{r}, \quad (2)$$

де  $U_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ , а  $U_2 = \varphi'_1 - \varphi'_2$ .

Розв'язок системи рівнянь (1) і (2) дає:

$$r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2} = 0,04 \text{ Ом}, \quad \mathcal{E} = \frac{U_1 I_2 + U_2 I_1}{I_1 + I_2} = 12,36 \text{ В}.$$

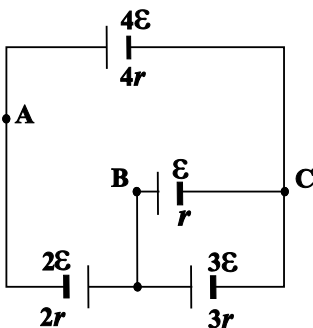


Рис. 3.6

**Задача 3.5.** Визначити різницю потенціалів між точками А і В ( $\varphi_A - \varphi_B$ ) і точками А і С ( $\varphi_A - \varphi_C$ ) для схеми, приведеної на рис.3.6. Електрорушійні сили та внутрішні опори батарей вказані на рисунку. Прийняти, що  $\varepsilon = 1,5$  В.

**Розв'язок.** Дану електричну схему нарисуємо дещо по іншому (рис.3.7). Скористаємось правилами Кірхгофа

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad (1)$$

$$rI_1 - 3rI_2 = -\varepsilon + 3\varepsilon, \quad (2)$$

$$3rI_2 + 6rI_3 = -3\varepsilon + 4\varepsilon + 2\varepsilon, \quad (3)$$

$$I_3 = \frac{\varphi_A - \varphi_B + 2\varepsilon}{2r}, \quad (4)$$

$$I_3 = \frac{\varphi_C - \varphi_A + 4\varepsilon}{4r}, \quad (5)$$

Розв'язками системами рівнянь (1), (2) і (3) будуть:

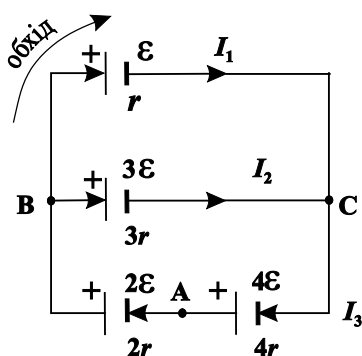


Рис. 3.7

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r}; \quad I_2 = -\frac{\varepsilon}{3r}; \quad I_3 = \frac{2\varepsilon}{3r}.$$

Підставимо значення сили струму  $I_3$  в рівняння (4) і (5) і знайдемо, що

$$\varphi_A - \varphi_B = -\frac{2}{3}\varepsilon = -1\text{В},$$

$$\varphi_A - \varphi_C = \frac{4}{3}\varepsilon = 2\text{В}.$$

**Задача 3.6.** Три джерела с е.р.с.  $\varepsilon_1 = 9$  В,  $\varepsilon_2 = 6$  В,  $\varepsilon_3 = 3$  В і

внутрішніми опорами  $r_1 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  
 $r_2 = 0,3 \text{ Ом}$  і  $r_3 = 0,2 \text{ Ом}$ ,  
 відповідно, з'єднані так як показано  
 на рис.3.8 і замкнені на опір  
 $R = 4 \text{ Ом}$ . Визначити різниці  
 потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B$  і  $\varphi_B - \varphi_C$ .

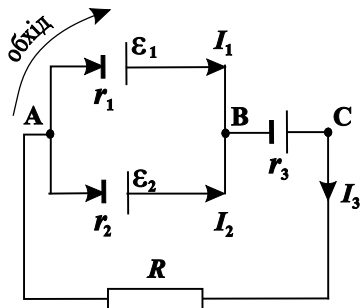


Рис. 3.8

**Аналіз.** Невідомі різниці потенціалів можуть бути знайдені із узагальненого закону Ома (3.8), якщо його застосувати до ділянок  $A - \varepsilon_1 - B$ , (або  $A - \varepsilon_2 - B$ ) і  $B - \varepsilon_3 - C$ . Але для цього необхідно знайти сили струмів на цих ділянках кола. Ці сили струмів знайдемо за допомогою правил Кірхгофа, застосування яких виконаємо згідно методичних вказівок.

**Розв'язок.** Позначимо довільно напрямки струмів на ділянках  $A - \varepsilon_1 - B$ ,  $A - \varepsilon_2 - B$ ,  $B - \varepsilon_3 - R - A$  (рис.3.8). Застосуємо перше правило Кірхгофа (3.12) до вузла B і друге правило Кірхгофа (3.13) до контурів  $A - \varepsilon_1 - B - \varepsilon_2 - A$  і  $A - \varepsilon_1 - B - \varepsilon_3 - R - A$ :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

$$I_1 r_1 - I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

$$I_1 r_1 + I_3 (r_3 + R) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3.$$

Після підстановки числових значень отримаємо систему рівнянь:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad (1)$$

$$0,5 I_1 - 0,3 I_2 = 3, \quad (2)$$

$$0,5 I_1 + 4,2 I_3 = 12. \quad (3)$$

Розв'язки системи рівнянь (1), (2), (3) дають, що

$$I_1 = \frac{540}{117} \text{ А}, I_2 = -\frac{270}{117} \text{ А}, I_3 = \frac{270}{117} \text{ А}.$$

Знак «-» перед числовим значенням струму вказує на те, що в реальній схемі, яка приведена на рис.3.8 струм  $I_2$  буде текти в протилежному напрямку по відношенню до напрямку, який вказаний рис.3.8. Коли струм на неоднорідних ділянках  $A - \varepsilon_1 - B$ ,

$B - \varepsilon_2 - A$ ,  $B - \varepsilon_3 - C$  відомі, тепер за законом Ома (3.8)

запишемо згідно методичних вказівок:

$$I_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_B + \varepsilon_1}{r_1},$$

$$-I_2 = \frac{\varphi_B - \varphi_A - \varepsilon_2}{r_2},$$

$$I_3 = \frac{\varphi_B - \varphi_C + \varepsilon_3}{r_3}.$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо:

$$\frac{540}{117} = \frac{\varphi_A - \varphi_B + 9}{0,5}, \quad (4)$$

$$\frac{270}{117} = \frac{\varphi_B - \varphi_A - 6}{0,3}, \quad (5)$$

$$\frac{270}{117} = \frac{\varphi_B - \varphi_C + 3}{0,2}. \quad (6)$$

Із (4), (5), (6) знаходимо:

$$\varphi_A - \varphi_B = -\frac{783}{117} \text{ В}, \quad \varphi_B - \varphi_C = -\frac{297}{117} \text{ В}.$$

**Задача 3.7.** У схемі (рис.3.9) вольтметр вимірює напругу на опорі  $R_2 = 300 \text{ кОм}$ . Використання вольтметра змінює дійсну напругу на опорі  $R_2$ . Яким мав би бути опір вольтметра, щоб похибка вимірювання напруги на опорі  $R_2$  була не більша, ніж 2%? Напругу  $U$  підтримують постійною, опір  $R_1 = 100 \text{ кОм}$ .

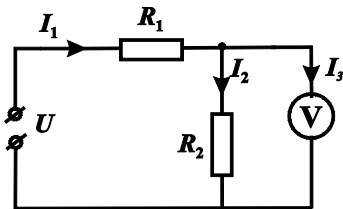


Рис. 3.9

Струм через опір  $R_1$  буде

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_0}. \quad (1)$$



Врахувавши, що  $I_1 = I_2 + I_3$  і  $I_2 R_2 = I_3 R_V$ , де  $I_2$  – струм через опір  $R_2$ , а  $I_3$  – струм через вольтметр, знаходимо за допомогою (1), що

$$I_2 = \frac{UR_V}{(R_1 + R_0) \cdot (R_2 + R_V)}. \quad (2)$$

Тоді знаходимо ту напругу, яку покаже нам вольтметр, а саме:

$$U_2 = I_2 R_2 = U_V = \frac{UR_V R_2}{(R_1 + R_0) \cdot (R_2 + R_V)}. \quad (3)$$

Дійсне значення напруги на опорі вольтметр показував би в тому випадку, якщо б  $R_V = \infty$  Ом. Тоді  $I'_1 = I'_2$  і

$$I'_1 = \frac{U}{R_1 + R_2},$$

а значить

$$U'_2 = I'_1 R_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}. \quad (4)$$

Відносна похибка вимірювання напруги на опорі  $R_2$  згідно умови задачі буде:

$$\delta = \frac{|U_2 - U'_2|}{U'_2} \cdot 100 \% \leq 2 \%. \quad (5)$$

Після підстановки формул (3), (4) в (5) і нескладних алгебраїчних перетворень отримаємо, що

$$R_V \geq \frac{0,98 R_1 R_2}{0,02(R_1 + R_2)} \geq 3675 \text{ кОм}.$$

**Задача 3.8.** В розчині мідного купоросу ( $\rho = 40$  Ом·см) струм протікає між двома мідними прямими проводами, осі яких розташовані паралельно одна до одної на відстані  $l = 13$  см. Радіус проводу  $r = 4$  мм. Між проводами підтримується різниця потенціалів  $U = 12$  В. Визначити густину струму: а) посередині відстані між

проводами; б) в точці рівновіддаленій від осей обох проводів на відстань  $b = 10$  см; в) загальну силу струму між проводами, вважаючи, що довжини проводів однакові, дорівнюють  $l_1 = 15$  см і дорівнюють глибині шару розчину, а розміри посудини достатньо великі.

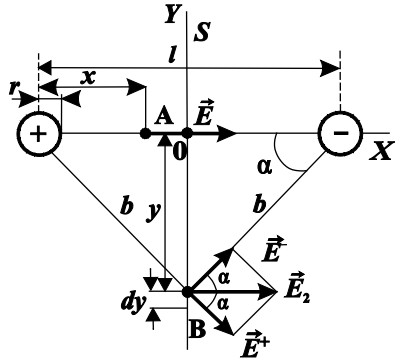


Рис. 3.10

**Аналіз.** Густина струму будемо знаходити за законом Ома в диференційній формі (3.10),  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , де  $\vec{E}$  – напруженість поля в заданій точці розчину,  $\sigma = 1/\rho$  – електропровідність розчину. Загальний струм між проводами будемо розраховувати за загальною формулою  $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ .

**Розв’язок.** Знайдемо напруженість електричного поля в точці А, що знаходиться на відстані  $x$  від одного із проводів (рис.3.10).

Будемо вважати, що лінійна густина заряду обох проводів однакова за величиною, різна за знаком і дорівнює  $\lambda$ . Скориставшись формулою (1.11), запишемо, що напруженість поля в точці А буде:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (l - x)}. \quad (1)$$

Тоді різницю потенціалів між проводами знайдемо за формулою (1.18), тобто

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \int_r^{l-r} \frac{dx}{x} + \int_r^{l-r} \frac{dx}{l-x} \right) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{l-r}{r}.$$

Звідки знаходимо, що лінійна густина заряду на проводі буде:

$$\lambda = \pi\epsilon_0 U / \ln \frac{l-r}{r}. \quad (2)$$

а) Напруженість електричного поля посередині між проводами (точка 0) знайдемо, підставивши (2) в (1) при умові, що  $x = l/2$ .

Тоді

$$E_1 = \frac{2U}{l \cdot \ln((l-r)/r)}, \quad (3)$$

а густина струму в цій точці

$$j_1 = \frac{E_1}{\rho} = \frac{2U}{\rho \cdot l \cdot \ln\left(\frac{l-r}{r}\right)} = \frac{2 \cdot 12}{0,4 \cdot 0,13 \cdot \ln\left(\frac{130-4}{4}\right)} \frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 0,0134 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}.$$

**б)** Точка В рівновіддалена від обох проводів на відстань  $b$ .

Напруженість поля в цій точці буде:

$$E_2 = 2E^+ \cdot \cos \alpha,$$

де  $E^+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 b}$  – напруженість поля, що створюється одним із проводів,  $\cos \alpha = l/(2b)$ . Тоді густина струму в точці буде:

$$j_2 = \frac{E_2}{\rho} = \frac{Ul}{2\rho b^2 \ln \frac{l-r}{r}}. \quad (4)$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$j_2 = 56,5 \text{ А/м}^2 = 0,00565 \text{ А/см}^2.$$

**в)** Щоб дати відповідь на третє питання задачі, необхідно вибрати площину  $S$ , через яку будемо шукати потік вектора  $\vec{j}$ . Цією площиною найбільше підходить площина, проведена посередині між проводами і перпендикулярна до площини, в якій знаходяться проводи. В кожній точці такої площини вектор напруженості поля  $\vec{E}$  перпендикулярний до площини. Це означає, що  $\vec{j} d\vec{S} = j dS$ . За елементарну площадку  $dS$  візьмемо смужку на площині  $S$  шириною  $dy$  і довжиною  $l_1$ , яка паралельна проводам. Цю смужку виберемо біля точки В, ординату якої будемо вважати  $y$  (рис.3.10). Тоді відстань  $b = \sqrt{y^2 + l^2/4}$ , а  $dS = l_1 dy$ .

З урахуванням формули (4) струм через таку смужку буде:

$$dI = j_2 dS = \frac{U l_1}{2\rho \ln \frac{l-r}{r}} \cdot \frac{dy}{y^2 + l^2/4},$$

а струм через всю площину:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} j_2 dS = \frac{U l_1}{2\rho \ln \frac{l-r}{r}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + l^2/4} = \\ &= \frac{U l_1}{\rho \ln \frac{l-r}{r}} \operatorname{arctg} \frac{2y}{l} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \frac{\pi U l_1}{\rho \ln \frac{l-r}{r}} = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 0,15}{0,4 \ln \frac{130-4}{4}} \text{ A} = 4,1 \text{ A}. \end{aligned}$$

**Задача 3.9.** Ізолюючий шар плоского конденсатора складається із двох шарів, товщини яких  $d_1$  і  $d_2$ , а діелектричні проникності  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$ , відповідно. Діелектрики мають питомі опори  $\rho_1$  і  $\rho_2$ . Конденсатор знаходиться під постійною напругою  $U$  (рис.3.11).

**а)** Показати, що у стаціонарному стані у випадку коли  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \neq \frac{\rho_2}{\rho_1}$ , на межі діелектриків повинні знаходитись вільні заряди.

**б)** Вирахувати різницю густини цих зарядів (для скла

$\rho_1 = 2 \cdot 10^{13}$  Ом·см, для гасу  $\rho_2 = 5 \cdot 10^{14}$  Ом·см), якщо  $d_1 = d_2 = 3$  мм і якщо повна напруга на конденсаторі  $U = 15$  кВ.

**в)** Пояснити, чому шаруваті конденсатори мають явище «залишкового заряду» (заряду, який появляється через деякий час після розрядки конденсатора).

**Розв'язок. а)** Згідно закону Ома (3.10) в шарах діелектриків

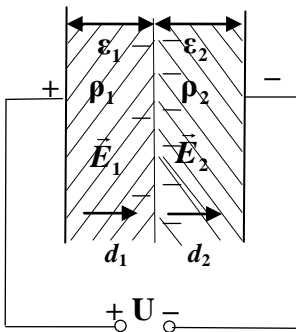


Рис. 3.11.

напруженості  $E_1$  і  $E_2$  такі, щоб  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (j_1 = j_2)$ . Ці напруженості відрізняються від напруженостей в шаруватому конденсаторі  $\frac{E'_1}{E'_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (D_1 = D_2)$ , якщо  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ . Внаслідок цього рівноважний стан встановиться тільки тоді, коли на межі діелектриків будуть знаходитись заряди, при яких буде мати місце співвідношення

$$\frac{E'_1}{E'_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

**б)** При рівновазі  $E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}$ , а  $E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}$ , де  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  густини дійсних зарядів на межі діелектриків.

Тому

$$\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_1 E_1 - \varepsilon_2 E_2). \quad (1)$$

Якщо  $U$  – повна напруга на конденсаторі, то  $U = E_1 d_1 + E_2 d_2$ . При виконанні закону Ома  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ . З цих двох співвідношень знаходимо, що

$$E_1 = \frac{U \rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}; E_2 = \frac{U \rho_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}. \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \varepsilon_0 U \frac{\rho_1 \varepsilon_1 - \rho_2 \varepsilon_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,5 \cdot 10^4 \cdot \\ &\cdot \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 7 - 5 \cdot 10^{12} \cdot 2}{(2 \cdot 10^{11} + 5 \cdot 10^{12}) \cdot 3 \cdot 10^{-3}} \text{ Кл/м}^2 = -73,2 \text{ мкКл/м}^2. \end{aligned}$$

**в)** Даний конденсатор можна розглядати як два послідовно з'єднані конденсатори. При розряді такого конденсатора зовнішні заряди на обкладинках конденсаторів переміщуються так, що на обкладинках залишаються однойменні заряди, сума яких дорівнює  $\Delta\sigma \cdot S$ , де  $S$  – площа пластин конденсатора.

Ці заряди на обкладинках в загальному випадку не є однаковими. Таким чином після розряду, отримуються як би два послідовно з'єднаних конденсатори, які заряджені в протилежних напрямках так, що їхні протилежні обкладки (тобто обкладки шаруватого конденсатора) мають однаковий потенціал. Ємності

конденсаторів різні, тому один із них розряджається швидше за іншого. Так появляється різниця потенціалів між обкладками шаруватого конденсатора і можливий розряд.

**Задача 3.10.** В схемі, яка показана на рис.3.12,  $\mathcal{E}_1 = 20$  В;  $\mathcal{E}_2 = 25$  В;  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 15$  Ом, внутрішні опори джерел струму нехтовно малі. Визначити: 1) роботу, яку виконують джерела, і повну кількість джоулевого тепла, що виділяється в колі, за проміжок часу  $\Delta t = 2$  с при  $R_3 = 82$  Ом; 2) при якому опорі  $R_3$ , потужність яка виділяється на ньому, буде максимальною. Визначити цю потужність.

**Аналіз.** Під роботою джерела розуміють роботу, яку виконують сили стороннього поля при переміщенні заряду через джерело за проміжок часу  $\Delta t$ . При постійній силі струму  $I$ , згідно визначенню електрорушійної сили (3.6), ця робота може бути розрахована за формулою

$$A = \mathcal{E}\Delta q = \mathcal{E}I\Delta t. \quad (1)$$

Очевидно, що коли напрямок струму співпадає з напрямком стороннього поля  $E_{cm}$ , ця робота буде позитивна. Кількість теплоти, яка виділяється на опорі  $R$  ділянки кола, визначається за формулою (3.15):

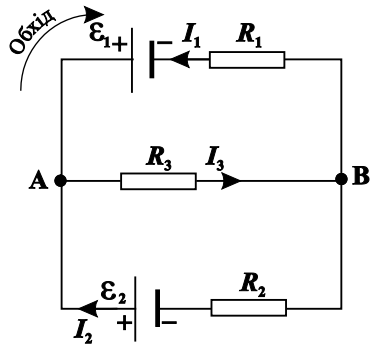


Рис. 3.12

$$Q = P_Q \cdot \Delta t = I^2 R \Delta t. \quad (2)$$

Таким чином, для розв'язку задачі необхідно знайти сили струму на всіх ділянках кола, для чого використаємо правила Кірхгофа (3.12), (3.13).

**Розв'язок.** 1. Скористаємось правилами використання правил Кірхгофа у методичних вказівках. Для вузла А і замкнутих контурів А– $\mathcal{E}_1$ –В– $R_3$ –А і А– $R_3$ –В– $\mathcal{E}_2$ –А згідно (3.12) і (3.13) складемо рівняння:

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &= 0, \\
-I_1 R_1 - I_3 R_3 &= -\mathcal{E}_1, \\
I_3 R_3 + I_2 R_2 &= \mathcal{E}_2.
\end{aligned}$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &= 0, \\
10I_1 + R_3 I_3 &= 20, \\
R_3 I_3 + 15I_2 &= 25.
\end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{110}{5R_3 + 30}, \\
I_1 &= \frac{20 - R_3 I_3}{10}, \\
I_2 &= \frac{25 - R_3 I_3}{15}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Якщо  $R_3 = 82 \text{ Ом}$ , то  $I_3 = \frac{1}{4} \text{ А}$ ,  $I_1 = -\frac{1}{20} \text{ А}$ ,  $I_2 = \frac{3}{10} \text{ А}$ .

Від'ємне значення сили струму  $I_1$  означає тільки те, що напрямок цього струму на схемі (рис.3.12) вказаний неправильно. В дійсності струм через  $\mathcal{E}_1$  тече в протилежному напрямку і сила цього струму  $I_1' = \frac{1}{20} \text{ А}$ . При такому напрямку струму  $I_1'$  робота джерела  $\mathcal{E}_1$  від'ємна і дорівнює:

$$A_1 = -\mathcal{E}_1 I_1' \cdot \Delta t = -2 \text{ Дж.}$$

Робота джерела  $\mathcal{E}_2$  позитивна, так як струм  $I_2$ , який протікає через нього, направлений по його внутрішньому полю (від «-» до «+»):

$$A_2 = \mathcal{E}_2 I_2' \cdot \Delta t = 15 \text{ Дж.}$$

Так як інших джерел в колі не має, то кількість теплоти, що виділяється у всьому колі,

$$Q = A_1 + A_2 = (-2 + 15) \text{ Дж} = 13 \text{ Дж}.$$

Очевидно, що ця величина може бути розрахована за формулою:

$$Q = (I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3) \Delta t.$$

2. Теплова потужність (3.15), що виділяється на опорі  $R_3$  з урахуванням (3) буде:

$$P = I_3^2 R_3 = \frac{110^2 R_3}{(5R_3 + 30)^2}. \quad (4)$$

Опір  $R_3$ , при якому ця потужність буде максимальною, знайдемо із умови, що  $\frac{dP}{dR_3} = 0$ . Тобто

$$\frac{110^2(5R_3 + 30)^2 - 2(5R_3 + 30) \cdot 110^2 5R_3}{(5R_3 + 30)^4} = 0.$$

Звідки знаходимо, що  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ . Тоді  $P_{\max} = 121/6 \text{ Вт}$ .

### 3.6. Задачі

**3.11.** Мідним проводом, переріз якого  $S = 1 \text{ мм}^2$ , протікає струм  $I = 10 \text{ мА}$ . Знайти середню швидкість направлено руху (тобто дрейфову швидкість) електронів вздовж провідника. Вважати, що на кожний атом міді приходить один електрон провідності.

**3.12.** Алюмінієвим проводом, переріз якого  $S = 1 \text{ мм}^2$ , протікає струм, сила якого  $I = 10 \text{ мА}$ . Знайти середню швидкість направлено руху (тобто дрейфову швидкість) електронів вздовж провідника. Вважати, що на кожний атом алюмінію приходить один електрон провідності.

**3.13.** Прямим мідним провідником, довжина якого  $l = 1000 \text{ м}$ , а переріз  $S = 1 \text{ мм}^2$ , протікає струм  $I = 4,5 \text{ А}$ . Вважаючи, що на кожний атом міді приходить один вільний електрон, знайти час, за який електрон переміститься від одного кінця проводу до іншого.

**3.14.** Яка кількість електрики переноситься через переріз провідника в наступних випадках: а) сила струму рівномірно зростає



від нуля до 3 А на протязі 10 с; б) сила струму зменшується від 18 А до нуля, причому через кожні 0,01 с вона зменшується удвічі?

**3.15.** Яка густина струму у волоску лампи розжарення, якщо сила струму 0,125 А, а діаметр волоска 0,019 мм?

**3.16.** В електронній лампі струм тече від металічного циліндра до розжареної нитки, яка розташована вздовж його осі. Визначити густину струму біля циліндра і біля нитки при таких умовах: сила струму 3 мА; довжина нитки і циліндра 2,5 см; діаметр нитки 0,02 мм; діаметр циліндра 1 см.

**3.17.** Струм тече по провіднику, який має форму, що показана на рисунку 3.13. Чи однакова напруженість поля в місцях з вузьким і широким перерізом? Як це пояснити?

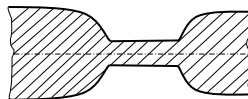


Рис.3.13.

**3.18.** Два циліндричних провідника однакового перерізу із міді і алюмінію притиснути торцями один до одного так, що повітряного проміжку в місці дотику не має. Знайти заряд на границі розділу двох провідників, якщо в напрямку від міді до алюмінію протікає струм  $I = 10$  А.

**3.19.** Ділянка електричного кола складена із трьох кусків проводу однакової довжини, виготовлених із однакового матеріалу і з'єднаних послідовно. Перерізи всіх трьох кусків проводу різні: 1, 2, 3 мм<sup>2</sup> відповідно. Різниця потенціалів на кінцях ділянки кола дорівнює 12 В. Визначити спад напруги на кожному провіднику.

**3.20.** Є моток мідного проводу з площею поперечного перерізу 0,1 мм<sup>2</sup>. Маса всього проводу 300 г. Визначити опір проводу.

**3.21.** Часто заземлення виконують у вигляді металічної кулі, яка закопана в землю з певним питомим опором. Допустимо, що в безмежному середовищі, питомий опір якого  $\rho = 100$  Ом·м, знаходиться металічна куля, діаметр якої  $d = 10$  см. Який опір системи: куля – безмежне середовище?

**3.22.** Споживач має 20 лампочок із опором по 48 Ом і 100 лампочок із опором по 288 Ом кожна. Лампочки з'єднані паралельно. Визначити опір установки споживача.

**3.23.** До гальванометра, внутрішній опір якого  $R_g = 290$  Ом, підключили шунт, що понижує чутливість гальванометра в  $n = 10$  раз. Який опір необхідно включити послідовно з зашунтованим гальванометром, щоб загальний опір залишився незмінним?

**3.24.** Через вольтметр із шкалою на 100 В протікає струм 0,1 мА. При цьому стрілка вольтметра відхилилась на 1 В шкали. Якщо до вольтметра послідовно під'єднати додатковий опір 90 кОм, то яку найбільшу різницю потенціалів можна буде виміряти цим приладом?

**3.25.** а) Опір  $R$  вимірюється вольтметром і амперметром за схемою, яка показана на рис.3.14. Амперметр  $A$  показує струм  $I = 0,32$  А; вольтметр  $V$  напругу  $U = 9,6$  В. Внутрішній опір амперметра  $R_A = 0,03$  Ом. Визначити відносну похибку  $\delta$ , яку допускають, розраховуючи опір  $R$  без врахування опору амперметра. б) Виконати ці ж розрахунки при  $I = 7$  А і  $U = 2,1$  В.

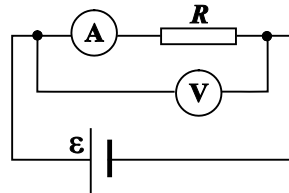


Рис. 3.14

**3.26.** а) Опір  $R$  вимірюється вольтметром і амперметром за схемою, яка показана на рис.3.15. Амперметр  $A$  показує струм  $I = 2,40$  А; вольтметр  $V$  показує напругу  $U = 7,2$  В. Опір вольтметра  $R_V = 1000$  Ом. Визначити відносну похибку  $\delta$ , яку допускають, розраховуючи опір  $R$  без врахування струму, що протікає через вольтметр.

б) Виконати той же розрахунок при  $I = 24$  мА;  $U = 7,2$  В.

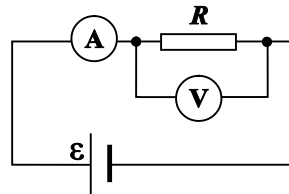


Рис. 3.15

**3.27.** При включенні приладів за схемою, яка показана на рис.3.15

амперметр показує струм  $I_1 = 2,06 \text{ A}$ , а вольтметр–напругу  $U_1 = 49,6 \text{ В}$ . При включенні цих же приладів за схемою на рис.3.14 амперметр показує струм  $I_2 = 1,94 \text{ A}$ , а вольтметр напругу  $U_2 = 50 \text{ В}$ . Визначити опір  $R$ . Напругу, яку дає батарея, вважати сталою.

**3.28.** Для визначення місця, де один із проводів

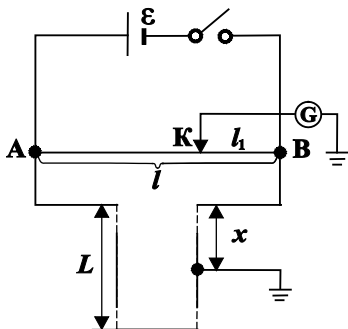


Рис. 3.16

кабеля  $L = 7,8 \text{ км}$ .

*Вказівка.* Дану схему розглядати як мостову схему (місток Уітстона).

двохжильного кабеля внаслідок пошкодження дістав з'єднання з Землею, можна використати установку, схема якої приведена на рис.3.16. АВ – струна, по якій можна пересувати контакт К. Визначити місце пошкодження кабеля, якщо гальванометр G не дає відхилення стрілки, коли контакт К знаходиться на відстані  $l_1 = 41 \text{ см}$  від кінця В. Довжина струни  $l = 100 \text{ см}$ , довжина

**3.29.** Чоловік, який стоїть на Землі, торкається оголеного місця одного із проводів магістралі, між проводами якої є напруга  $U = 600 \text{ В}$ . Якої сили струм пройде через тіло чоловіка, якщо він доторкнеться до одного із проводів при таких умовах: опір тіла чоловіка (головним чином шкіри в точці дотику) у випадку сухої шкіри оцінюється в  $R = 50 \text{ кОм}$ ; опір ізоляції між тим проводом, до якого доторкнулись, і Землею дорівнює  $R_1 = 500 \text{ кОм}$ ; опір ізоляції між другим проводом і Землею дорівнює  $R_2 = 400 \text{ кОм}$ ; опором Землі можна знехтувати.

**3.30.** Два вольтметри із внутрішніми опороми  $R_1 = 6 \text{ кОм}$  і  $R_2 = 4 \text{ кОм}$  з'єднані послідовно. Паралельно до них під'єднаний опір  $R_2 = 10 \text{ кОм}$ . На цю систему подана напруга  $U = 180 \text{ В}$  (рис.3.17).

а) Які покази вольтметрів, коли

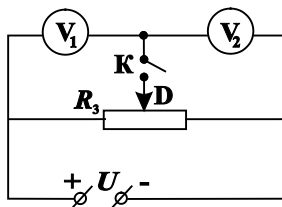


Рис. 3.17

ключ К розімкнутий?

б) Які покази вольтметрів, коли ключ К замкнений, а повзунок  $D$  з'єднаний з серединою опору  $R_3$ ?

в) Повзунок  $D$  рухають до тих пір поки покази вольтметрів не стануть однакові. На які частини  $R'_3$  і  $R''_3$  ділить повзунок  $D$  опір  $R_3$ ?

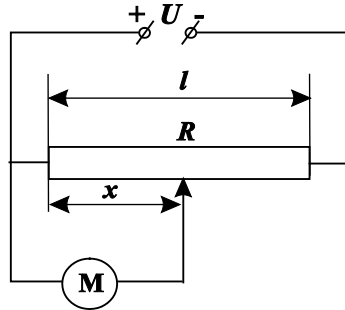


Рис. 3.18.

**3.31.** Нарис.3.18. зображена

схема потенціометра, за допомогою якого можна змінювати напругу  $U_1$ , яка приходить на прилад М. Потенціометр знаходиться під напругою  $U$ . Опір приладу М дорівнює  $r$ , а опір потенціометра дорівнює  $R$ . Визначити  $U_1$ , як функцію відстані  $x$  повзунка потенціометра від одного із його кінців. Дослідити випадки: а)  $x = 0$ ; б)  $x = l$ ; в)  $x = l/2$ ; г)  $r \gg R$ ; д)  $r \ll R$ .

**3.32.** Амперметр і вольтметр підключили послідовно до батареї з е.р.с.  $\mathcal{E} = 6$  В. Якщо паралельно до вольтметра підключити деякий опір, то показ вольтметра зменшиться в  $n = 2$  рази, а показ амперметра в стільки ж раз збільшиться. Знайти показ вольтметра після підключення опору.

**3.33.** Обмотка електромагніта в електродвигуні виготовлена із мідного проводу і при температурі  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  має опір  $R_1 = 14,2$  Ом. Після роботи електродвигуна опір обмотки збільшився до  $R = 16,5$  Ом. Якою стала температура обмотки?

**3.34.** Визначити температурний коефіцієнт проводу, який складається із алюмінієвого проводу з опором  $R_1 = 3$  Ом і залізного проводу з опором  $R_2 = 2$  Ом, з'єднаних послідовно.

**3.35.** Вуглецевий стержень з'єднаний послідовно із залізним такої ж товщини. При якому співвідношенні їх довжин опір такої комбінації не буде залежати від температури?

**3.36.** Під кінець зарядки батареї акумуляторів струмом  $I_1 = 3$  А, підключений до батареї вольтметр показав напругу  $U_1 = 4,25$  В. На початку розрядки тієї ж батареї струмом  $I_2 = 4$  А вольтметр показував напругу  $U_2 = 3,9$  В. Струм через вольтметр нехтовно малий. Визначити е.р.с. і внутрішній опір батареї.

**3.37.** Якої величини заряди знаходяться на плоских електродах, що опущені в розчин мідного купоросу, якщо через розчин протікає струм  $I = 0,5$  А. Питомий опір розчину  $\rho = 50$  Ом·см, діелектрична проникність розчину  $\epsilon = 81$ .

**3.38.** В схему (рис.3.19) включені два гальванічних елементи з е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1,5$  В із внутрішніми опорами  $r_1 = 3$  Ом і  $r_2 = 1$  Ом. Яку напругу покаже вольтметр? Внутрішній опір вольтметра великий, а опором з'єднувальних проводів знехтувати.

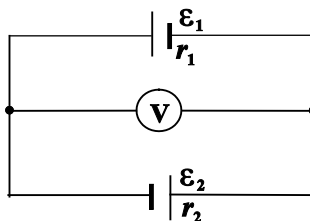


Рис. 3.19.

**3.39.** Два послідовно з'єднані вольтметри на затискачах ненавантаженої батареї е.р.с. показують один 10 В, інший 12 В. Якщо до батареї під'єднати тільки перший вольтметр, то він показує 15 В. Визначити е.р.с. батареї.

**3.40.** Батарея акумуляторів з е.р.с.  $\mathcal{E} = 6$  В замкнена на два послідовно з'єднаних реостата, опір кожного окремо дорівнює  $r = 5$  кОм. Що покаже вольтметр, якщо його під'єднати до клем одного із реостатів, якщо опір вольтметра: а)  $R = 100$  кОм; б)  $R = 10$  кОм. Внутрішнім опором батареї знехтувати.

**3.41.** Три гальванічних елементи з е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = 2$  В,  $\mathcal{E}_2 = 3$  В,  $\mathcal{E}_3 = 6$  В і внутрішніми опорами  $r_1 = 0,2$  Ом,  $r_2 = 0,3$  Ом,  $r_3 = 0,5$  Ом з'єднані за схемою на рис.3.20. Опори з'єднувальних

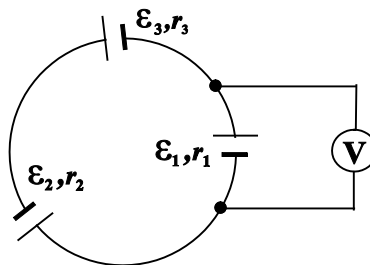


Рис. 3.20.

проводів нехтовно малі. Яку напругу буде показувати вольтметр, включений так як показано на рис.3.20? Опір вольтметра значно більший  $r_1$ .

**3.42.** Генератор постійного струму дає е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = 12$  В. Його внутрішній опір  $r_1 = 0,2$  Ом. Він заряджає батарею акумуляторів з е.р.с.  $\mathcal{E}_2 = 10$  В і внутрішнім опором  $r_2 = 0,6$  Ом. Паралельно до батареї підключена лампочка із опором  $R = 3$  Ом. Визначити сили струмів в батареї акумуляторів  $I_1$  і в лампочці  $I_2$ .

**3.43.** Три гальванічних елементи з е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = 1,3$  В,  $\mathcal{E}_2 = 1,4$  В,  $\mathcal{E}_3 = 1,5$  В і з внутрішніми опороми по  $r = 0,3$  Ом кожний включені паралельно один одному на зовнішній опір  $R = 0,6$  Ом. Визначити сили струмів через кожний із елементів.

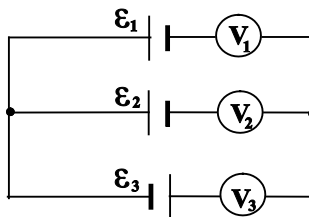


Рис. 3.21

**3.44.** Три гальванічних елементи і три вольтметри з'єднані за схемою, яка показана на рис.3.21. Електрорушійні сили гальванічних елементів дорівнюють:  $\mathcal{E}_1 = 1$  В,  $\mathcal{E}_2 = 2$  В,  $\mathcal{E}_3 = 1,5$  В. Опори вольтметрів дорівнюють:  $R_1 = 2$  кОм,  $R_2 = 3$  кОм,  $R_3 = 4$  кОм. Внутрішні опори елементів нехтовно малі.

а) Які покази вольтметрів?

б) Який спад напруги між вузлами схеми?

**3.45.** Три гальванічних елементи

( $\mathcal{E}_1 = 1,3$  В,  $\mathcal{E}_2 = 1,5$  В,  $\mathcal{E}_3 = 2$  В;  $r_1 = r_2 = r_3 = 0,2$  Ом) включені так, як показано на рис.3.22. Опір  $R = 0,55$  Ом. Визначити сили струмів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  в елементах.

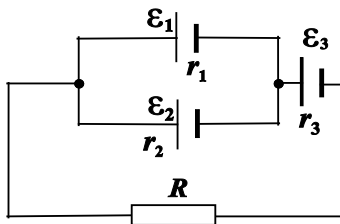


Рис. 3.22

**3.46.** Батарея із  $N = 400$  елементів, кожний із яких з е.р.с.

$\mathcal{E} = 2 \text{ В}$  і внутрішнім опором  $r = 0,1 \text{ Ом}$ , повинна давати струм на зовнішній опір  $R = 10 \text{ Ом}$ . Необхідно скласти змішану батарею із такого числа  $n_1$  паралельних елементів, кожна із яких містить  $n_2$  послідовно з'єднаних елементів, щоб сила струму через опір  $R$  була максимальною. Визначити числа  $n_1$  і  $n_2$ , силу струму через опір  $R$  і через кожний елемент.

**3.47.** Електричне коло складається із батарей з е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = 3 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ В}$  і  $\mathcal{E}_x$  і опорів  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 15 \text{ Ом}$  (рис.3.23). До ділянки кола AC підключений вольтметр  $V$  з дуже великим внутрішнім опором. Знайти е.р.с.  $\mathcal{E}_x$ , при якій покази вольтметра не змінюються, чи буде ключ  $K$  замкнутий, чи розімкнутий. Внутрішніми опором батарей знехтувати.

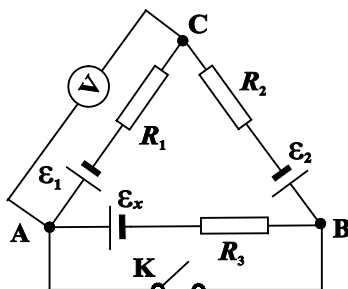


Рис. 3.23

**3.48.** Опори  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$  підбрані так, що струм через гальванометр  $G$  не протікає (рис.3.24). Е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = 5 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 10 \text{ В}$ . Знайти, якою повинна бути е.р.с.  $\mathcal{E}$ , щоб виконати умову задачі. Внутрішніми опором батарей знехтувати.

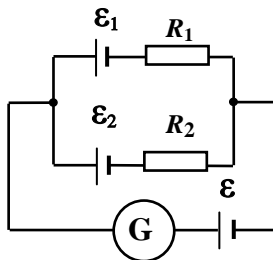


Рис. 3.24.

**3.49.** В колі, зображеному на рис.3.25 е.р.с. батарей  $\mathcal{E}_1 = 1,5 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1 \text{ В}$ . Опори  $R = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 50 \text{ Ом}$  і  $R_2 = 80 \text{ Ом}$ . Знайти силу струму, що протікає через опір  $R$ .

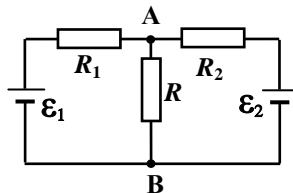


Рис.3.25.

**3.50.** Яке повинно бути

співвідношення між опорами і е.р.с. в колі, зображеному на рис.3.25, при якому струм через другу батарею протікати не буде?

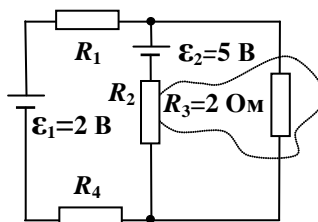


Рис.3.26.

**3.51.** Опори кола, дані якого приведені на рис.3.26, підібрані так, що струм через батарею з е.р.с.  $\mathcal{E}_1$  не протікає. Чому дорівнює напруга на затискачах опору  $R_2$  і сила струму через опір  $R_3$ ? Внутрішні опорами батарей знехтувати.

**3.52.** Для умови попередньої задачі 3.51 визначити опори  $R_2$ ,  $R_1$  і  $R_4$ .

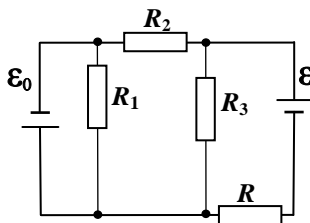


Рис.3.27.

**3.53.** В схемі (рис.3.27.) е.р.с. джерел струму  $\mathcal{E}_0 = 10\text{ В}$ ,  $\mathcal{E} = 5\text{ В}$ . Опори  $R_2 = 10\text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30\text{ Ом}$ ,  $R = 50\text{ Ом}$ . Внутрішні опорами обох джерел знехтувати. Знайти струм через опір  $R$ .

**3.54.** Знайти різницю потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B$  між обкладками конденсатора  $C$  схеми (рис.3.28.), якщо

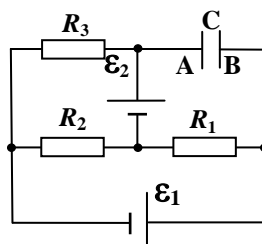


Рис.3.28.

е.р.с. джерел  $\mathcal{E}_1 = 4\text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1\text{ В}$  і опори  $R_1 = 10\text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20\text{ Ом}$  і  $R_3 = 30\text{ Ом}$ . Внутрішні опори джерел струму нехтовно малі.

**3.55.** Знайти струм, який протікає через опір  $R_2$  ділянки кола (рис.3.29.), якщо опори

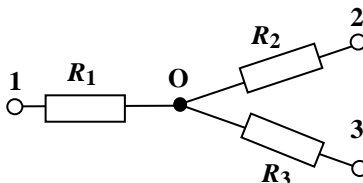


Рис.3.29.



$R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30 \text{ Ом}$  і потенціали точок 1, 2 і 3 дорівнюють відповідно  $\varphi_1 = 10 \text{ В}$ ,  $\varphi_2 = 6 \text{ В}$ ,  $\varphi_3 = 5 \text{ В}$ .

**3.56.** Десять однакових гальванічних елементів з е.р.с.  $\mathcal{E}_1$  і дев'ять однакових гальванічних елементів з е.р.с.  $\mathcal{E}_2$  з'єднані в довільному порядку, але завжди клемма «плюс» з'єднувалась з клемою «мінус» так як показано на рис.3.30. Вольтметр  $V_1$  показує напругу  $U_1 = 2,4 \text{ В}$ . а) Яку напругу показує вольтметр  $V_2$ ? б) Яку напругу покаже вольтметр  $V_2$ , якщо його під'єднати до елемента  $\mathcal{E}_1$ ? в) до елемента  $\mathcal{E}_2$ ?

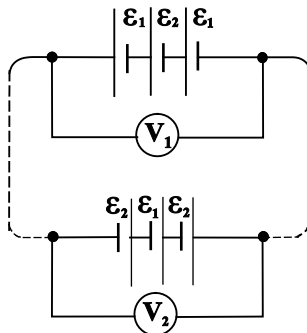


Рис. 3.30.

**3.57.** Знайти е.р.с. і внутрішній опір джерела, еквівалентного двом паралельно з'єднаних елементів з е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = 5 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 10 \text{ В}$  і внутрішніми опорами  $r_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 6 \text{ Ом}$ , відповідно.

**3.58.** В схемі на рис.3.31 е.р.с. джерел  $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_3 = 6 \text{ В}$ , їхні внутрішні опори  $r_1 = 0,2 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 0,4 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 0,6 \text{ Ом}$  і опори  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ . Знайти різниці потенціалів: а)  $\varphi_A - \varphi_B$  між точками А і В; б)  $\varphi_C - \varphi_B$  між точками С і В; в)  $\varphi_C - \varphi_D$  між точками С і D.

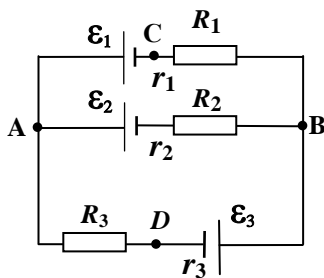


Рис.3.31.

**3.59.** Знайти різницю потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  між точками 1 і 2 схеми (рис.3.32), якщо  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $\mathcal{E}_1 = 5 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$ .

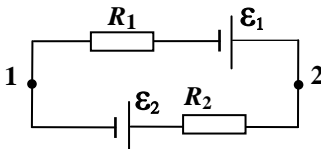


Рис.3.32.

Внутрішні опори джерел струму нехтовно малі.

**3.60.** Є два послідовні з'єднаних джерела струму з однаковими е.р.с., але з різними внутрішніми опором  $r_1 = 0,8 \text{ Ом}$  і  $r_2 = 1,2 \text{ Ом}$ . Знайти зовнішній опір  $R$ , на який треба замкнути ці джерела, щоб різниця потенціалів на клеммах одного із джерел (якого саме?) стала дорівнювати нулю.

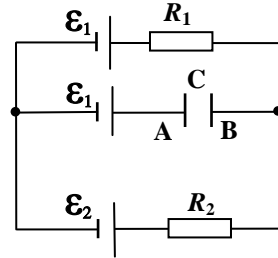


Рис.3.33.

**3.61.** В схемі на рис.3.33 е.р.с. джерел  $\mathcal{E}_1 = 5\text{В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 2\text{В}$  і опори  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ . Внутрішні опори джерел струму нехтовно малі. Знайти різницю потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B$  між обкладинками А і В конденсатора С.

**3.62.** В схемі, яка зображена на рис.3.34,  $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 20 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_3 = 30 \text{ В}$ ,  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_7 = 7 \text{ Ом}$ . Внутрішні опори джерел струму нехтовно малі. Визначити різницю потенціалів між:

- а) точками А і В  $\varphi_A - \varphi_B$ ;
- б) точками С і D  $\varphi_C - \varphi_D$ ;
- в) точками К і L  $\varphi_K - \varphi_L$ .

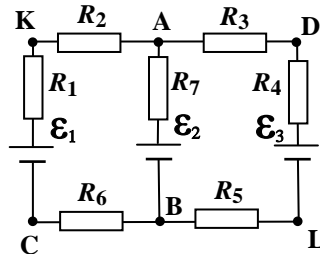


Рис.3.34.

**3.63.**

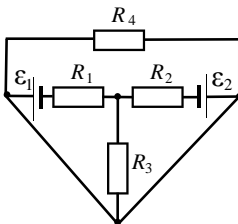


Рис.3.35.

На схемі, яка показана на рис.3.35, опори  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \text{ кОм}$ ,  $\mathcal{E}_1 = 1,5 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1,8 \text{ В}$ . Визначити струми в опорах.

**3.64.** Конденсатор, ємність якого  $C = 400$  пФ, підключили через опір  $R = 650$  Ом до джерела постійної напруги  $U_0$ . Через який час напруга на конденсаторі буде  $U = 0,9 U_0$ ?

**3.65.** Конденсатор, який заповнений діелектриком з проникністю  $\epsilon = 2,1$ , втрачає за час  $\tau = 3$  хв. половину наданого йому заряду. Визначити питомий опір діелектрика, вважаючи, що втрата заряду відбувається через діелектричну прокладку.

**3.66.** Батарея з е.р.с.  $\mathcal{E} = 4$  В і внутрішнім опором  $r = 1$  Ом входить в склад невідомого кола (рис.3.36). До полюсів батареї підключений вольтметр так, що позитивна клемма вольтметра підключена до позитивного полюса батареї. Вольтметр показує напругу  $U = 6$  В. Визначити кількість тепла, що виділяється за одиницю часу на внутрішньому опорі батареї.

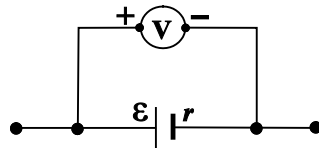


Рис. 3.36.

**3.67.** Батарея з е.р.с.  $\mathcal{E} = 4$  В і внутрішнім опором  $r = 1$  Ом входить в склад невідомого кола (рис.3.37). До полюсів батареї підключений вольтметр. Виявилось, що для нормальної роботи вольтметра його позитивну клему треба підключити до негативного полюса батареї. Вольтметр при цьому показує напругу  $U = 2$  В. Яка кількість тепла виділяється за одиницю часу на внутрішньому опорі батареї?

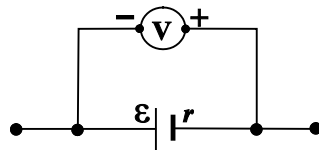


Рис. 3.37.

**3.68.** Мережею, довжина якої  $l = 5$  км, необхідно передати енергію від джерела з напругою  $U = 110$  В і потужністю  $P = 5$  кВт. Яким мінімальним повинен бути діаметр  $D$  мідного проводу, щоб втрати енергії в мережі не перевищували  $n=10\%$  від потужності джерела.

**3.69.** Від джерела з напругою  $U = 100$  кВ необхідно передати на відстань  $l = 5$  км потужність 5 МВт. Допустима втрата

напруги в проводах  $n = 1\%$ . Розрахувати мінімальний переріз мідного проводу, який придатний для цієї мети. Порівняти отриманий результат з результатом попередньої задачі.

**3.70.** Є три електричні лампочки, які розраховані на напругу 110 В, мають потужності 50, 50 і 100 Вт. За якою схемою необхідно включити ці лампочки в мережу з напругою 220 В, щоб вони всі горіли повним розжаренням?

**3.71.** а) Батарея складається із  $n = 5$  послідовно з'єднаних елементів з е.р.с.  $\mathcal{E} = 1,4\text{В}$  кожний і з внутрішніми опорами по  $r = 0,3\text{Ом}$  кожний. При якій силі струму корисна потужність батареї дорівнює  $P = 8\text{ Вт}$ . б) Яка найбільша корисна потужність батареї?

**3.72.** Проводка від електростанції до споживача виготовлена з мідного проводу з площею поперечного перерізу  $2,5\text{ мм}^2$ . Загальна довжина проводу 49 м. Напруга на клеммах станції підтримується сталою і дорівнює 120 В. Споживач намагається виготовити електричну пічку, потужність якої 600 Вт. Який повинен бути опір пічки?

**3.73.** Визначити кількість тепла, що виділяється на однорідній ділянці кола, опір якої  $R = 120\text{ Ом}$ , якщо на проміжку часу від 0 до  $\tau = 5\text{ с}$  сила струму на ділянці рівномірно збільшувалась від  $I_1 = 2\text{ А}$  до  $I_2 = 10\text{ А}$ .

**3.74.** Визначити роботу електричних сил і кількість теплоти, що виділяється за одну секунду в наступних випадках:

а) в проводі, по якому протікає струм силою 1 А; напруга між кінцями проводу дорівнює 2 В;

б) в акумуляторі, який заряджається струмом в 1 А; напруга між полюсами акумулятора дорівнює 2 В; е.р.с. акумулятора  $\mathcal{E} = 1,3\text{ В}$ ;

в) в батареї акумуляторів, яка дає струм силою 1 А на зовнішнє навантаження; напруга між полюсами акумулятора дорівнює 2 В; е.р.с. батареї дорівнює 2,6 В.

**3.75.** Проводом, опір якого  $R = 6 \text{ Ом}$ , перенесена кількість електрики  $q = 30 \text{ Кл}$ . Визначить кількість теплоти, що виділилась в проводі в наступних випадках:

- а) проводом на протязі  $\tau = 24 \text{ с}$  протікав постійний струм;
- б) сила струму в проводі рівномірно зменшувалась до нуля на протязі  $\tau = 24 \text{ с}$ ;
- в) сила струму в проводі зменшувалась до нуля таким чином, що за кожні  $\tau = 24 \text{ с}$  вона зменшувалась удвічі.

**3.76.** Довести, що розподіл струму в паралельно з'єднаних проводах  $R_1$  і  $R_2$  відповідає мінімуму теплової потужності, яка виділяється на цій ділянці кола.

**3.77.** Три гальванічні елементи з е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = 1,3\text{В}$ ;  $\mathcal{E}_2 = 1,4\text{В}$  і  $\mathcal{E}_3 = 1,5\text{В}$  і з внутрішніми опорами по  $r = 0,3 \text{ Ом}$  кожний з'єднані паралельно один з одним і підключені на зовнішній опір  $R = 0,6 \text{ Ом}$ . Визначити струм через кожний елемент.

**3.78.** На схемі (рис.3.38) опори  $R_1 = 40 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 60 \text{ Ом}$ . При якому значенні опору  $R_x$  – теплова потужність, що виділяється на ньому, практично не буде залежити від малих змін цього опору. Напругу між точками А і В вважати сталою.

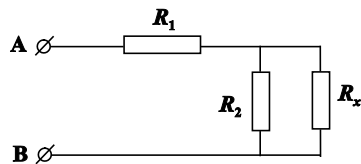


Рис 3.38.

**3.79.** В схемі (рис.3.39) опори  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ., е.р.с. джерел  $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 20 \text{ В}$ . Внутрішні опори джерел нехтовно малі. При якому значенні опору  $R$  теплова потужність, яка виділяється на ньому буде максимальною? Чому вона дорівнює?

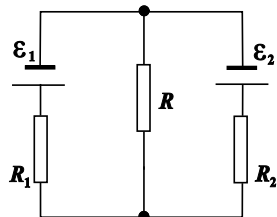


Рис. 3.39

**3.80.** Є змішана батарея із  $N=100$  однакових елементів струму, кожен із яких має внутрішній опір  $r=0,4$  Ом. Ця батарея підключена до зовнішнього опору  $R=10$  Ом. Знайти число паралельних груп, які містять однакове число послідовно з'єднаних елементів, при якому на зовнішньому опорі буде виділятися максимальна теплова потужність.

**3.81.** Конденсатор, ємність якого  $C=50$  мкФ, підключили до джерела постійної е.р.с.  $\mathcal{E}=100$  В (рис.3.40). Потім перемикач  $K$  перевели із контакту 1 на контакт 2. Знайти кількість теплоти, яка виділиться на опорі  $R_1=300$  Ом, якщо опір  $R_2=200$  Ом.

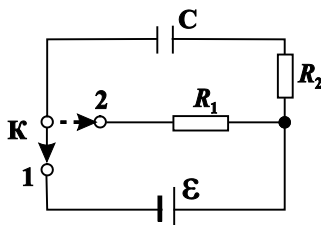


Рис. 3.40.

**3.82.** Конденсатор, ємність якого  $C=2$  мкФ, зарядили до напруги  $U=500$  В. Потім конденсатор відключили від джерела напруги і обкладки його замкнули через опір  $R=5$  МОм. Знайти:

- заряд, що пройшов через опір за час  $\tau=2$  с;
- кількість тепла, що виділилась в опорі  $R$  за цей же час.

**3.83.** Між обкладками плоского конденсатора розміщена паралельно їм мідна пластинка, товщина якої дорівнює  $1/3$  зазору між обкладками. Ємність конденсатора без мідної пластинки  $C=25$  нФ. Конденсатор весь час підключений до джерела струму внаслідок чого заряджений до напруги  $U=100$  В. Визначити:

- роботу  $A_1$ , яку необхідно виконати, щоб вийняти пластинку із конденсатора,
- роботу  $A_2$ , яку виконує, при цьому джерело струму. Нагріванням пластини знехтувати.

**3.84.** Розв'язати задачу № 3.83 з тією відмінністю, що пластинка виготовлена не із міді, а із діелектрика з проникністю  $\epsilon=3$ .

### Додаткові задачі

**3.85.** До конденсатора, ємність якого  $C = 10\text{ мкФ}$ , підключають акумулятор з е.р.с.  $\mathcal{E} = 2\text{ В}$  через опір  $R = 1\text{ кОм}$ . Через який час конденсатор буде заряджений до напруги  $U = 1,98\text{ В}$ ? Внутрішнім опором акумулятора знехтувати.

**3.86.** Дротину круглого перерізу з пластичного металу протягли крізь калібрований круглий отвір так, що її довжина збільшилась удвічі, і відтак отримали провідник з опором  $R$ . Яким був початковий опір  $R_0$  дротини?

**3.87.** Довгу дротину опором  $R_0$  розрізали на  $n$  однакових кусків і з'єднали їх кінці так, що утворився багатожильний провідник. Знайти опір утвореного провідника  $R$ .

**3.88.** Багатожильний провідник, який складається з  $n$  окремих дротин (жил) і має опір  $R_0$ , розібрали на окремі жили та з'єднали їх так, що утворилася одна довга дротина. Знайти її опір  $R$ .

**3.89.** Оцінити дрейфову швидкість (швидкість упорядкованого руху) електронів у мідному провіднику перерізом  $1\text{ мм}^2$  при силі струму  $7\text{ А}$  (технічно допустимий струм для міді такого перерізу), прийнявши концентрацію вільних електронів  $8,5 \cdot 10^{28}\text{ м}^{-3}$ . Зважаючи на отриманий результат, пояснити, чому лампи в кімнаті загораються практично миттєво після вмикання, хоча вони розташовані далеко від джерела напруги.

**3.90.** Дві паралельні вертикальні квадратні пластини зі стороною  $a = 300\text{ мм}$  закріплені на відстані  $d = 2\text{ мм}$  одна від одної та підключені до джерела постійної напруги  $U = 250\text{ В}$ . Який струм  $I$  потече через джерело, коли пластини почнуть занурювати у дистильовану воду зі сталою швидкістю  $v = 5,0\text{ мм/с}$ ? Воду вважати ідеальним діелектриком із проникністю  $\epsilon = 81$ .

**3.91.** Знайти напруженість електричного поля у мідній дротині з діаметром  $1,5\text{ мм}$  при силі струму  $10\text{ А}$ .

**3.92.** Напруга на резисторі, який підключений до клем джерела, складає 80% від е.р.с. джерела. Опір резистора 5,0 Ом. Знайти внутрішній опір джерела струму.

**3.93.** Три акумулятори з е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = 1,5$  В,  $\mathcal{E}_2 = 4,5$  В,  $\mathcal{E}_3 = 9,0$  В і внутрішніми опорами  $r_1 = 1,0$  Ом,  $r_2 = 1,5$  Ом,  $r_3 = 3,0$  Ом паралельно з'єднані в батарею. Вивести формули і обчислити внутрішній опір  $r_0$  та е.р.с.  $\mathcal{E}_0$  цієї батареї.

**3.94.** Три джерела з е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = 8$  В,  $\mathcal{E}_2 = 4$  В,  $\mathcal{E}_3 = 3$  В та однаковими внутрішніми опорами по  $r = 2$  Ом з'єднані однойменними полюсами. Знайти силу струму в кожному джерелі.

**3.95.** Плоский конденсатор, ємність якого  $C = 50$  мкФ, заповнений діелектриком із проникністю  $\varepsilon = 80$  і питомим опором  $\rho = 10^{12}$  Ом·м. Визначити теплову потужність, яка буде виділятися в конденсаторі при напрузі  $U = 220$  В.

**3.96.** Джерело віддає у зовнішнє коло максимальну можливу потужність при силі струму 10 А. Знайти струм короткого замикання джерела.

**3.97.** Дві електричні лампочки однакової потужності  $P = 40$  Вт включені послідовно в мережу з напругою  $U = 120$  В. В однієї із лампочок нитка вольфрамова, у іншої - графітова (вуглецева). Яка із лампочок буде розжарена сильніше?

**3.98.** Два елементи з е.р.с.  $\mathcal{E}_1 = 1,5$  В і  $\mathcal{E}_2 = 4,5$  В, а також внутрішніми опорами  $r_1 = 0,1$  Ом і  $r_2 = 0,2$  Ом з'єднані послідовно і замикаються на зовнішній опір  $R$  (рис.3.41). Чи можна підібрати величину  $R$  так, щоб

різниця потенціалів  $U_1$  на полюсах елемента  $\mathcal{E}_1$

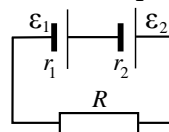


Рис.3.41.

дорівнювала нулю?

**3.99.** Як в містку Уітстона виміряти опір

гальванометра  $R_G$ , який як правило включають в діагональ



містка (рис.3.42), не використовуючи ще один гальванометр?

**3.100.** Трамвайна лінія живиться постійним струмом, причому провід, який у повітрі, під'єднується до позитивного полюса генератора постійного струму,

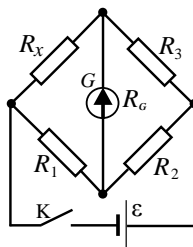


Рис.3.42.

а рельси — до негативного. Чому не навпаки?

## 4. ПОСТІЙНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ

### 4.1. Питання теми

1. Магнітне поле електричного заряду, що рухається.
2. Магнітне поле прямолінійного провідника зі струмом.
3. Магнітне поле колового струму та соленоїда.
4. Контур зі струмом у магнітному полі.

### 4.2. Основні визначення та формули

1. Джерелом магнітного поля є електричні заряди, що рухаються (тобто струми). Магнітне поле точкового заряду, який рухається з нерелятивістською швидкістю  $\vec{v}$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (4.1)$$

де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнітна стала вакууму,  $\vec{r}$  – радіус-вектор, який визначає положення вибраної точки простору по відношенню до заряду.

2. Магнітне поле, що створюється елементом струму  $I d\vec{l}$  – закон Біо-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (4.2)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, який проведений від елемента струму  $I d\vec{l}$  до тієї точки, в якій визначається індукція поля.

3. Згідно принципу суперпозиції магнітних полів магнітна індукція результуючого поля дорівнює векторній (геометричній) сумі магнітних індукцій  $d\vec{B}$ , які створюються кожним елементом струму  $I d\vec{l}$ :

$$\vec{B} = \int_I d\vec{B}, \quad (4.3)$$

де інтеграл береться по всій довжині провідника. Якщо магнітні поля створюються струмами, то індукція результуючого поля

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i, \quad (4.4)$$

де  $\vec{B}_i$  – індукція магнітного поля, яка створюється  $i$  – тим струмом. В конкретному випадку накладання двох полів:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \quad (4.5)$$

а абсолютне значення вектора магнітної індукції

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}, \quad (4.6)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$ .

4. Циркуляція вектора індукції магнітного поля по замкнутому контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів, які охоплюються цим контуром, помножений на магнітну сталу вакууму (закон повного струму):

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I. \quad (4.7)$$

*Примітка.* Якщо напрямок струму і обхід по контуру утворюють правоґвинтову систему, то такий струм береться із знаком „+”». Якщо напрямок струму і обхід по контуру утворюють лівоґвинтову систему, то такий струм береться із знаком „-”.

#### 5. Теорема Остроградського-Гаусса для магнітного поля:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (4.8)$$

де  $\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S}$  – потік вектора індукції магнітного поля через замкнуту поверхню  $S$ .

6. Індукція магнітного поля в довільній точці А (рис.4.1), що створюється прямолінійним провідником зі струмом  $I$

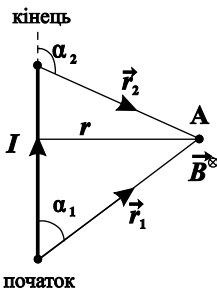


Рис. 4.1

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (4.9)$$

де  $r$  – відстань від точки А до провідника,  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – кути, що утворюються радіус-векторами  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$ , проведеними в точку А відповідно із початку і кінця провідника, з напрямком струму. У випадку нескінченно довгого провідника ( $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ ) індукція магнітного поля в точці А буде:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (4.10)$$

#### 7. Індукція магнітного поля на осі колового струму:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (4.11)$$

де  $R$  – радіус колового контуру зі струмом,  $x$  – відстань від площини контуру до точки на осі, де визначається магнітна індукція.

Індукція магнітного поля в центрі колового струму ( $x = 0$ ):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (4.12)$$

Індукція магнітного поля в центрі дуги кола, довжина якої  $L$ , якою протікає струм  $I$ :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \frac{L}{R}, \quad (4.13)$$

де  $R$  – радіус дуги кола.

### 8. Індукція магнітного поля на осі соленоїда

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (4.14)$$

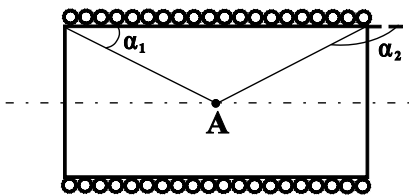


Рис. 4.2

де  $n$  – густина намотки соленоїда (число витків на одиницю довжини соленоїда),  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – кути між радіус-векторами, які проведені в точку  $A$  з початку і кінця соленоїда, і його віссю (рис.4.2).

Якщо соленоїд нескінченно довгий ( $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ ), то магнітне поле всередині соленоїда:

$$B = \mu_0 I n. \quad (4.15)$$

9. Індукція магнітного поля тороїда на відстані  $R$  від центру  $O$  (рис.4.3.):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{N}{R}, \quad (4.16)$$

де  $I$  – сила струму у витках тороїда,  $N$  – кількість витків.

*Примітка.* Якщо тороїд тонкий, тобто його середній діаметр  $2R \gg d$ , де  $d$  – діаметр перерізу (рис.4.3), то для розрахунку індукції магнітного поля з високою точністю можна використовувати формулу (4.15).

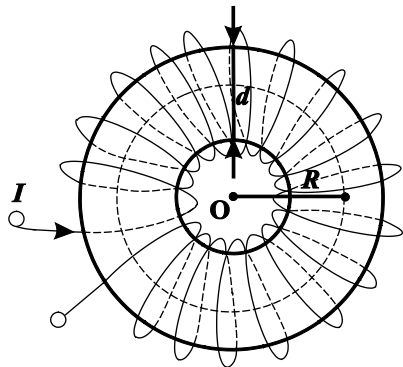


Рис. 4.3

### 10. Сила, яка діє на елемент

довжини  $d\vec{l}$  провідника зі струмом  $I$ , що знаходиться в магнітному полі  $\vec{B}$  (сила Ампера),

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (4.17)$$

**11.** Сила Лоренца – сила, яка діє на електричний заряд зі сторони електричного і магнітного полів:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.18)$$

де  $q$  – величина заряду,  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля,  $\vec{v}$  – швидкість заряду,  $\vec{B}$  – індукція магнітного поля.

**12.** Магнітний момент замкнутого плоского контуру (магнітного диполя), по якому протікає струм  $I$ ,

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (4.19)$$

де  $S$  – площа контура,  $\vec{n}$  – позитивна нормаль до площини контуру, яка визначається напрямком струму в контурі і правилом правого свердлика.

**13.** Механічний момент, який діє на замкнутий контур зі струмом в однорідному магнітному полі, індукція якого  $\vec{B}$ :

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (4.20)$$

Якщо поле неоднорідне, то в цьому випадку на контур зі струмом крім обертального моменту (4.20) діє сила

$$F_x = p_m \frac{dB}{dx} \cos(\vec{p}_m \wedge \vec{B}), \quad (4.21)$$

де  $x$  – напрямок найшвидшої зміни величини  $B$ ,  $(\vec{p}_m \wedge \vec{B})$  – кут між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ .

**14.** Енергія взаємодії магнітного диполя  $\vec{p}_m$  з магнітним полем  $\vec{B}$ :

$$W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}. \quad (4.22)$$

**15.** Потік вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  (магнітний потік) через поверхню  $S$  визначається інтегралом

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (4.23)$$

де  $d\vec{S} = dS\vec{n}$ ,  $\vec{n}$  – нормаль до елементарної площадки поверхні  $S$ .

**16.** Робота сил магнітного поля по переміщенню замкнутого контуру з постійним струмом  $I$  дорівнює

$$A = I\Delta\Phi, \quad (4.24)$$

де  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$  – зміна магнітного потоку через поверхню, яка обмежена контуром.

### 4.3. Питання на самопідготовку

1. Що є джерелом існування магнітного поля?
2. Що є характеристикою магнітного поля у вакуумі?
3. В яких фізичних одиницях вимірюється індукція магнітного поля?
4. Пояснити формулу для індукції магнітного поля електричного заряду, який рухається.
5. Сформулювати та пояснити закон Біо-Савара-Лапласа.
6. Пояснити суть принципу суперпозиції магнітних полів.
7. Сформулювати і пояснити теорему про циркуляцію вектора індукції магнітного поля для вакууму та теорему Остроградського-Гаусса.
8. Магнітне поле прямолінійного провідника та колового витка зі струмом.
9. Магнітне поле соленоїда та тороїда.
10. Сила Ампера, сила Лоренца.
11. Контур зі струмом в магнітному полі.

### 4.4. Методичні вказівки

1. Основною задачею теорії магнітного поля є розрахунок характеристик магнітного поля довільної системи струмів і електричних зарядів, що рухаються. Це еквівалентно визначенню

магнітної індукції  $\vec{B}$  в довільній точці поля. Цю задачу розв'язують за допомогою формули (4.1), закону Біо-Савара-Лапласа (4.2), принципу суперпозиції (4.3)–(4.6). В тих випадках, коли конфігурація струмів, які створюють поле достатньо симетрична, то для знаходження індукції магнітного поля використовують закон повного струму (4.7).

**2.** При розв'язуванні задач вважається, що студенти (курсанти) знають вирази для індукції найпростіших полів: поле прямого струму, нескінченно довгого (4.10) і кінцевої довжини (4.9), поле на осі витка (4.11), (4.12), (4.13), поле соленоїда (4.14), (4.15), поле тороїда (4.16). Це дає можливість розв'язувати задачі на розрахунок магнітних полів, які створюються різними комбінаціями цих джерел: розрахувати поле „квадрата”, „трикутника”, „прямокутника”, „трапеції”, поле фігур, які утворені колами, напівпрямими, відрізками і тому подібне. Всі ці задачі розв'язуються методом суперпозиції. Найбільш суттєвим тут є врахування векторного характеру принципу суперпозиції.

**3.** Коли в задачі розглядається замкнутий контур зі струмом, що знаходиться в магнітному полі, то розрізняють два випадки:

1) Магнітне поле однорідне. Тоді на контур зі струмом діє обертальний момент, що визначається формулою (4.20). Під дією цього моменту контур повертається так, щоб кут  $\alpha$  між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  зменшувався. При  $\alpha = 0$  настає стан стійкої рівноваги контуру в магнітному полі з мінімумом енергії (4.22);

2) Магнітне поле неоднорідне. В цьому випадку на контур зі струмом крім обертального моменту (4.20) діє сила, що визначається формулою (4.21). Треба мати на увазі, що ця формула справедлива тільки при наступних умовах: а) магнітне поле таке, що напрямок осі ОХ і вектора  $\vec{B}$  співпадають (таке, наприклад поле соленоїда в точках, які лежать на його осі біля кінців соленоїда)? б) контур зі струмом досить малий, щоб можна було вважати величину  $B$  приблизно однаковою в межах площини контуру.

## 4.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 4.1.** Заряд  $q = 20$  мкКл рухається прямолінійно із швидкістю  $v = 10^6$  м/с в напрямку осі ОХ. Визначити максимальне значення індукції на осі ОУ в момент часу, коли вісь ОУ знаходиться на відстані  $b = 1$  м від заряду (рис.4.4).

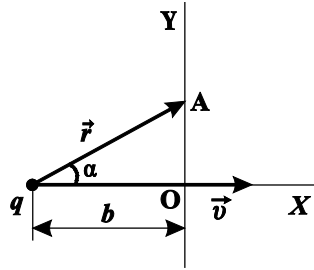


Рис. 4.4

**Розв'язок.** Індукція магнітного поля в точці А, яка знаходиться на осі ОУ, визначається за формулою (4.1). Тобто

$$B_A = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad (1)$$

де  $\alpha$  – кут між радіус-вектором  $\vec{r}$  точки А і вектором швидкості  $\vec{v}$  (віссю ОХ),  $|\vec{r}|$  – відстань точки А до заряду  $q$ . Так як  $r = b / \cos \alpha$ , то формула (1) перепишеться так:

$$B_A = \frac{\mu_0 q v}{4\pi b^2} \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

Дослідимо формулу (2) на екстремум по відношенню до кута  $\alpha$ . Для цього знайдемо першу похідну за кутом  $\alpha$  від формули (2) і прирівняємо її до нуля.

$$(\sin \alpha \cos^2 \alpha)' = \cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 3 \cos^2 \alpha = 2 \end{cases}.$$

Звідки знаходимо:  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = \pm \arccos \sqrt{2/3} = \pm 35,3^\circ$ . Перший розв'язок відповідає мінімальному значенню індукції поля  $B = 0$ .

Значення кута  $\alpha = \pm 35,3^\circ$  визначають положення двох симетричних точок на осі ОУ відносно точки О, індукції поля  $B$  в яких є максимальною. За формулою (2) максимальне значення індукції поля буде:



$$B_A = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{4\pi \cdot 1} \sin 35,3^\circ \cdot \cos 35,3^\circ \text{ Тл} = 0,77 \text{ мкТл}.$$

**Задача 4.2.** Нескінченно довгий прямий провідник, по якому протікає струм  $I = 10 \text{ А}$ , зігнутий під прямим кутом (рис.4.5). Знайти індукцію магнітного поля на відстані  $b = 5 \text{ см}$  від вершини кута в точках А і С, які лежать на бісектрисі прямого кута і на продовженні однієї із сторін кута.

**Аналіз.** В будь-якій точці індукція магнітного поля може бути знайдена за формулою (4.5), як векторна сума індукцій полів  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$ , які створюються струмом, що протікає по двох частинах 1 і 2 провідника.

Згідно умови задачі, провідник нескінченно довгий, що дозволяє не враховувати магнітне поле, яке створюється підвідними провідниками, що йдуть до джерела струму.

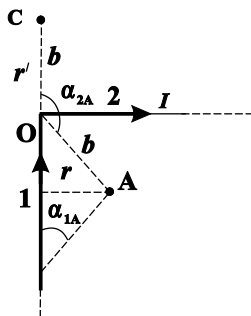


Рис. 4.5

Абсолютне значення індукції магнітного поля в будь-якій точці, що створюється кожним із провідників, може бути знайдено за формулою (4.9).

В точці А, згідно закону Біо-Савара-Лапласа, вектори  $\vec{B}_1$  і  $\vec{B}_2$  мають однаковий напрямок і перпендикулярні до площини рисунка, тому

$$B_A = B_{1A} + B_{2A}. \quad (1)$$

В точці С провідник 1 магнітного поля не створює, так як для любого елемента цього провідника  $I d\vec{l} \times \vec{r} = 0$  і згідно (4.2)  $B_{1C} = 0$ . Тому

$$B_C = B_{2C}. \quad (2)$$

**Розв'язок.** Внаслідок симетричного розташування точки А відносно провідників 1 і 2  $B_{1A} = B_{2A}$  (рис.4.5), тому

$$B_A = 2B_{1A}. \quad (3)$$

За формулою (4.9) для провідника 1 запишемо:

$$\begin{aligned} \text{де } r &= b \cos(\pi/4) = b\sqrt{2}/2, \quad \alpha_{1A} = 0, \quad \cos \alpha_{1A} = 1, \quad \alpha_{2A} = \alpha_2 = \\ \pi/4 + \pi/2 &= 3\pi/4, \quad \cos \alpha_{2A} = \cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2. \end{aligned}$$

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{\pi b \sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 9,7 \cdot 10^{-5} \text{Тл} = 97 \text{мкТл}.$$
$$r' = b, \alpha_{1C} = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}; \alpha_{2C} = \alpha_2 = \pi,$$

$$B_C = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} = 2 \cdot 10^{-5} \text{Тл} = 20 \text{мкТл}.$$

**Аналіз.** Індукція магнітного поля в точці О створюється прямолінійними провідниками, які представляють собою сторони рівностороннього трикутника АВС. Для розв'язання задачі скористаємось формулою (4.9).

158

$\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$ . Кути  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\alpha_2 = 90^\circ$ . Тому за формулою (4.9)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{3}a} (\cos 60^\circ - \cos 90^\circ) = \frac{\mu_0 I}{8\sqrt{3}\pi a}. \quad (1)$$

Струм, який протікає стороною BC, створює в точці O індукцію поля  $\vec{B}_2$ , яка направлена перпендикулярно площині рисунка на нас (напрямок вектора  $\vec{B}_2$  визначається правилом свердлика). За формулою (4.9) індукція поля

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot OD} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

де  $OD = \frac{1}{2}OB = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ ,  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 60^\circ$ . Тоді

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{3}\pi a} (\sqrt{3} - 1). \quad (2)$$

Струм, який протікає стороною AC трикутника ABC, в точці O не створює магнітного поля, тому що точка O знаходиться на осі цього струму. За формулою (4.9) для струму, що протікає провідником 3 (сторона AC трикутника),  $\alpha_1 = \pi$ ,  $\alpha_2 = \pi$  і  $B_3 = 0$ . Результуюча індукція поля в точці O буде:

$$B_O = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{3}\pi a} (\sqrt{3} - 1) - \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{3}\pi a} = 1,34 \text{ мкТл.}$$

**Задача 4.4.** Провідником, який зігнутий у вигляді квадратної рамки (рис.4.7.) із стороною  $DC = a = 20$  см, протікає струм  $I = 10$  А. Визначити індукцію магнітного поля в точці A, яка рівновіддалена від вершин квадрата і знаходиться на відстані  $OA = x = a$  від центру квадрата. Визначити індукцію магнітного поля в центрі O квадрата.

**Розв'язок.** Згідно принципу суперпозиції (4.4) індукція магнітного поля в точці A є векторна сума індукцій  $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3, \vec{B}_4$ , які

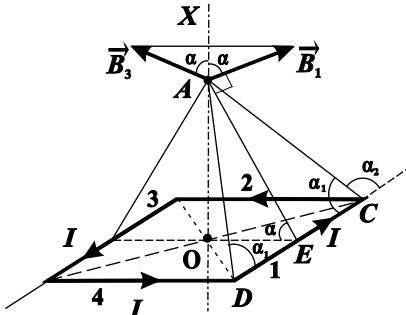


Рис. 4.7

створюються в цій точці струмами, що протікають в чотирьох провідниках, які є сторонами квадрата. Симетрія задачі така, що всі чотири індукції однакові за абсолютною величиною. На рис.4.7 зображені два вектори індукції, які відповідають полям, що створюються струмами в протилежних сторонах квадрата 1 і 3. Згідно закону (4.2), або правила свердлика, вектор  $\vec{B}_1$  перпендикулярний площині трикутника АСД, тобто вектор  $\vec{B}_1$  перпендикулярний АЕ. Подібні міркування справедливі і для векторів  $\vec{B}_2, \vec{B}_3, \vec{B}_4$ . Тому геометрична сума  $\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$  буде направлена вздовж осі ОХ, а її модуль буде дорівнювати сумі проєкцій всіх векторів на цю вісь, тобто

$$B_A = 4B_1 \cos \alpha, \quad (1)$$

де  $\cos \alpha$  із трикутника АОЕ дорівнює:

$$\cos \alpha = \frac{OE}{AE} = \frac{a/2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}}. \quad (2)$$

За формулою (4.9)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi AE} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Із трикутника АОЕ

$$AE = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}, \quad \alpha_2 = \pi - \alpha_1, \quad \cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1.$$

Із трикутника АДЕ

$$\cos \alpha_1 = \frac{DE}{AD} = \frac{DE}{\sqrt{DE^2 + AE^2}} = \frac{a/2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + x^2}}.$$

Тоді

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}} \cdot 2 \frac{a/2}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi\sqrt{(\frac{a^2}{4} + x^2)(\frac{a^2}{2} + x^2)}}. \quad (3)$$

Підставимо (2) і (3) в (1) і отримаємо:

$$B_A = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi(\frac{a^2}{4} + x^2)\sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2}}. \quad (4)$$

Формула (4) і визначає модуль індукції магнітного поля в точці А, що створюється провідником у вигляді квадрата. Якщо  $x = a$ , то

$$B_A = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{5\sqrt{3}\pi a} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{5\sqrt{3}\pi \cdot 0,2} \text{ Тл} = 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 6,5 \text{ мкТл}.$$

Індукцію магнітного поля в центрі О квадрата знайдемо із формули (4), прийнявши  $x = 0$ . Тоді

$$B_0 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} = 56,6 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 56,6 \text{ мкТл}.$$

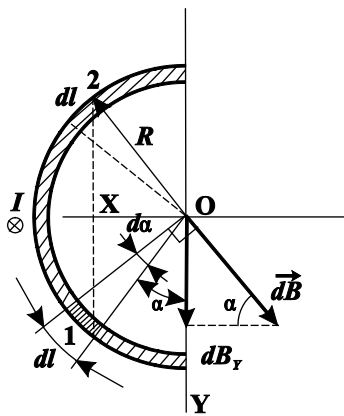


Рис. 4.8

**Задача 4.5.** Струм  $I$  тече по довгому прямому провіднику, переріз якого має форму тонкого напівкільця, радіус якого  $R$  (рис.4.8). Знайти індукцію магнітного поля в точці О.

**Розв'язок.** Даний провідник не можна вважати ні тонким прямим провідником, ні елементом струму. Скористатись готовими формулами для розрахунку індукції магнітного поля не можливо. Крім того магнітне поле

несиметричне, то і теорему про циркуляцію (4.7) використовувати складно. Тому розділимо провідник на дуже вузькі довгі прямі провідники, щоб кожний із них можна було вважати як тонкий довгий прямий провідник. Це дасть можливість скористатись формулою (4.10).

Розглянемо один такий провідник 1, ширина якого  $dl$  (рис.4.8). Елементарний струм такого провідника  $dI = \frac{I}{\pi R} dl$ . В точці О він створює магнітне поле, елементарна індукція якого згідно (4.10) запишеться так:

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi^2 R^2}.$$

Якщо розглянути симетричний відносно осі ОХ провідник 2 шириною  $dl$ , то легко побачити, що результуючий вектор  $d\vec{B}$  двох провідників буде направлений по осі ОУ, а  $dB_x = 0$ . Тобто результуюче магнітне поле буде мати напрямок по осі ОУ. За змінну інтегрування виберемо кут  $\alpha$  (рис.4.8). Тоді  $dl = R d\alpha$ , а

$$dB_y = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \alpha d\alpha.$$

Звідси після інтегрування отримаємо:

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} (-\cos \alpha \Big|_0^\pi) = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

**Задача 4.6.** Тонкою безмежно довгою стрічкою, ширина якої  $l$ , протікає струм  $I$ . Розрахувати індукцію магнітного поля цього струму в довільній точці А (рис.4.9).

**Аналіз.** Магнітне поле створюється струмом, що протікає по плоскому провіднику. Розрахувати індукцію поля за відомими формулами, які отримані за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа або закону повного струму, не вдається. Тому отримаємо формули для розрахунку індукції магнітного поля для таких струмів за допомогою закону (4.2).

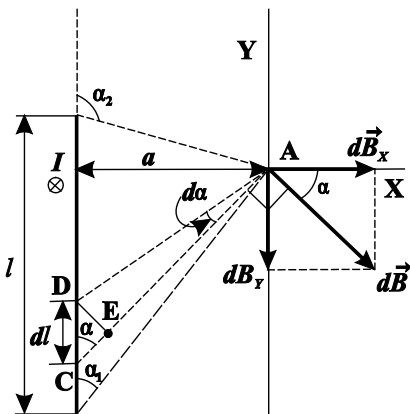


Рис. 4.9

**Розв'язок.** Розділимо безмежно довгу стрічку на дуже вузькі прямі і безмежно довгі ділянки, щоб кожену із них можна було вважати за тонкий прямий безмежно довгий провідник. Розглянемо одну таку ділянку стрічки, ширина якої  $dl = DC$  (рис.4.9). Струм такої ділянки

$$dI = \frac{I}{l} dl \quad (1)$$

створює в точці А магнітне поле, модуль індукції якого за формулою (4.2) буде

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi aC} = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi a l} \sin \alpha, \quad (2)$$

де  $a$  – відстань точки А до стрічки,  $\alpha$  – кут DCA,  $AC = a/\sin \alpha$ .

$$DE = AC d\alpha = \frac{a d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Із трикутника DEC отримаємо, що

$$dl = DC = DE / \sin \alpha = a d\alpha / \sin^2 \alpha.$$

Тоді формула (2) перепишеться так:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \frac{d\alpha}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Знайдемо проєкції вектора  $d\vec{B}$  на осі X і Y :

$$dB_x = dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sin \alpha},$$

$$dB_y = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} d\alpha.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d(\sin \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \ln \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}, \quad (4)$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (5)$$

Якщо ввести поняття лінійної густини струму (струм, що приходить на одиницю ширини стрічки)  $i = I/l$ , то

$$B_x = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}, \quad (6)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (7)$$

У випадку симетричного розташування точки А ( $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ ) отримаємо, що  $\sin \alpha_2 = \sin(\pi - \alpha_1) = \sin \alpha_1$  і

$$B_x = 0, \text{ а } B_y = \frac{\mu_0 i (\pi - 2\alpha_1)}{2\pi}.$$

Для стрічки безмежної ширини (тобто безмежної площини)  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$  і формули (6) і (7) приймуть вигляд:

$$B_x = 0, \text{ а } B_y = \frac{\mu_0 i}{2}.$$

Тобто, поле площини з рівномірно розподіленим струмом з лінійною густиною  $i$  є однорідним.

**Задача 4.7.** При якому співвідношенні між довжиною ( $l$ ) і діаметром ( $d$ ) соленоїда (рис.4.10) індукція магнітного поля на середині його осі може бути розрахована за приблизною формулою дуже довгого соленоїда при відносній похибці, що не перевищує 2%?

**Розв'язок.** Відносна невизначеність

$$\eta = \frac{B - B_{\text{прибл}}}{B} \cdot 100\%, \quad (1)$$



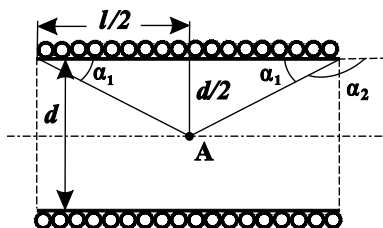


Рис.4.10

де  $B$  визначається за формулою (4.14) і вважається точним значенням індукції в точці  $A$ ,  $B_{\text{прибл}}$  визначається за формулою (4.15) і є приблизним значенням індукції в точці  $A$ . Так як точка  $A$  знаходиться на осі посередині соленоїда, то  $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$  і

$\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$ . Підставимо у формулу (1) вирази (4.14) і (4.15). Тоді отримаємо, що

$$\frac{1 - \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} \leq \eta, \quad (2)$$

де  $\eta = 0,02$ ,  $\cos \alpha_1 = \frac{l}{2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$  (див. рис.4.10).

Вираз (2) перетворимо до вигляду:

$$\cos \alpha_1 \geq \frac{1}{\eta + 1}, \quad \text{або}$$

$$\frac{l}{2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \geq \frac{1}{\eta + 1}.$$

Звідки після нескладних перетворень отримаємо, що

$$\frac{d}{l} \leq \sqrt{\eta(\eta + 2)},$$

або

$$\frac{l}{d} \geq \frac{1}{\sqrt{\eta(\eta + 2)}} = \frac{1}{\sqrt{0,02 \cdot 2,02}} \approx 5.$$

**Задача 4.8.** Круглим, однорідним, прямим провідником, радіус перерізу якого  $R$ , тече постійний струм, густина якого  $\vec{j}$ . Знайти вектор індукції магнітного поля цього струму в точці, положення якої відносно осі проводу визначається радіус-вектором  $\vec{r}$ . Магнітна проникність скрізь дорівнює одиниці.

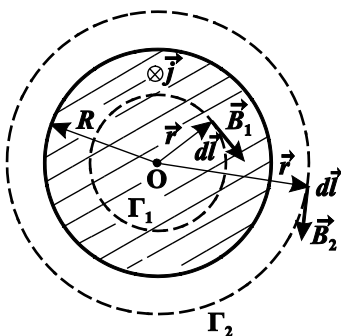


Рис. 4.11

поля дозволяє скористатись теоремою про циркуляцію вектора індукції магнітного поля (4.7).

**Розв'язок.** Симетрія поля дозволяє стверджувати, що модулі вектора індукції поля в кожній точці контуру  $\Gamma_1$  є однаковими. Це ж саме має місце і для контуру  $\Gamma_2$ . В кожній точці контуру  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  елемент контуру  $d\vec{l}$  співпадає з напрямком вектора  $\vec{B}$ .

Для випадку  $r < R$  ліва частина формули (4.7) може бути записана так:

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B}_1 d\vec{l} = \oint_{\Gamma_1} B_1 dl \cos 0^\circ = B_1 \oint_{\Gamma_1} dl = B_1 \cdot 2\pi r, \quad (1)$$

а права частина –

$$\mu_0 \sum I = \mu_0 \pi r^2 j. \quad (2)$$

Прирівнявши (1) і (2), отримаємо:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2} jr. \quad (3)$$

Врахувавши напрямки векторів  $\vec{B}_1, \vec{j}$  і  $\vec{r}$  можемо записати, що для випадку  $r < R$ .

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r}. \quad (4)$$

Аналогічно для контуру  $\Gamma_2$  ліва частина формули (4.7) запишеться як

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B}_2 d\vec{l} = B_2 \cdot 2\pi r, \quad (5)$$

а права

**Аналіз.** Форма провідника така, що струм в такому провіднику створює симетричне магнітне поле, силові лінії якого є концентричні кола, центри яких лежать на осі провідника. На рис.4.11. показаний переріз провідника, дві силові лінії  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  (пунктирні лінії) для випадку  $r < R$  і  $r > R$ , напрямком вектора густини струму  $\vec{j}$ . Така симетрія магнітного

$$\mu_0 \sum I = \mu_0 \pi R^2 j, \quad (6)$$

Прирівнявши (5) і (6) знайдемо, що для випадку  $r > R$

$$B_2 = \frac{\mu_0 R^2}{2} \cdot \frac{j}{r}, \quad (7)$$

або у векторній формі

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 R^2}{2r^2} \cdot \vec{j} \times \vec{r}. \quad (8)$$

**Задача 4.9.** В однорідному магнітному полі ( $B = 0,05$  Тл) в площині, яка перпендикулярна до ліній індукції, розташоване провідне напівкільце, довжина якого  $l = 5$  см. По напівкільцю протікає

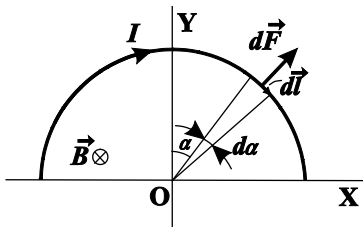


Рис. 4.12

струм, сила якого  $I = 0,1$  А (рис.4.12). Знайти результуючу силу, яка діє на напівкільце. Чи зміниться ця сила, якщо провідник випрямити?

**Аналіз.** Сила Ампера (4.17)

$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ , яка діє на елемент струму  $Id\vec{l}$  зі сторони поля,

показана на рис.4.12. За умовою задачі у всіх точках напівкільця, кут між  $Id\vec{l}$  і  $\vec{B}$  дорівнює  $\pi/2$ . Тому в скалярній формі сила Ампера буде мати вид

$$dF = IdlB. \quad (1)$$

Якщо струм в провіднику направлений за годинниковою стрілкою, то в заданому полі сили  $d\vec{F}$ , що діють на всі елементи  $Id\vec{l}$ , направлені вздовж радіусів напівкільця і розтягують його. Всі сили  $d\vec{F}$  лежать в площині рисунка 4.12. При переході від одного елемента напівкільця до іншого напрям сили  $d\vec{F}$  неперервно

змінюється. Тому для знаходження результуючої сили будемо окремо шукати їх проекції на осі координат  $OX$  і  $OY$ :

$$F_X = \int_l dF_X, \quad F_Y = \int_l dF_Y, \quad (2)$$

де  $F_X$ ,  $F_Y$  – проекції невідомої сили  $\vec{F}$ ,  $dF_X$  і  $dF_Y$  – проекції елементарних сил на осі координат. Індекс  $l$  означає, що інтегрування ведеться по всьому напівкільцю. При цьому не враховується дія на півкільце магнітного поля підвідних провідників, а також взаємодія окремих елементів напівкільця. Якщо радіус підвідних провідників  $r \sim 1$  мм, то при силі струму  $I = 0,1$  А індукція магнітного поля біля проводу буде порядку  $B \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$  Тл, що значно менше величини індукції поля заданої в умові задачі.

**Розв’язок.** Якщо врахувати симетрію провідника (напівкільце) і вибрати осі  $OX$  і  $OY$  так, як показано на рис.4.12, то проекція результуючої сили на вісь  $OX$

$$F_X = \int_l dF_X = 0.$$

Проекція елементарної сили на вісь  $OY$  (рис.4.12)

$$dF_Y = dF \cos \alpha = IBdl \cos \alpha. \quad (3)$$

При переході від одного елемента  $dl$  до іншого кут  $\alpha$  змінюється, тобто вираз (3) містить дві змінних. Однак  $dl = R d\alpha$ , де  $R$  – радіус напівкільця, і

$$dF_Y = IBR \cos \alpha d\alpha. \quad (4)$$

При інтегруванні по напівкільцю кут  $\alpha$  змінюється від  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ . Тому

$$F_Y = IBR \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = 2IBR.$$

Врахувавши, що  $R = l/\pi$ , отримаємо:

$$F_Y = \frac{2IBl}{\pi} = 2 \cdot 0,1 \cdot 0,05 \cdot 5 \cdot 10^{-2} / \pi \text{ Н} = 0,16 \text{ мН}.$$

Очевидно, що результуюча сила  $F = F_y$  направлена по осі ОУ. Якщо провідник випрямити, то всі елементарні сили  $d\vec{F}$  будуть паралельні одна одній. Тоді  $F' = IBl$ , що більше  $F_y$  в  $\pi/2$  рази.

**Задача 4.10.** В одній площині з нескінченно довгим прямим проводом, по якому протікає струм силою  $I_1 = 4$  А, розташована прямокутна рамка із сторонами  $a = 20$  см,  $b = 10$  см, якою протікає струм  $I_2 = 0,1$  А (рис.4.13). Менші сторони рамки паралельні прямому струму, причому ближча до прямого струму сторона знаходиться на відстані  $c = 10$  см. Напрямки струмів в провіднику і рамці показані на

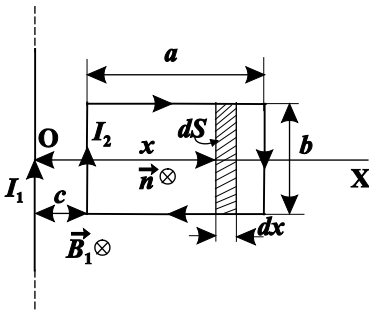


Рис. 4.13

рис.4.13. Визначити роботу, яку необхідно виконати, щоб повернути рамку на кут  $\pi$  навколо дальньої малої сторони.

**Аналіз.** Прямокутна рамка зі струмом знаходиться в неоднорідному магнітному полі прямого струму. Поле підвідних провідників не враховується оскільки прямий провідник зі струмом  $I_1$  нескінченно довгий. Індукцію магнітного поля такого прямого струму можна розрахувати за формулою (4.10). Робота зовнішніх сил ( $A_{cm}$ ) при повільному повороті рамки дорівнює роботі сил поля ( $A$ ), якщо її взяти з протилежним знаком. Згідно формули (4.24)

$$A_{cm} = -A = -I_2(\Phi_1 - \Phi_2), \quad (1)$$

де  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  – магнітні потоки через площу рамки до і після повороту.

Внаслідок неоднорідності поля прямого струму магнітний потік будемо знаходити за формулою (4.23), де  $d\vec{S} = bdx \cdot \vec{n}$  ( $\vec{n}$  позитивна нормаль до площі рамки, що утворює правий гвинт з напрямком струму  $I_2$ ). Тому

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = BdS \cos 0^\circ = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} bdx, \quad (2)$$

де  $x$  – відстань від прямого струму  $I_1$  до елементарної площадки  $dS = bdx$ . Інтегруючи вираз (2) отримуємо, що

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \cdot \int_c^{c+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c}. \quad (3)$$

При повороті рамки на кут  $180^\circ$  навколо дальньої малої сторони рамки, кут між  $\vec{n}$  і  $\vec{B}$  буде складати  $180^\circ$  і  $\vec{B}d\vec{S} = -BdS$ , тому

$$\Phi_2 = -\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \cdot \int_{c+a}^{c+2a} \frac{dx}{x} = -\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{c+2a}{c+a}. \quad (4)$$

Підставимо (3) і (4) в (1):

$$A_{cm} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{c+2a}{c} = 7,3 \cdot 10^{-9} \text{ Дж} = 7,3 \text{ нДж}.$$

**Задача 4.11.** В центрі соленоїда, довжина якого  $l = 0,8$  м, діаметр витків  $d = 8$  см, число витків  $N_1 = 800$ , розташована плоска котушка, яка має  $N_2 = 20$  витків, площа яких  $S = 0,4$  см<sup>2</sup> кожна. Нормаль до площини витків котушки складає кут  $\varphi = 60^\circ$  з віссю соленоїда (рис.4.14). Обмоткою соленоїда протікає струм, сила якого  $I_1 = 2$  А, а обмоткою котушки – струм силою  $I_2 = 0,05$  А.

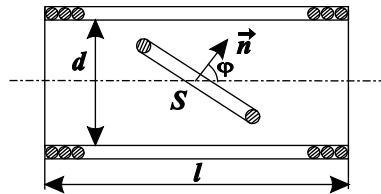


Рис. 4.14

Визначити :

- 1) обертальний момент, який діє на котушку в початковому положенні;
- 2) роботу, яку здійснюють сили поля при повороті котушки до положення стійкої рівноваги;
- 3) роботу зовнішніх сил при переміщенні котушки (після повороту) із центру соленоїда в середину однієї із основ соленоїда.

**Аналіз.** Котушка знаходиться в магнітному полі соленоїда. Так як котушка плоска і  $\sqrt{S} \ll d$ , то це дозволяє вважати, що в межах витків котушки поле соленоїда однорідне. В такому полі на котушку діє обертальний момент (4.20)  $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ , де  $p_m = I_2 S N_2$  –

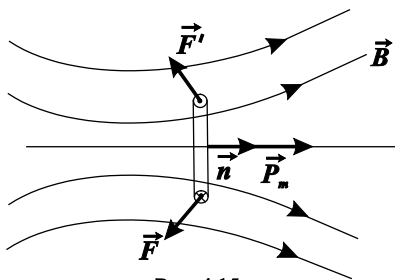


Рис. 4.15

магнітний момент котушки,  $B$  – індукція поля соленоїда. Кут між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  може бути або  $\varphi$ , або  $\pi - \varphi$  в залежності від того як направлені струми в соленоїді і котушці. При переміщенні витка зі струмом  $I$  в зовнішньому магнітному полі

робота сил магнітного поля за формулою (4.24) буде:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (1)$$

де  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  – магнітні потоки, що пронизують виток в початковому і кінцевому положеннях. Формула (1) справедлива при  $I = \text{const}$ . Однак, при переміщенні провідника в магнітному полі в ньому виникає е.р.с. індукції, яка змінює  $I$ . Тому формула (1) справедлива при компенсації е.р.с. індукції, або при умові повільного руху провідника. При повороті котушки в положення стійкої рівноваги сили поля здійснюють позитивну роботу, яка може бути розрахована за формулою (1). Робота зовнішніх сил при повільному переміщенні провідника дорівнює роботі сил поля, взятій з протилежним знаком. При переміщенні котушки із центра соленоїда в середину його основи зовнішні сили здійснюють позитивну роботу, так як в напрямку від центра соленоїда до основи індукція магнітного поля зменшується. На виток в такому неоднорідному полі діють сили  $\vec{F}$  і  $\vec{F}'$ , які втягують його в соленоїд (рис.4.15).

**Розв'язок.** 1) Так як для соленоїда  $l/d = 10$ , то згідно розв'язку задачі 4.7 даний соленоїд практично можна розглядати як нескінченно довгий. При цьому похибка визначення індукції за наближеною формулою (4.15) буде складати 0,5%.

Тоді в центрі соленоїда

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 N_1 I_1 / l. \quad (2)$$

За формулою (4.20) отримаємо величину обертового моменту, що діє на котушку в початковому положенні, врахувавши, що  $p_m = I_2 S N_2$ . Тобто

$$M = \mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 S (\sin \varphi) / l = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Нм.}$$

2) В початковому положенні котушку пронизує магнітний потік, який згідно (4.23) буде:

$$\Phi_1 = B_1 S N_2 \cos \varphi.$$

В положенні стійкої рівноваги  $M = 0$ , а згідно (4.22)  $W = -p_m B$  є мінімальна величина. Це буде тоді, коли  $\varphi = 0$ . Це означає, що  $\Phi_2 = B_1 S N_2$ . Підставляючи вирази потоків  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  в (1) і враховуючи (2), отримаємо:

$$\begin{aligned} A_1 &= I_2 B_1 N_2 S (1 - \cos \varphi) = \mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 S (1 - \cos \varphi) / l = \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 0,05 \cdot 800 \cdot 20 \cdot 0,4 \cdot 10^{-4} (1 - 1/2) / 0,8 \text{ Дж} = \\ &= 5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} = 50 \text{ нДж.} \end{aligned}$$

3) Індукція магнітного поля в центрі основи соленоїда

$$B_2 = B_1 / 2.$$

Це означає, що  $\Phi'_1 = \Phi_2$ , а  $\Phi'_2 = \Phi_2 / 2$ . Тому робота сторонніх сил при переміщенні котушки буде:

$$A_{cm} = -I_2 (\Phi'_2 - \Phi'_1) = \frac{I_2 \Phi_2}{2} = \mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 S / (2l) = 50 \text{ нДж.}$$



## 4.6. Задачі

**4.12.** Заряд  $q > 0$  рухається із швидкістю  $\vec{v}$ . Вказати напрямок і порівняти модулі магнітної індукції  $\vec{B}$  в точках 1 і 2 з радіус-векторами  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$  (рис.4.16 а і б). Для випадку, який показаний

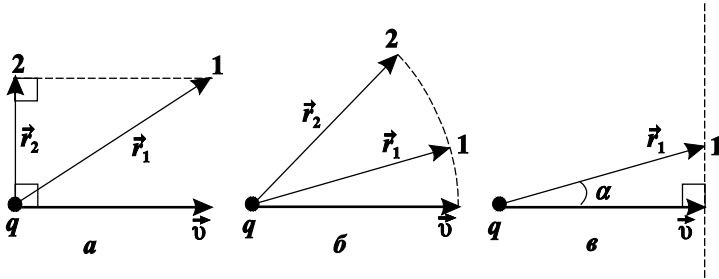


Рис.4.16

на рис.4.16 в, знайти кут  $\alpha$ , при якому індукція  $|\vec{B}|$  приймає максимальне значення.

**4.13.** Два протони рухаються паралельно один одному з однаковою швидкістю  $v = 300 \text{ км/с}$ . Знайти відношення сил магнітної та електричної взаємодії цих протонів.

**4.14.** Чи може індукція магнітного поля в вакуумі визначатись наступними формулами:

а)  $\vec{B} = \mu_0 a (x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k})$ ; б)  $\vec{B} = \mu_0 a (x\vec{i} + 2y\vec{j} - 3z\vec{k})$ ;

в)  $\vec{B} = \mu_0 a (y\vec{i} + z\vec{j})$ , де  $a$  – стала величина? У випадку позитивної відповіді визначити густину струму  $\vec{j}(x, y, z)$ .

**4.15.** Визначити циркуляцію вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  вздовж контурів  $\Gamma$ . Конфігурація струмів  $I$  і форма контурів показані на рис.4.17. Напрямок обходу по контуру вказаний стрілкою на контурі.

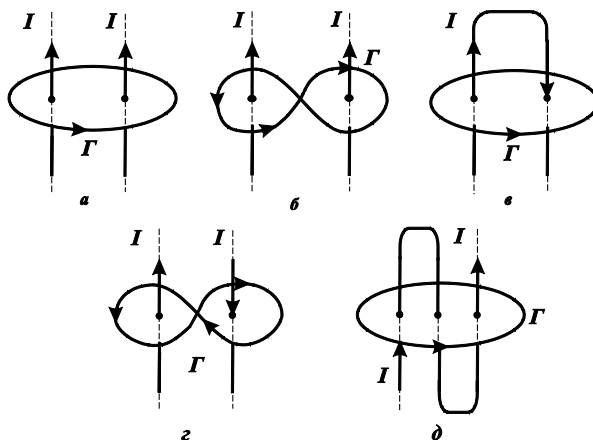


Рис.4.17.

**4.16.** Для провідників, які зображені на рис.4.18. розрахувати магнітну індукцію  $\vec{B}$  в точці  $O$ . Геометричні розміри і напрямки струмів  $I$  вказані на рисунках.  $I = 5\text{A}$ ,  $R = 10\text{см}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

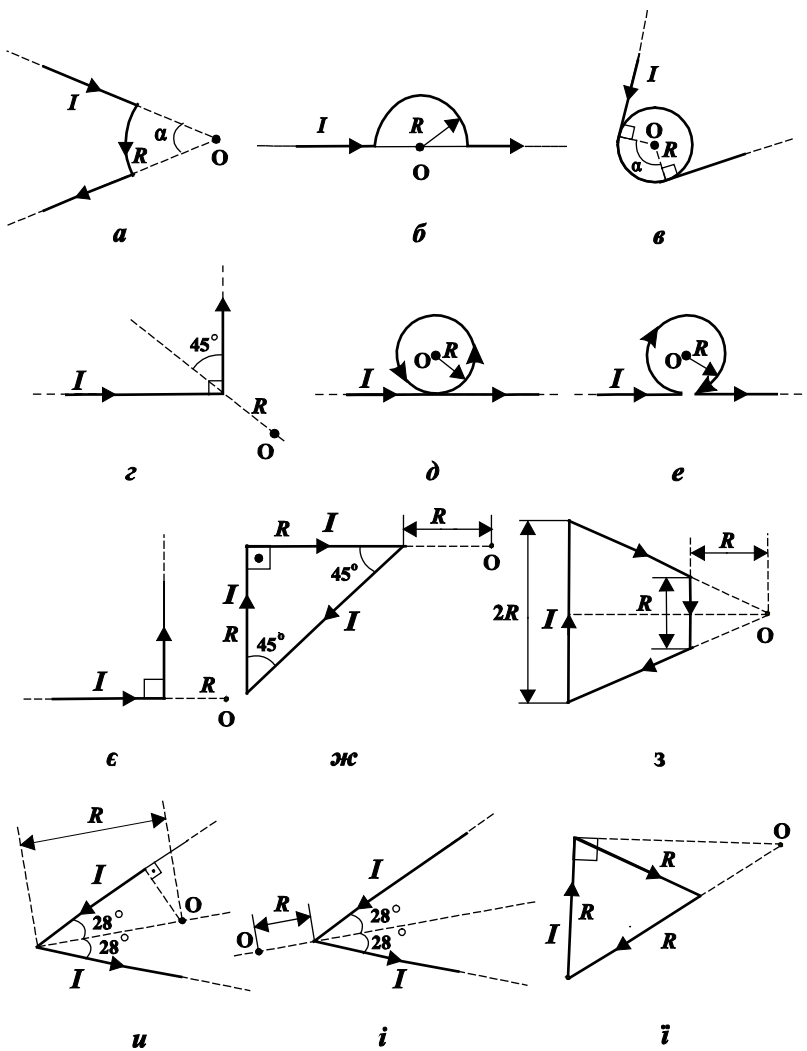


Рис. 4.18

4.17. Знайти індукцію магнітного поля в точці  $O$  контуру зі струмом  $I = 5$  А, який показаний на рис.4.19 *а*, радіуси  $a = 4$  см,  $b = 8$  см, кут  $\varphi = 90^\circ$ . На рис.4.19 *б* радіус  $a = 4$  см, сторона  $b = 4$  см.

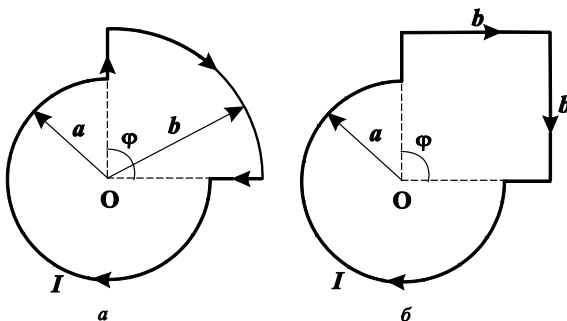


Рис. 4.19

**4.18.** Визначити індукцію магнітного поля в точці  $O$ , якщо провідник зі струмом  $I$  має вид, що показаний на рис.4.20:  $a$  і  $б$ .

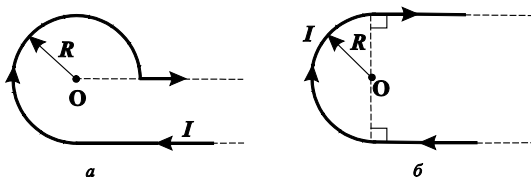


Рис. 4.20

**4.19.** Дуже довгий провідник зі струмом  $I = 5$  А зігнутий у формі прямого кута. Знайти індукцію магнітного поля в точці, яка віддалена від площини провідника на  $l = 35$  см і знаходиться на перпендикулярі до провідників, який проходить через точку згину.

**4.20.** До вершин  $A$  і  $C$  рівностороннього трикутника  $ABC$ , виготовленого із однорідного провідника, прикладена різниця потенціалів  $U$  (рис.4.21). Визначити індукцію магнітного поля в центрі трикутника, якщо сторона трикутника має довжину  $a$ , питомий опір проводу  $\rho$  поперечний переріз проводу  $S$ . Поле підвідних провідників не враховувати.

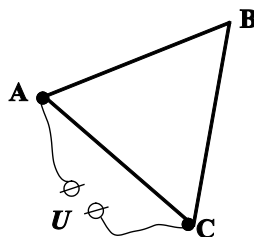


Рис. 4.21

**4.21.** На рис.4.22 приведена схема симетричного розгалуження струмів. Всі провідники прямолінійні, нескінченно довгі і лежать в одній площині. Визначити індукцію магнітного поля на лінії, що перпендикулярна до площини струмів і проходить через точку А, якщо сила струмів в гілці 2 і гілці 3 дорівнює  $I$ .

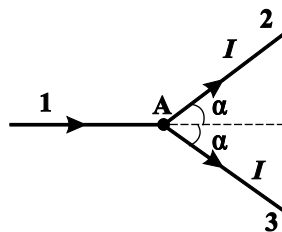


Рис. 4.22

**4.22.** Струм  $I = 1$  А циркулює в контурі, який має форму рівностороннього трикутника із стороною  $a = 10$  см. Визначити індукцію магнітного поля в центрі трикутника.

**4.23.** Визначити індукцію магнітного поля, що створюється струмом  $I = 6$  А, який протікає по проводу зігнутому у вигляді прямокутника із сторонами  $a = 16$  см і  $b = 30$  см, в його центрі.

**4.24.** Плоским замкнутим контуром довільної форми протікає струм  $I$  (рис.4.23). Визначити напрямок індукції магнітного поля в точці А, яка лежить всередині контуру, і в точці В, яка лежить зовні контуру.

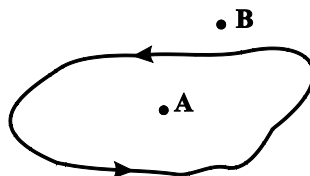


Рис. 4.23

**4.25.** Визначити індукцію магнітного поля  $B$  в центрі О плоского замкнутого контуру, зображеного на рис.4.24, по якому протікає струм  $I$ . Контур складається із двох дуг, радіус яких  $R$  і двох паралельних прямих, які знаходяться на відстані  $2a$  одна від одної.

Прийняти  $2a = 10$  см,  $R = 20$  см,  $I = 5$  А.

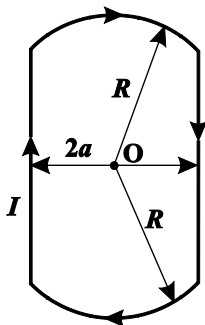


Рис. 4.24

**4.26.** Струм, сила якого  $I = 10$  А, циркулює в плоскому контурі, який має форму прямокутного трикутника, катети якого  $a = 30$  см і  $b = 40$  см. Визначити індукцію магнітного поля: а) в центрі описаного навколо трикутника кола; б) в центрі вписаного в трикутник кола.

**4.27.** Струм  $I$  тече тонким провідником, який має вид правильного  $n$  – кутника, що вписаний в коло, радіус якого  $R$ . Знайти індукцію магнітного поля в центрі даного контуру. Дослідити отриманий вираз для індукції в центрі  $n$  – кутника при  $n \rightarrow \infty$ .

**4.28.** Знайти індукцію магнітного поля в центрі контуру, який має вид прямокутника, діагональ якого  $d = 16$  см, кут між діагоналями  $\varphi = 30^\circ$  і струм в контурі  $I = 5$  А.

**4.29.** Струм  $I = 5$  А тече тонким провідником, який зігнутий так, як показано на рис.4.25. Радіус зігнутої частини провідника  $R = 120$  мм, кут  $2\varphi = 90^\circ$ . Визначити індукцію магнітного поля в точці О.

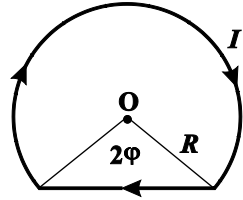


Рис. 4.25

**4.30.** Визначити індукцію магнітного поля в центрі О плоскої спіралі, якою протікає струм силою  $I$ . Спіраль обмежена колами з радіусами  $R_1$  і  $R_2$  (рис.4.26.) Загальне число витків спіралі  $N$ . Прийняти:  $I = 5$  А,  $R_1 = 20$  см,  $R_2 = 2$  см,  $N = 1800$ . Поле підвідних провідників не враховувати.

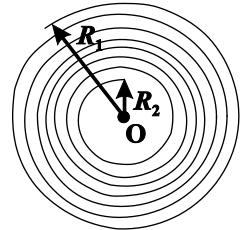


Рис.4.26.

**4.31.** Діаметр витків соленоїда в  $\eta = 4$  рази більший довжини його осі. Густота намотки витків  $n = 200$  см $^{-1}$ . Витками соленоїда протікає струм  $I = 0,1$  А. Визначити індукцію магнітного поля: а) посередині осі соленоїда; б) по центру однієї із його основ.

**4.32.** Довгий прямий соленоїд має 35 витків на 1 см довжини. Витками соленоїда протікає струм силою 2 А. Визначити індукцію магнітного поля:

- а) всередині соленоїда біля його середини;
- б) в центрі однієї із його основ.

**4.33.** На дерев'яний тороїд з малим поперечним перерізом намотано рівномірно  $N = 2500$  витків проводу, якими протікає струм.

Знайти відношення  $\eta$  індукції магнітного поля всередині тороїда до індукції магнітного поля в центрі тороїда.

**4.34.** Струм  $I$  тече вздовж довгої тонкостінної трубки, радіус якої  $R$ . По всій довжині трубки є поздовжня проріз, ширина якої  $h$ . Знайти індукцію магнітного поля всередині трубки при умові, що  $h \ll R$ .

**4.35.** Струм  $I$  тече по поверхні довгої металічної труби, радіус якої  $R$ . Знайти індукцію магнітного поля  $B(r)$ , де  $r$  – відстань від осі труби. Побудувати графік залежності  $B$  від  $r$ .

**4.36.** Струм рівномірно розподілений по перерізу суцільного проводу, радіус якого  $R$ . Густина струму  $j$ . Визначити індукцію магнітного поля  $B(r)$ , де  $r$  – відстань від осі проводу. Побудувати графік залежності  $B$  від  $r$ .

**4.37.** При виробництві поліетиленової плівки широка смуга протягується роликami із швидкістю  $v = 15$  м/с (рис.4.27). В процесі обробки (головним чином із-за тертя) поверхня плівки рівномірно заряджається із поверхневою густиною заряду  $\sigma$ . Оцінити максимальне значення індукції магнітного поля  $B$  біля поверхні плівки, вважаючи, що при напруженості електричного поля  $E = 20$  кВ/см в повітрі виникає електричний розряд.

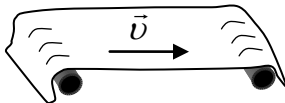


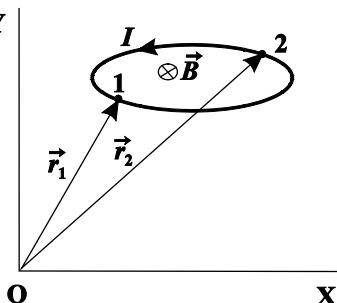
Рис.4.27.

**4.38.** Шинами електростанції є паралельні мідні смуги, довжина яких  $l = 3$  м, і знаходяться вони на відстані  $r = 50$  см. При короткому замиканні через них може пройти струм  $I = 10000$  А.

а) З якою силою взаємодіють при цьому шини?

б) Чи зміниться відповідь, якщо шини будуть не мідними, а залізними?

**4.39.** Плоский контур зі струмом  $I$  знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор індукції якого перпендикулярний до площини контуру (рис.4.28). Знайти силу  $\vec{F}$ , яка діє на ділянку контуру між точками 1 і 2 з радіус-векторами  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$ . Показати напрямок цієї сили. Чому дорівнює сила  $\vec{F}$ , яка діє на замкнутий контур?



**Рис.4.28.**

**4.40.** Знайти магнітний момент тонкого колового витка зі струмом, якщо радіус витка  $R = 100$  мм, а індукція магнітного поля в його центрі  $B = 6$  мкТл.

**4.41.** Квадратна рамка із струмом  $I = 0,9$  А розташована в одній площині з довгим прямим провідником, по якому протікає струм  $I_0 = 5$  А. Сторона рамки  $a = 8$  см. Через середини протилежних сторін проходить вісь рамки, яка паралельна провіднику і знаходиться від нього на відстані, що в  $\eta = 1,5$  рази більша сторони рамки. Знайти: а) силу Ампера, що діє на рамку; б) механічну роботу, яку необхідно виконати для повороту рамки навколо осі на  $180^\circ$ , якщо струми підтримуються постійними.

**4.42.** Дві невеликі однакові котушки розташовані так, що їхні осі лежать на одній прямій. Відстань між котушками  $l = 2$  м, яка значно більша їх лінійних розмірів. Число витків кожної котушки  $N = 150$ , радіус витків  $r = 50$  мм. З якою силою  $F$  взаємодіють котушки, якщо їхніми обмотками тече струм  $I = 1$  А?

**4.43.** Невеликий виток зі струмом знаходиться на відстані  $r$  від довгого прямого провідника зі струмом  $I$ . Магнітний момент витка дорівнює  $\vec{p}_m$ . Знайти модуль і напрямок вектора сили, яка діє на виток. Якщо вектор  $\vec{p}_m$ :

- а) паралельний прямому провіднику;
- б) направлений по радіус вектору  $\vec{r}$ ;



в) співпадає по напрямку з магнітним полем струму  $I$  в місці розташування витка.

**4.44.** Невелика котушка зі струмом, що має магнітний момент  $\vec{p}_m$ , знаходиться на осі колового витка, що має радіус  $R$ , яким протікає струм  $I$ . Знайти модуль вектора сили, яка діє на котушку, якщо її відстань від центру витка дорівнює  $x$ , а вектор  $\vec{p}_m$  співпадає за напрямком з віссю витка.

**4.45.** Два контура, що мають магнітні моменти  $\vec{p}_{m_1}$  і  $\vec{p}_{m_2}$ , знаходяться на відстані  $l$  один від одного, яка значно більша їхніх розмірів. Написати вираз для енергії  $W$  і сили  $F$  взаємодії контурів при їх взаємному розташуванні, як показано на рис.4.29.

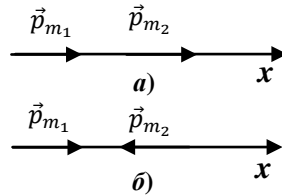


Рис.4.29.

Визначити силу взаємодії двох котушок з магнітними моментами  $p_{m_1} = 4 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$  і  $p_{m_2} = 6 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$ , якщо їх осі лежать на одній прямій і відстань між котушками, яка дорівнює  $l = 20 \text{ см}$ , значно більша за їх лінійні розміри.

#### Додаткові задачі

**4.47.** Три довгі прямі проводи розташовані в одній площині паралельно один одному на відстані  $a = 3 \text{ см}$  один від одного. Проводами протікають струми  $I_1 = I_2$  і  $I_3 = -(I_1 + I_2)$ . Визначити положення прямої лінії, на якій індукція магнітного поля, що створюється струмами, дорівнює нулю.

**4.48.** Двома довгими проводами, які розташовані паралельно один одному на відстані  $a = 6 \text{ см}$ , протікають в одному напрямку струми  $I_1 = 4 \text{ А}$  і  $I_2 = 8 \text{ А}$ . Визначити індукцію магнітного поля в точці, яка віддалена від першого проводу на відстань  $b = 2 \text{ см}$ , а від другого на відстань  $a = 6 \text{ см}$ .

**4.49.** Пустою тонкостінною трубою, радіус якої  $R_2 = 4 \text{ см}$ , протікає струм  $I = 15 \text{ А}$  в одному напрямку, а в оберненому напрямку цей же струм протікає суцільним проводом, радіус якого  $R_1 = 1 \text{ мм}$ , що прокладений по осі труби. Довжина труби  $l = 25 \text{ м}$ . Визначити

магнітний потік такої системи. Магнітним полем всередині металу проводу знехтувати.

**4.50.** По нескінченному прямому провіднику зігнутому під кутом  $\alpha = 120^\circ$  тече струм  $I = 50$  А. Визначити магнітну індукцію в точках на бісектрисі кута на відстані  $a = 5$  см по обидва боки від його вершини.

**4.51.** Два паралельних досить довгих прямих проводи знаходяться на відстані 15см один від одного. В проводах підтримуються однакові за величиною струми, сила яких 15 А. Напрямки струмів взаємно протилежні. Яку роботу на одиницю довжини (1м) проводів виконує магнітне поле при переміщенні проводів до відстані 30см? За рахунок яких джерел енергії виконується ця робота?

**4.52.** Вздовж жорсткого проводу, по якому пропускається змінний струм від міської мережі, розташована м'ягка тонка металева нитка. В одному випадку через нитку пропускається теж змінний струм від міської мережі. В іншому випадку через нитку пропускається постійний струм. Що буде відбуватись з ниткою в одному і в другому випадках?

## 5. МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

### 5.1. Питання теми

1. Намагнічення речовини. Величини, що характеризують намагнічення.
2. Феромагнетики, їхня природа та властивості.
3. Енергія магнітного поля.

### 5.2. Основні визначення та формули

1. Намагніченість (вектор намагнічування)  $\vec{J}$  визначається магнітним моментом одиниці об'єму магнетика:

$$\vec{J} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_{mi}}{\Delta V}, \quad (5.1)$$

де  $N$  – число частинок, які містяться у фізично нескінченно малому об'ємі  $\Delta V$ ,  $\vec{p}_{mi}$  – магнітний момент  $i$  – тої частинки.

2. Вектором напруженості  $\vec{H}$  магнітного поля називається лінійна комбінація векторів індукції магнітного поля  $\vec{B}$  і  $\vec{J}$  :

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{J}. \quad (5.2)$$

3. Вектори  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  зв'язані співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad (5.3)$$

де  $\mu$  – магнітна проникність середовища (для вакууму  $\mu = 1$ ).

4. Умови на межі розділу двох магнетиків.

$$B_{1n} = B_{2n}, H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (5.4)$$

5. Циркуляція вектора напруженості  $\vec{H}$  вздовж замкнутого контуру  $\Gamma$  дорівнює алгебраїчній сумі струмів, які охоплюються цим контуром:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} H dl \cos(\vec{H} \wedge d\vec{l}) = \oint_{\Gamma} H_l dl = \sum I, \quad (5.5)$$

де  $H_l$  проекція вектора  $\vec{H}$  на напрямок елемента контуру  $d\vec{l}$ .

6. Магнітна індукція в середині довгого соленоїда з магнітним осердям

$$B = \mu\mu_0 n I, \quad (5.6)$$

де  $n$  – число витків, які приходяться на одиницю довжини соленоїда,  $I$  – сила струму у витках,  $\mu$  – магнітна проникність речовини осердя.

7. Індуктивність довгого соленоїда, об'єм якого  $V$  з магнітним осердям

$$L = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (5.7)$$

8. Енергія  $W$  магнітного поля, яке створене струмом  $I$  в соленоїді або тороїді з індуктивністю  $L$ , визначається за формулою:

$$W = LI^2/2. \quad (5.8)$$

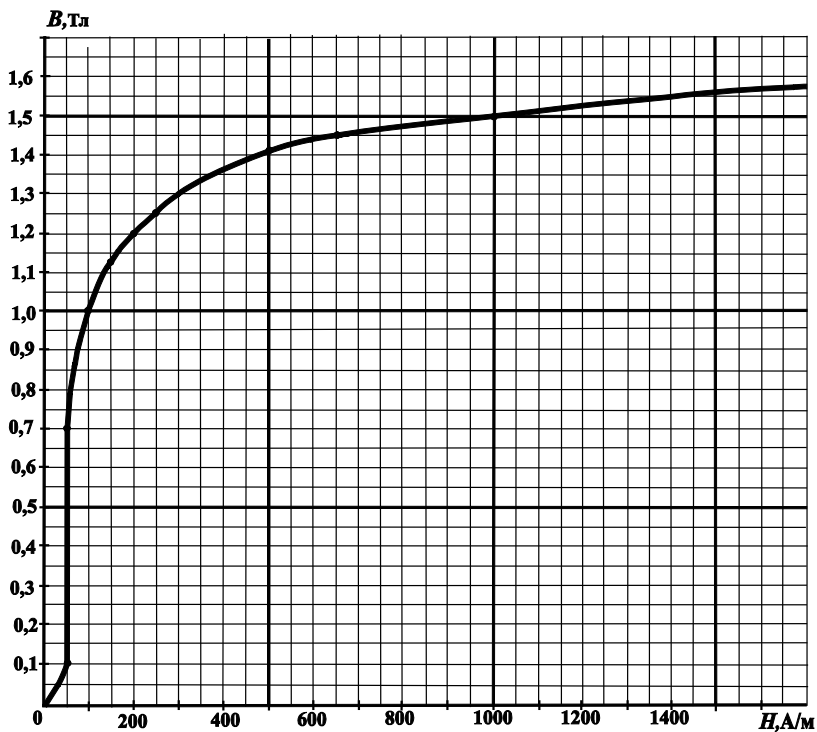
9. Об'ємна густина енергії магнітного поля:

$$\omega = \mu_0 \mu H^2 / 2 = B^2 / (2\mu_0 \mu) = BH / 2, \quad (5.9)$$

де  $B$  – магнітна індукція,  $H$  – напруженість магнітного поля,  $\mu$  – відносна магнітна проникність середовища.

**10.** Енергія магнітного поля в об'ємі  $V$  визначається за формулою:

$$W = \int_V \omega dV. \quad (5.10)$$



**Рис.5.1.** Основна крива намагнічення технічно чистого заліза.

### 5.3. Питання на самопідготовку

1. Які речовини називаються магнетиками?
2. За допомогою яких фізичних величин проводять класифікацію магнетиків?
3. Провести класифікацію магнетиків.
4. Дати визначення вектора намагнічення речовини.
5. Які існують характеристики магнітного поля в речовині?
6. Який існує зв'язок між вектором напруженості і вектором індукції магнітного поля в феромагнетиках?
7. Схематично зобразити залежність індукції магнітного поля від напруженості магнітного поля у феромагнетиках. Пояснити цю залежність.
8. Схематично зобразити залежність індукції магнітного поля від напруженості магнітного поля у феромагнетиках. Пояснити цю залежність.
9. Записати співвідношення між складовими векторів  $B$  і  $H$  на межі двох магнетиків.
10. Який фізичний зміст магнітної проникності феромагнетика?
11. Чому значення магнітної проникності для різних феромагнетиків не приводяться в довідникових таблицях?
12. Дати визначення коерцитивної сили та залишкової намагніченості для феромагнетика.
13. Які феромагнетики мають назву магніто - м'яких та магніто жорстких ?
14. Де в техніці зв'язку застосовують феромагнетики?
15. Вивести формулу для енергії магнітного поля соленоїда.
16. Вивести формулу для густини енергії магнітного поля.

### 5.4. Методичні вказівки

1. Розрахунки магнітних полів при наявності магнітних середовищ значно спрощуються із введенням вектора напруженості  $\vec{H}$  як характеристики магнітного поля, який визначається через вектори  $\vec{B}$  і  $\vec{J}$  відповідно (5.2). Особливість вектора  $\vec{H}$  в тому, що його

циркуляція по замкнутому контуру дорівнює за формулою (5.5) алгебраїчній сумі струмів, що охоплюється цим контуром. Іншими словами, циркуляція вектора  $\vec{H}$  не залежить від магнітних властивостей середовища, через яке проходить вибраний контур. Тому співвідношення (5.5) широко застосовується для розрахунку магнітних полів, де за контур інтегрування вибирають одну із замкнутих ліній індукції магнітного поля. Однак сам вектор  $\vec{H}$  на відміну від своєї циркуляції, залежить від магнітних властивостей середовища. Наприклад, напруженість магнітного поля як в повітряному проміжку між полюсами електромагніту, так і в середині його залізного осердя залежить не тільки від сили струму в обмотці електромагніта, але і від магнітних властивостей заліза. Тільки у 2-х випадках, коли осердя електромагніта є суцільне кільце (тор) або нескінченно довгий стержень, вектор  $\vec{H}$  не залежить від магнітних властивостей середовища, а його величина визначається тільки струмом в обмотці.

2. Щоб розв'язати рівняння, яке отримується в результаті застосування теореми про циркуляцію вектора  $\vec{H}$  (5.5) часто буває необхідно знати зв'язок між векторами  $\vec{H}$  і  $\vec{B}$  (крім того, що виражений формулою (5.2)). Цей зв'язок встановлюється співвідношенням (5.3):  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ . Однак це не значить, що між векторами  $\vec{H}$  і  $\vec{B}$  існує пропорційна залежність у феромагнетиках. Магнітна проникність  $\mu$  феромагнетика сама залежить від магнітного поля всередині речовини і тому є змінною величиною. Таким чином, між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  існує нелінійний зв'язок (рис.5.1).

Внаслідок явища магнітного гістерезису крива намагнічування феромагнетика (5.1) не співпадає з кривою їхнього розмагнічування. Тому для знаходження зв'язку між векторами  $\vec{H}$  і  $\vec{B}$  у феромагнетиках користуються кривими намагнічування (рис 5.1) тільки у тих випадках, коли відомо, що стан феромагнетика, який розглядається в задачі, виник в процесі його намагнічування. При цьому необхідно, щоб на початку процесу намагнічування феромагнетик не мав залишкової намагніченості інакше крива намагнічування не буде співпадати з основною кривою намагнічування, яка приводиться в

довідниках (в нас на рис.5.1). У всіх задачах даної теми вважається, що феромагнетик спочатку ненамагнічений.

**3.** При розгляді тороїдів, осердя яких складається з двох різних частин, виготовлених з речовин з різними магнітними проникностями, конкретно – тороїдів з вакуумними проміжками, необхідно мати на увазі, що нормальна складова індукції магнітного поля при переході з одного середовища в інше не зазнає розриву  $B_{1n} = B_{2n}$ . А оскільки тангенційні складові в цьому випадку дорівнюють нулеві, то магнітна індукція в одному середовищі  $B_1$  дорівнює магнітній індукції в іншому середовищі  $B_2$ . Якщо в задачах не вказаний конкретний феромагнетик, то для розв'язання задачі необхідно користуватись графіком на рис.5.1.

## 5.5. Приклади розв'язування задач

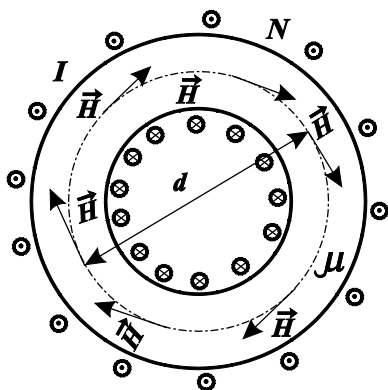


Рис. 5.2

**Задача 5.1.** Суцільний тороїд із залізним осердям має  $N = 400$  витків із тонкого проводу, який намотаний в один шар. Середній діаметр тороїда  $d = 25$  см (рис.5.2). Визначити напруженість магнітного поля всередині тороїда, магнітну проникність  $\mu$  заліза, а також намагніченість  $J$  при значеннях сили струму в обмотці тороїда  $I_1 = 0,5$  А і  $I_2 = 2,85$  А.

**Розв'язок.** Використаємо теорему про циркуляцію вектора напруженості  $\vec{H}$  (5.5) вздовж кола, діаметр якого  $d$  (середня лінія тороїда) (рис.5.2). Так як поле в середині тороїда однорідне, то

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = H\pi d = \sum I = NI.$$

Звідки знаходимо напруженість поля  $H = NI/(\pi d)$ . Нескладні розрахунки дають для 2-х значень струму:  $H_1 = 225$  А/м,  $H_2 = 1450$  А/м. Тепер використаємо графік на рис.5.1 і визначимо індукції магнітного поля для двох напруженостей магнітного поля:  $B_1 = 1,25$  Тл,  $B_2 = 1,55$  Тл. За формулою (5.3) знаходимо магнітні проникності ( $\mu = B/(\mu_0 H)$ ):

$$\mu_1 = 3900, \quad \mu_2 = 850,$$

а за формулою (5.2) намагніченість ( $J = B/\mu_0 - H$ )

$$J_1 = 9,9 \cdot 10^5 \text{ А/м}, \quad J_2 = 1,23 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

**Висновок:** Аналіз отриманих розрахунків дозволяє встановити, що силі струму  $I$  пропорційна тільки напруженість магнітного поля всередині феромагнетика (заліза), тоді як інші величини (індукція  $B$ , магнітна проникність  $\mu$ , намагніченість  $J$ ) є нелінійні функції  $H$ , а значить і нелінійні функції сили струму  $I$ .

**Задача 5.2.** Обмотка тороїда, який має залізне осердя із повітряним проміжком  $l_0 = 3$  мм, містить  $n = 1000$  витків на метр довжини. Середній діаметр тороїда  $d = 30$  см (рис.5.3). При якій силі струму  $I$  в обмотці тороїда індукція  $B_0$  в проміжку буде дорівнювати 1 Тл. Розрахувати силу струму  $I$  в обмотці, при якій намагніченість осердя досягне насичення.

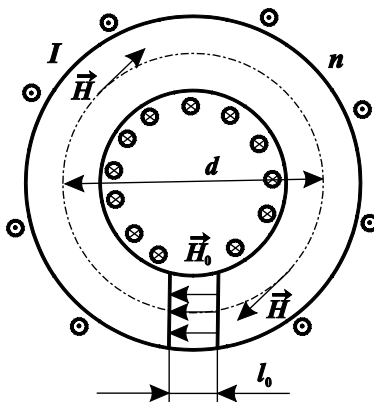


Рис. 5.3

**Розв'язок.** Розсіюванням магнітного поля в зазорі будемо нехтувати. Згідно (5.4), (5.5) і (рис.5.3) можемо записати:

$$H\pi d + H_0 l_0 = \pi d n I, \quad (1)$$

де  $H$  – напруженість магнітного поля в осерді,  $H_0$  – напруженість магнітного поля в зазорі. Так як відносна магнітна проникність повітря  $\mu = 1$ , то за формулою (5.3)



$$H_0 = B_0 / \mu_0 = 10^7 / (4\pi) \text{ А/м}.$$

Магнітні індукції в повітряному проміжку і в осерді однакові (розсіювання поля в зазорі нехтуємо, а згідно (5.4)  $B_{1n} = B_{2n}$ ). Тоді із графіка на рис.5.1 знаходимо, що для  $B = B_0 = 1 \text{ Тл}$   $H=100 \text{ А/м}$ . Таким чином визначимо напруженість поля в осерді. Із формули (1) знаходимо , що

$$I = \frac{H}{n} + \frac{B_0 l_0}{\mu_0 \pi d n} \cong 2,63 \text{ А}.$$

Якщо осердя намагнічене до насичення, то згідно рис. 5.1.  $B = 1,45 \text{ Тл}$ , а  $H = 650 \text{ А/м}$ . Тоді сила струму в обмотці повинна бути:

$$I = \frac{650}{1000} + \frac{1,45 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 0,3 \cdot 1000} = 4,32 \text{ А}.$$

Коли повітряний проміжок відсутній ( $l_0 = 0$ ), то насичення намагнічення осердя можна досягти при значно меншій силі струму, а саме

$$I = \frac{H}{n} = \frac{650}{1000} = 0,65 \text{ А}.$$

**Висновки.** Як бачимо із вище приведених розрахунків величина сили струму в обмотках тороїда, при якій має місце насичення намагнічення осердя, суттєво залежить від наявності повітряного проміжку в осерді. Тому на практиці поверхню тороїдального осердя роблять гладкою.

**Задача 5.3.** Компас розташований над провідником, по якому протікає постійний струм, на відстані  $R = 10 \text{ см}$  від осі проводу (рис.5.4). Знайти силу струму, при якій стрілка компаса підніметься над своїм шпильком. Залишкова індукція

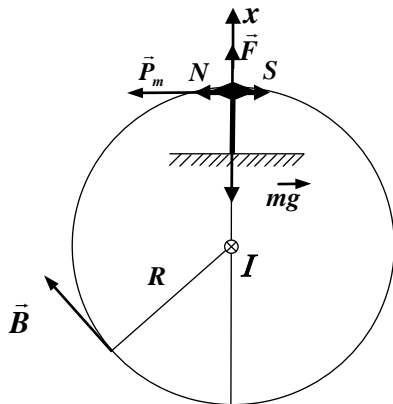


Рис.5.4.

стрілки дорівнює індукції насичення сталі  $B_0 = 1,35$  Тл.

**Розв'язок.** На магнітну стрілку в неоднорідному магнітному полі буде діяти сила  $F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha$ , де  $p_m$  – магнітний момент

стрілки,  $\frac{\partial B}{\partial x}$  – градієнт поля,  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ . Для

нашого випадку (рис.5.4)  $\alpha = \pi$  і сила  $\vec{F}$  направлена в сторону зменшення поля. Для довгого прямого провідника зі струмом:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad \text{і} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x^2},$$

де  $x$  – відстань від осі провідника до вибраної точки простору. В нашому випадку  $x = R$ . Зовнішнє магнітне поле відсутнє, тобто  $H = 0$ , і за формулою (5.2) намагніченість стрілки компаса  $J = B_0/\mu_0$ . За визначенням (5.1)

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_{mi}}{\Delta V} = \frac{\vec{p}_{mi} \Delta V}{\Delta V} = \vec{p}_{mi},$$

де  $|\vec{p}_{mi}| = p_{mi}$  – магнітний момент одиниці об'єму стрілки. Якщо вважати що стрілка намагнічена однорідно, то

$$P_m = V_c p_{mi} = V_c J = B_0 V_c / \mu_0,$$

де  $V_c = m/\rho$  – об'єм стрілки,  $m$  – маса стрілки,  $\rho$  – густина сталі. Стрілка підніметься над своїм шпильком, якщо магнітна сила  $F \geq mg$ , тобто

$$\frac{B_0 m}{\mu_0 \rho} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \geq mg.$$

Звідки знаходимо, що

$$I \geq \frac{2\pi R^2 g \rho}{B_0} = \frac{2\pi \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 7800}{1,35} = 3630 \text{ А}.$$

**Висновки.** Сила струму 3630 А є дуже велика величина і тому в реальних умовах здійснити експеримент, який описаний в задачі, неможливо. Проте будемо знати, що струми, які нас оточують в

повсякденному житті не зможуть підняти стрілку над шпеньком, хоч на покази компаса впливають.

**Задача 5.4.** На стержень з немагнітного матеріалу, довжина якого 50 см, намотаний в один шар провід так, що на кожен сантиметр довжини стержня припадає 20 витків. Визначити енергію магнітного поля всередині соленоїда, якщо сила струму в обмотці дорівнює 0,5 А. Площа перерізу стержня дорівнює  $2 \text{ см}^2$ .

**Розв'язок.** Намотаний на стержень провід представляє собою соленоїд із немагнітним осердям. Тому енергію магнітного поля можна визначити за формулою (5.8). Індуктивність такого соленоїда  $L = \mu_0 n^2 V$ , де  $\mu_0$  – магнітна стала вакууму,  $n = 2000$  витків/м – густина намотки (кількість витків на одиницю довжини соленоїда),

$V = 2 \cdot 50 = 100 \text{ см}^3 = 10^{-4} \text{ м}^3$  – об'єм соленоїда.

Тоді енергія магнітного поля соленоїда:

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V I^2 = 62,8 \text{ мкДж}.$$

**Задача 5.5.** Обмоткою соленоїда із залізним осердям протікає струм, сила якого 2 А. Визначити об'ємну густину енергії магнітного поля в осердді, якщо число витків на кожен сантиметр довжини соленоїда дорівнює 7,25.

**Розв'язок.** Об'ємна густина енергії магнітного поля визначається за формулою (5.9), а саме

$$\omega = BH/2,$$

де напруженість поля  $H = nI$ ,  $n$  – густина намотки,  $I$  – сила струму в обмотці. Підставивши значення  $n$  та  $I$ , знайдемо, що:

$$H = 1450 \text{ А/м}.$$

Магнітну індукцію  $B$  визначаємо за графіком (рис.5.1). Звідки знаходимо, що  $B = 1,55 \text{ Тл}$ .

Тоді  $\omega = 1,55 \cdot 1450/2 = 1124 \text{ Дж/м}^3$ .

**Задача 5.6.** Із чистого заліза виготовлене осердя для тонкої торієдальної котушки, яка має довжину по периметру  $l = 30$  см. В осерді зроблений поперечний переріз, ширина якого  $l_0 = 3$  мм (рис.5.5). Знайти відношення магнітної енергії, яка запасється в зазорі, до магнітної енергії котушки з осердям в режимі магнітного насичення заліза.

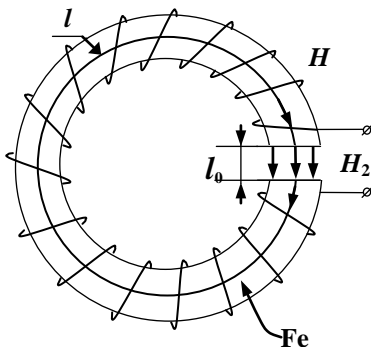


Рис.5.5.

**Розв'язок.** Енергія, яка запасється в осерді дорівнює:  $W_1 = \omega_1 S l$ , де  $\omega_1 = B_1 H_1 / 2$  – об'ємна густина магнітної енергії осердя,  $S$  – площа поперечного перерізу осердя,  $B_1$  і  $H_1$  – індукція і напруженість магнітного поля в осерді в режимі насичення. Аналогічно енергія, яка запасється в зазорі, дорівнює  $W_2 = \omega_2 S l_0$ , де  $\omega_2 = B_2 H_2 / 2$  – густина енергії магнітного поля в зазорі,  $S l_0$  – об'єм зазору. Згідно (5.4)  $B_2 = B_1$ . Тоді  $H_2 = B_1 / \mu_0$  і  $\omega_2 = B_1^2 / (2\mu_0)$ . Тепер знаходимо, що

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\omega_2 l_0}{\omega_1 l} = \frac{B_1 l_0}{\mu_0 H_1 l}.$$

Згідно рисунка 5.1. для чистого заліза лінійна ділянка залежності  $B(H)$  починається при  $H_1 = 650$  А/м, а  $B_1 = 1,45$  Тл. Тоді

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1,45 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 650 \cdot 0,3} = 17,75.$$

**Висновки.** Об'єм осердя в  $\frac{l}{l_0} = \frac{30}{0,3} = 100$  раз більший, ніж об'єм зазору. Проте, енергія магнітного поля, яка запасється в зазорі, в 17,75 рази більша магнітної енергії, яка запасється в осерді. Це пояснюється тим, що напруженість магнітного поля в зазорі  $H_2$  в

$B_1/(\mu_0 H_1) = \mu = 1775$  раз більша напруженості магнітного поля  $H_1$  в осерді.

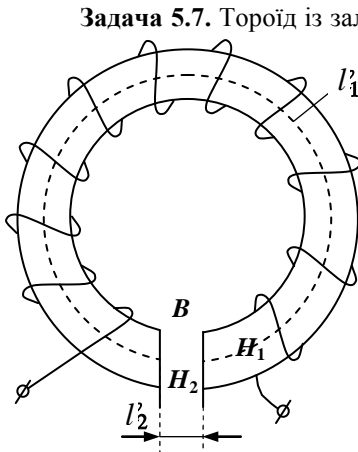


Рис.5.6.

**Задача 5.7.** Тороїд із залізним ненамагніченим осердям, має по середній лінії довжину  $l_1 = 1$  м і повітряний проріз шириною  $l_2 = 3$  мм (рис.5.6). Обмоткою тороїда пропустили постійний струм, в результаті чого осердя намагнітилось. Після виключення струму в обмотці індукція магнітного поля в зазорі стала  $B = 4,2$  мТл. Визначити залишкову намагніченість осердя, напруженість магнітного поля в залізі, густину енергії магнітного поля в осерді і в зазорі.

**Розв'язок.** За теоремою про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля (5.5) можемо записати для випадку  $I = 0$ :

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0,$$

де  $H_1$  – напруженість в осерді,  $H_2$  – напруженість в зазорі. В зазорі  $H_2 = B/\mu_0$ , тому

$$H_1 = -H_2 \frac{l_2}{l_1} = -\frac{B l_2}{\mu_0 l_1} = -10 \text{ А/м.}$$

Знак «-» показує, що вектори  $\vec{H}_1$  і  $\vec{B}$  в зазорі намагніченого заліза при відсутності струму в обмотці мають протилежні напрямки. Із співвідношення (5.2) визначимо залишкову намагніченість заліза:

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}_1,$$

але, врахувавши протилежну направленість  $\vec{B}$  і  $\vec{H}_1$ , запишемо в скалярній формі:

$$J = \frac{B}{\mu_0} + H_1 = \frac{4,2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} + 10 = 3352 \text{ А/м.}$$

Густина енергії в осерді буде

$$\omega_1 = \frac{B|H_1|}{2} = \frac{4,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{2} = 21 \text{ мДж/м}^3,$$

$$\text{а в зазорі} - \omega_2 = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(4,2 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 7019 \text{ мДж/м}^3.$$

**Задача 5.8.** Залізне кільце має квадратний переріз, площа якого  $S = 500 \text{ мм}^2$ , і середній діаметр якого  $d = 30 \text{ см}$  (рис.5.7). На кільце намотана обмотка із  $N = 800$  витків. Обмоткою протікає струм  $I = 3 \text{ А}$ . В кільці є поперечний проріз, ширина якого  $l_0 = 2 \text{ мм}$ . Нехтуючи розсіюванням магнітного поля на краях прорізі, знайти:

а) магнітну проникність  $\mu$  заліза при цих умовах,

б) потік магнітної індукції  $\Phi$  через поперечний переріз кільця,

в) індуктивність кільця,

г) енергію  $W_1$ , яка зосереджена в залізі, енергію  $W_2$  в повітряному зазорі і повну енергію поля  $W$ .

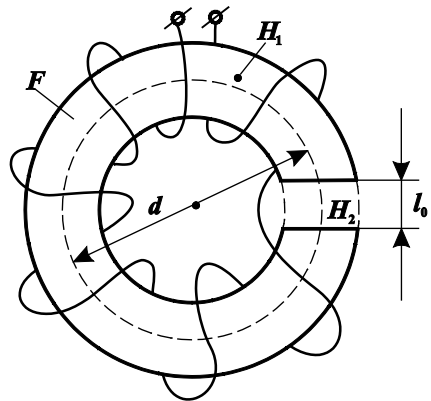


Рис. 5.7

**Розв'язок.** За законом повного струму (5.5) запишемо, що:

$$H_1(\pi d - l_0) + H_2 l_0 = NI, \quad (1)$$

де  $H_1$  – напруженість магнітного поля в залізі,  $H_2$  – в зазорі. Згідно умові задачі і (5.4)  $H_{1\tau} = H_{2\tau} = 0$ , а  $B_{1n} = B_{2n}$ , то можемо записати, що для зазору згідно (5.3)  $H_2 = B/\mu_0$ , де  $B$  індукція магнітного поля в зазорі і залізі. Тому (1) із урахуванням конкретних значень фізичних величин запишеться так:

$$0,94H_1 + 1591,5B = 2400. \quad (2)$$

Рівність (2) виконується для конкретних значень  $H_1$  і  $B$ , які задовільняють залежності  $B(H)$  на рис.5.1. Підбором чисел знаходимо, що рівність (2) і залежність на рис.5.1 виконується при:

$$H_1 = 340 \text{ А/м}, \quad B = 1,31 \text{ Тл.}$$

Визначивши напруженість і індукцію магнітного поля в залізі знаходимо:

а) магнітна проникність

$$\mu = B/(\mu_0 H_1) = 3066;$$

б) потік магнітної індукції через переріз кільця

$$\Phi = BS = 1,31 \cdot 500 \cdot 10^{-6} \text{ Вб} = 655 \text{ мкВб};$$

в) індуктивність котушки визначимо із співвідношення, що повний магнітний потік через витки котушки  $N\Phi = LI$ , де  $L$  – індуктивність. Тоді

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{800 \cdot 655 \cdot 10^{-6}}{3} = 0,175 \text{ Гн};$$

г) енергію в залізі визначимо, як  $W_1 = \omega_1 V_1$ , де  $\omega_1 = BH_1/2$  – густина енергії поля в залізі,  $V_1 = \pi dS$  – об'єм заліза. Тоді

$$W_1 = \pi B H_1 dS/2 = \pi \frac{1,31 \cdot 340 \cdot 0,3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2} \text{ Дж} = 0,105 \text{ Дж.}$$

Енергію в зазорі знайдемо так:

$$W_2 = \omega_2 V_2,$$

де  $\omega_2 = B^2/(2\mu_0)$  – густина енергії поля в зазорі,  $V_2 = bS$  – об'єм зазору. Тоді

$$W_2 = B^2 bS/(2\mu_0) = 1,31^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} / (2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}) \text{ Дж} = 0,683 \text{ Дж.}$$

Повну енергію поля знайдемо як

$$W = W_1 + W_2 = 0,788 \text{ Дж},$$

або за формулою (5.8)

$$W = LI^2/2 = 1,575/2 = 0,788 \text{ Дж.}$$

## 5.6. Задачі

**5.9.** Як зміняться характеристики магнітного поля нескінченно довгого соленоїда при заповненні його об'єму однорідним ізотропним магнетиком з проникністю  $\mu$ ?

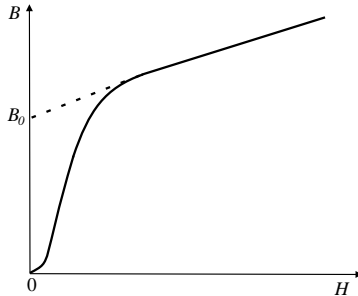


Рис.5.8.

**5.10.** Крива намагнічування заліза асимптотично наближається до прямої рис.5.8. Що означає величина  $B_0$ ? Визначити величину  $B_0$  із реальної кривої намагнічування заліза, приведеної на рис.5.1. Яка намагніченість заліза при насиченні?

**5.11.** Як визначити за допомогою рис.5.1 значення  $B$  і  $H$  які відповідають максимальному значенню відносної проникності  $\mu$ ? Визначити це значення  $\mu$ .

**5.12.** На рис.5.1 зображена експеримально отримана основна крива намагнічення технічно чистого заліза. Користуючись цим графіком, побудувати залежність магнітної проникності  $\mu$  від напруженості магнітного поля  $H$ .

**5.13.** На постійний магніт, що має форму циліндра, довжина якого  $l = 15$  см, намотали  $N = 300$  витків тонкого проводу. При пропусканні по ньому струму  $I = 3$  А поле поза магнітом щезло. Знайти коерцитивну силу  $H_C$  матеріалу, із якого виготовлений магніт.

**5.14.** Залізне осердя знаходиться в однорідному магнітному полі, напруженість якого  $250$  А/м. Визначити індукцію магнітного поля в осерді та магнітну проникність заліза.



**5.15.** Замкнутий соленоїд (тороїд) із залізним осердям має 10 витків на кожен сантиметр довжини. Середня довжина тороїда  $l = 1\text{ м}$ . У витках протікає струм, сила якого 1,5 А. Визначити значення магнітного потоку в осерді, якщо його поперечний переріз дорівнює  $4\text{ см}^2$ .

**5.16.** Соленоїд намотаний на залізне кільце з перерізом  $S = 5\text{ см}^2$ . При силі струму у витках  $I = 1\text{ А}$ , магнітний потік через переріз кільця  $\Phi = 0,5\text{ мВб}$ . Визначити кількість витків соленоїда, які приходяться на відрізок довжиною 1 см середньої лінії кільця.

**5.17.** Довжина осердя тороїда дорівнює 1 м, ширина поперечного повітряного розрізу в осерді – 4 мм. Площа поперечного перерізу осердя дорівнює  $25\text{ см}^2$ . Знайти, якою повинна бути кількість Ампер – витків обмотки тороїда, щоб магнітний потік через переріз осердя дорівнював  $1,4 \cdot 10^{-3}\text{ Вб}$ . При цих умовах магнітна проникність матеріалу осердя дорівнює 800.

**5.18.** Визначити магнітну індукцію в залізному осерді тороїда завдовжки 30 см, якщо число Ампер – витків обмотки тороїда дорівнює 150. Знайти магнітну проникність матеріалу осердя при цих умовах.

**5.19.** Замкнуте залізне осердя завдовжки 50 см має обмотку в 500 витків. По обмотці тече струм, сила якого 1 А. Який струм необхідно пропустити через обмотку, щоб при відсутності осердя індукція стала такою як була?

**5.20.** Скільки Ампер – витків необхідно для отримання індукції  $B = 1,4\text{ Тл}$  в електромагніті із залізним осердям довжиною  $l = 90\text{ см}$  і повітряним поперечним прорізом  $l_0 = 5\text{ мм}$ . Розсіюванням магнітного потоку в повітряному прорізі знехтувати.

**5.21.** Два однакових залізних кільця, середній діаметр яких  $d = 10\text{ см}$ , мають обмотки по  $N = 100$  витків кожна. В одному кільці є поперечний проріз, ширина якого  $d_1 = 1\text{ мм}$ . Обмоткою суцільного кільця протікає струм  $I_1 = 2\text{ А}$ . Який струм  $I_2$

необхідно пропустити обмоткою другого кільця, щоб в ньому створити таку ж індукцію?

**5.22.** Залізне осердя тороїда, довжина якого по середній лінії дорівнює 1 м, має вакуумний поперечний зазор, ширина якого 4 мм. Обмотка має 8 витків на 1 см. При якій силі струму в обмотці індукція в зазорі буде дорівнювати 1 Тл?

**5.23.** Обмотка тороїда, який має залізне осердя з вузьким поперечним вакуумним проміжком, має 1000 витків. По обмотці тече струм, сила якого 1 А. При якій довжині вакуумного проміжку індукція магнітного поля в ньому буде дорівнювати 1,25 Тл? Довжина середньої лінії тороїда дорівнює 1 м.

**5.24.** Довжина залізного тороїда по середній лінії дорівнює 1,2 м, площа перерізу  $20 \text{ см}^2$ . Обмоткою тороїда тече струм, який створює у вузькому поперечному вакуумному проміжку магнітний потік 2 мВб. Ширина проміжку дорівнює 3 мм. Якою повинна бути ширина проміжку, щоб магнітний потік в ньому при тій же силі струму збільшився на 0,5 мВб?

**5.25.** Котушка із залізним осердям має площу поперечного перерізу  $20 \text{ см}^2$  та число витків, що дорівнює 500. Індуктивність котушки з осердям дорівнює 0,28 Гн при силі струму в обмотці 5 А. Знайти магнітну проникність осердя при цих умовах.

**5.26.** На залізне осердя, що має форму тороїда з квадратним перерізом (сторона квадрата  $a = 4 \text{ см}$ ) і діаметром  $D = 40 \text{ см}$  намотано рівномірно в один шар провід. Число витків  $N = 500$ . Проводом пропускають струм  $I = 2 \text{ А}$ . Визначити потік вектора індукції магнітного поля через переріз осердя.

**5.27.** Якщо тороїд попередньої задачі розрізати в одному місці так, щоб утворився повітряний поперечний зазор товщиною  $d = 1 \text{ мм}$ , то яким стане потік вектора індукції магнітного поля через переріз осердя, якщо знехтувати розсіюванням силових ліній?

**5.28.** Залізне осердя має розміри, які вказані в попередніх двох задачах. Якщо повітряний зазор дорівнює  $d_1 = 1 \text{ мм}$ , то при деякій силі струму в обмотці потік індукції через переріз осердя

$\Phi_1 = 30$  мкВб. Коли повітряний зазор збільшити до  $d_2 = 2$  мм, то при тій же силі струму значення потоку індукції через переріз осердя стане  $\Phi_2 = 25$  мкВб. Нехтуючи в обох випадках розсіюванням силових ліній індукції, оцінити значення магнітної проникності  $\mu$  заліза.

**5.29.** В осерді тонкої тороїдальної котушки, середня довжина якої  $l = 100$  см, є поперечний повітряний зазор шириною  $b = 1$  мм. При виключеному струмі в обмотці котушки індукція магнітного поля в зазорі  $B = 0,04$  Тл. Визначити напруженість, індукцію і намагніченість осердя.

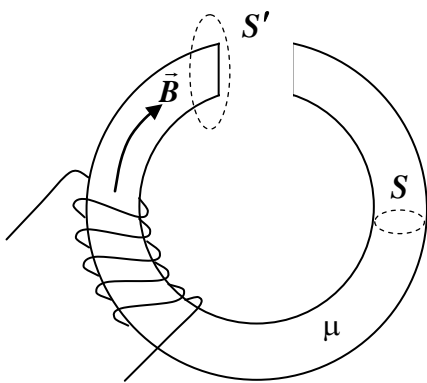


Рис.5.9.

**5.30.** Залізне осердя, яке зображене на рис.5.9, має обмотку, якою протікає постійний струм. В результаті в осерді виникає поле з індукцією  $B = 1,25$  Тл. Площа поперечного перерізу осердя  $S = 100$  мм<sup>2</sup>. Один із кінців осердя входить в середину уявної, замкнутої поверхні  $S'$ . Знайти для поверхні  $S'$  потік  $\Phi_B$  вектора  $B$  і потік  $\Phi_H$  вектора  $\vec{H}$ .

**5.31.** На осерді у вигляді тороїда із середнім діаметром  $d = 0,5$  м є обмотка із  $N = 1000$  витків. В осерді зроблений поперечний проріз, ширина якого  $b = 1$  мм. При струмі  $I = 0,85$  А в обмотці котушки індукція магнітного поля в зазорі  $B = 0,75$  Тл. Нехтуючи розсіюванням магнітного потоку на краях прорізу, знайти магнітну проникність осердя при цих умовах.

**5.32.** Тонке залізне кільце із середнім діаметром  $d = 50$  см несе на собі обмотку із  $N = 800$  витків зі струмом  $I = 3$  А. В кільці є поперечна прорізь ширина якої  $b = 2$  мм. Нехтуючи розсіюванням

магнітного потоку на краях зазору, знайти за допомогою графіка на рис.5.1 магнітну проникність заліза при цих умовах.

**5.33** Є соленоїд із залізним осердям завдовжки 50 см, площею поперечного перерізу  $10 \text{ см}^2$  та загальною кількістю витків 1000. Знайти індуктивність цього соленоїда, якщо обмоткою соленоїда тече струм: 1)  $I_1 = 0,1 \text{ А}$ ; 2)  $I_2 = 0,5 \text{ А}$ .

**5.34.** Визначити об'ємну густину енергії магнітного поля у залізному осерді, якщо індукція магнітного поля в ньому 1 Тл.

**5.35.** Індукція магнітного поля тороїда із залізним осердям зросла від  $B_1 = 1 \text{ Тл}$  до  $B_2 = 1,5 \text{ Тл}$ . Визначити як змінилась при цьому об'ємна густина енергії магнітного поля.

**5.36.** На залізне кільце намотано в один шар 2000 витків. Чому дорівнює енергія магнітного поля тороїда, якщо при силі струму 2,5 А у витках магнітний потік через переріз кільця дорівнює  $6 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$ .

**5.37** Залізне осердя, яке має форму тороїда з квадратним перерізом, несе на собі обмотку з 500 витків. Внутрішній радіус тороїда 0,2 м, зовнішній – 0,25 м. Визначити енергію, яка зосереджена в осерді, якщо по обмотці протікає струм 1,84 А.

**5.38** На залізний тороїд намотано 500 витків. Знайти енергію магнітного поля, якщо при струмі 2 А магнітний потік через площу витка дорівнює 1 мВб.

**5.39.** Тонке кільце з магнетика має середній діаметр  $d = 30 \text{ см}$ . У кільці зроблений поперечний проріз завширшки 2 мм. Коли по обмотці протікає струм, магнітна проникність магнетика  $\mu = 1400$ . Нехтуючи розсіюванням магнітного поля на краях прорізу, знайти відношення магнітної енергії в прорізі до магнітної енергії в магнетика.

**5.40** Обмоткою тороїдальної котушки з немагнічним залізним осердям пропустили струм, сила якого 0,3 А. Витки дроту з діаметром 0,4 мм з дуже тонкою ізоляцією щільно прилягають один до одного. Визначити індуктивність тороїдальної котушки при даних

умовах, а також енергію магнітного поля в осерді, якщо площа його перерізу  $4 \text{ см}^2$ , а діаметр середньої лінії осердя  $30 \text{ см}$ .

**5.41.** Є постійний магніт у вигляді кільця з прорізом завширшки  $4 \text{ мм}$ . Середній діаметр кільця дорівнює  $20 \text{ см}$ , його переріз має форму кола, діаметр якого малий в порівнянні з діаметром кільця. Індукція магнітного поля в прорізі дорівнює  $10^{-2} \text{ Тл}$ . При таких розмірах кільця поле в прорізі можна вважати однорідним. Визначити: 1) модуль напруженості магнітного поля в кільці; 2) густину енергії магнітного поля в кільці.

**5.42.** Густина енергії магнітного поля в вакуумі безпосередньо біля поверхні магнетика з магнітною проникністю  $\mu = 4 \epsilon \omega_1$ . Яка густина енергії в магнетикі, якщо вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  в вакуумі: а) перпендикулярний поверхні магнетика; б) практично паралельний поверхні магнетика?

**5.43.** В скільки раз густини енергії магнітного поля біля кінця довгого соленоїда менша густини енергії в центрі соленоїда?

**5.44.** Число витків котушки зменшили у два рази, але зберегли її геометричні розміри і струм в котушці. Як при цьому змінюється: а) енергія магнітного поля котушки; б) середня густина енергії магнітного поля всередині котушки?

**5.45.** Котушка, індуктивність якої  $L = 2 \text{ мГн}$  і опір  $R_0 = 1 \text{ Ом}$ , ввімкнена до джерела постійного струму з е.р.с.  $\mathcal{E} = 3 \text{ В}$ . Паралельно до котушки ввімкнений опір  $R = 2 \text{ Ом}$  (рис.5.10). Після того як струм в котушці досягає сталого значення, джерело струму відключається. Знайти кількість тепла  $Q$ , яке виділиться на опорі  $R$  після розімкнення кола. Опором джерела струму і з'єднувальних проводів знехтувати.

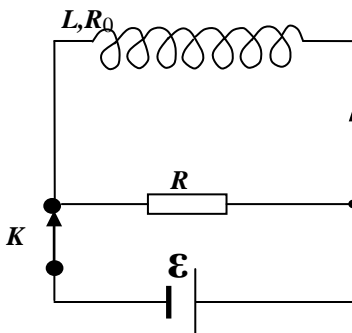
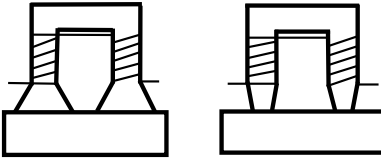


Рис.5.10.

### Додаткові задачі

**5.46.** На залізне кільце намотана обмотка, яка містить 250 витків. Обмоткою протікає струм 1 А. Визначити напруженість і індукцію магнітного поля всередині залізного кільця на відстанях:  
а) 5 см від центру кільця; б) 5,7 см від центру кільця.

**5.47.**



Який із електромагнітів, що зображені на рисунку, має більшу піднімальну силу, якщо магнітний потік, який використовується, однаковий в обох випадках?

**5.48.** Обмотка електромагніта, яка має активний опір 15 Ом і індуктивність 0,3 Гн, підключається до джерела постійної напруги. Через який проміжок часу в обмотці виділиться кількість тепла, яка буде дорівнювати енергії магнітного поля в осерді?

## 6. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

### 6.1. Питання теми

1. Електромагнітна індукція (скорочено ЕМІ).
2. Кількість електрики, яка переноситься індукційним струмом.
3. Взаємна індукція. Самоіндукція.
4. Енергія струмів.

### 6.2. Основні визначення та формули

1. Загальна формула для визначення магнітного потоку, який пронизує поверхню  $S$ , зв'язану з контуром:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (6.1)$$

де  $\vec{B}$  – індукція магнітного поля в точці знаходження елементарної поверхні  $dS$ ,  $d\vec{S} = dS\vec{n}$ ,  $\vec{n}$  – одиничний вектор нормальний до площадки  $dS$ .

2. Магнітний потік  $\Phi$  через поверхню, зв'язану з контуром, і сила струму  $I$  в контурі зв'язані співвідношенням:

$$\Phi = LI, \quad (6.2)$$

де  $L$  – індуктивність контуру.

3. Основний закон ЕМІ (закон Фарадея): при всякій зміні магнітного потоку, який пронизує контур, в ньому виникає електрорушійна сила індукції, яка пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, тобто

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.3)$$

Знак «–» відображає правило Ленца.

4. Кількість електрики, яка протікає по контуру, опір якого  $R$ , при зміні магнітного потоку через контур на величину  $\Delta\Phi$ ,

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R}. \quad (6.4)$$

5. Електрорушійна сила (е.р.с.) самоіндукції в контурі яка виникає при зміні сили струму в ньому, визначається за законом (6.3). При незмінній індуктивності контуру  $L$  е.р.с. самоіндукції визначається за формулою:

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}. \quad (6.5)$$

6. Власна енергія струму і взаємна енергія двох струмів

$$W = LI^2/2, \quad W_{12} = L_{12}I_1I_2, \quad (6.6)$$

де  $L_{12}$  – коефіцієнт взаємної індукції двох контурів, якими протікають струми  $I_1$  і  $I_2$ , відповідно.

7. Миттєве значення сили струму  $I$  в колі з опором  $R$  та індуктивністю  $L$ :

а) після замикання кола:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{R}{L}t \right\} \right), \quad (6.7)$$

де  $\mathcal{E}$  – е.р.с. джерела струму,  $t$  – час після замикання кола.

б) після розмикання кола:

$$I = I_0 \exp \left\{ -\frac{R}{L} t \right\}, \quad (6.8)$$

де  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$  – початкове значення струму,  $t$  – час після розмикання кола.

### 6.3. Питання на самопідготовку

1. В чому суть явища ЕМІ?
2. Сформулювати закон Фарадея.
3. Сформулювати і пояснити правило Ленца.
4. В чому суть явища самоіндукції?
5. Записати вираз для е.р.с. самоіндукції?
6. Як визначити кількість електрики, що переноситься індукційним струмом? Формулу пояснити.
7. Привести приклади використання явища ЕМІ в техніці зв'язку?
8. Які струми називаються вихровими? Привести приклади використання вихрових струмів.
9. Пояснення явища ЕМІ за допомогою сили Лоренца.
10. Пояснення явища ЕМІ за допомогою вихрового електричного поля.
11. Самоіндукція. Індуктивність. Е.р.с. самоіндукції.
12. Взаємна індукція.
13. Пояснити залежність сили струму від часу при замиканні та розмиканні кіл, які містять індуктивність.

### 6.4. Методичні вказівки

1. В явищі ЕМІ магнітний потік через контур може змінюватися як при русі контуру або його ділянки, так і при зміні з часом індукції магнітного поля. У всіх випадках для визначення величини е.р.с. використовують закон (6.3).

Для розв'язування задач необхідно перш за все проаналізувати її умову, встановити причину зміни магнітного потоку, який зв'язаний з контуром, і визначити які із величин, що входять у вираз для потоку, змінюється з часом. Взявши похідну по часу від виразу для магнітного потоку, знайдемо співвідношення для е.р.с. самоіндукції.



2. При розв'язуванні задач на явище ЕМІ як правило не враховують магнітне поле, яке створюється індукційним струмом. Це поле створює деякий потік через контур, зміна якого створює додаткову е.р.с.. Ефект цей буде тим слабшим, чим більший опір кола (менший струм).

3. Для соленоїда у формулі (6.2) величина  $\Phi$  означає повний магнітний потік або потокозчеплення і вимірюється сумою магнітних потоків, які пронизують кожний виток соленоїда. Для довгого соленоїда величина  $\Phi$  в  $N$  раз більша ( $N$  – число витків) магнітного потоку  $\Phi'$ , який пронизує любий переріз соленоїда біля його середини.

## 6.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 6.1.** В однорідному магнітному полі, індукція якого

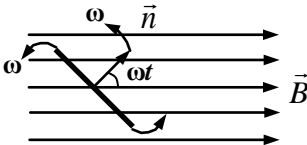


Рис.6.1.

$B = 0,05$  Тл, рівномірно обертається плоска рамка, що містить  $N = 500$  витків (рис.6.1). Площа рамки  $S = 400$  см<sup>2</sup>. Частота обертання рамки  $f = 600$  об/хв. Визначити миттєве значення е.р.с. індукції в момент часу, коли кут між

нормаллю рамки  $\vec{n}$  і вектором індукції поля  $\vec{B}$  буде  $45^\circ$ .

**Розв'язок.** Миттєве значення е.р.с. індукції  $\mathcal{E}_i$  визначається із закону Фарадея (6.3). Магнітний потік, що пронизує рамку, визначається за формулою (6.1). Із врахуванням того, що магнітне поле однорідне

$$\Phi = \int_S \vec{B} \vec{n} ds = B \cos \omega t \int_S ds = BSN \cos \omega t,$$

де  $N$  – кількість витків котушки, що пронизується магнітним потоком,  $\omega = 2\pi f$  – кутова швидкість обертання рамки. Тоді за формулою (6.3) знаходимо, що

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BSN \sin \omega t.$$

Згідно умови задачі  $\omega t = 2\pi k + \pi/4$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ . Тоді

$$\mathcal{E}_i = 2\pi f BSN \sin(2\pi k + \pi/4),$$

або

$$\mathcal{E}_i = 2\pi \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot \sin 45^\circ \text{В} = 44,4 \text{В}.$$

**Задача 6.2.** В однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 0,1$  Тл, обертається в площині, перпендикулярній лініям індукції, мідний диск. Радіус диска  $r = 10$  см, частота обертання  $f = 120$  об/хв. За допомогою ковзаючих контактів диск підключений до кола, опір якого  $R = 100$  Ом (рис.6.2). Визначити е.р.с. індукції, яка виникає при обертанні диска, кількість електрики  $q$ , яка протікає по колу, а також кількість теплоти  $Q$ , що виділяється в колі, за час, на протязі якого диск здійснить  $N = 1000$  обертів.

**Розв'язок.** Як показує дослід, при обертанні диска в магнітному полі, в контурі  $abcd$  появляється струм, а це означає, що виникає е.р.с. індукції. Магнітний потік через цей контур не змінюється, тому формально  $d\Phi/dt = 0$ . Виникнення е.р.с. індукції в

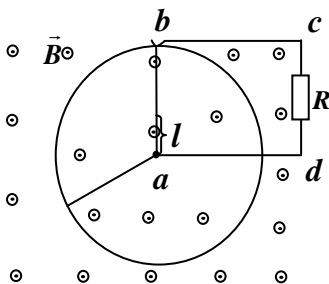


Рис.6.2.

контурі  $abcd$  можна пояснити тим, що ділянка контуру  $ab$  проходить весь час через різні радіуси диска. Швидкості обертання точок радіуса  $ab$  є різними, а саме  $v = \omega l$ , де  $\omega$  — кутова швидкість обертання диска,  $l$  — відстань точки радіуса  $ab$  від центра диска  $a$ . Це означає, що сила Лоренца, яка діє на заряди в точках радіуса  $ab$ , залежить від відстані  $l$ .

Згідно визначення е.р.с. (3.6)  $\mathcal{E} = A/q$ , тому в нашому випадку ( $q$  — заряд електрона  $e$ )

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{e} \int_0^r F dl = \frac{1}{e} \int_0^r evB dl = B\omega \int_0^r l dl = \frac{B\omega r^2}{2}.$$

Якщо врахувати, що  $\omega = 2\pi f$ , то

$$\mathcal{E}_i = \pi r^2 f B.$$

Після підстановки числових значень величини отримаємо:

$$\mathcal{E}_i = \pi \cdot 0,1^2 \cdot 2 \cdot 0,1 \text{ В} \cong 6,3 \text{ мВ}.$$

Таким чином при рівномірному обертанні диска ( $f = \text{const}$ ) в колі діє стала е.р.с., яка створює постійний струм. Кількість електрики  $q$ , що переносить індукційний струм, визначимо за формулою:

$$q = I \cdot t,$$

де  $I = \mathcal{E}_i/R$  – сила струму,  $t = N/f = 500$  с – час, за який диск зробить  $N$  обертів. Тому

$$q = \frac{\mathcal{E}_i N}{f R} = \frac{6,3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^2} \text{ Кл} = 31,5 \text{ мКл}.$$

Кількість тепла, що виділяється в колі постійного струму, знайдемо за законом Джоуля – Ленца:

$$Q = I^2 R t = \mathcal{E}_i^2 t / R = \pi^2 r^4 N B^2 f / R = 0,2 \text{ мДж}.$$

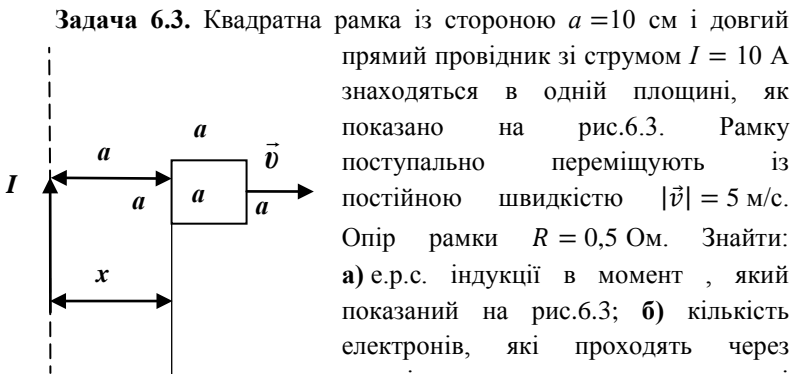


Рис.6.3.

**Розв'язок. а)** е.р.с. індукції знайдемо за формулою (6.3). Для цього необхідно знати магнітний потік  $\Phi$ , що пронизує рамку, який будемо визначати за формулою (6.1). Для нашого випадку (рис.6.4)

$$\vec{B} d\vec{S} = \vec{B} \vec{n} dS = B dS, \quad \text{де } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

$$dS = a \cdot dr$$

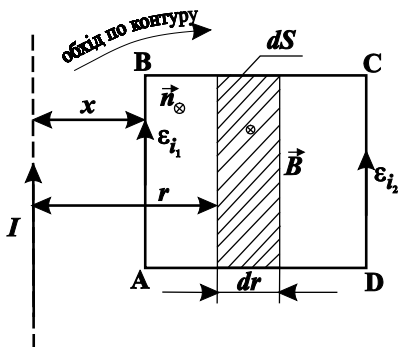


Рис. 6.4

Тут  $r$  – відстань від провідника зі струмом до смужки шириною  $dr$  і довжиною  $a$ . При цьому враховано, що магнітне поле прямого провідника зі струмом має циліндричну симетрію і в межах  $dS$  індукція  $B$  є однаковою. Тоді магнітний потік, який пронизує рамку буде:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_x^{x+a} \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right),$$

де  $x = vt$  – відстань від рамки до провідника, а е.р.с. індукції

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x(x+a)}. \quad (1)$$

Для моменту, коли  $x = a$ ,

$$\mathcal{E}_i = \frac{\mu_0 I v}{4\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 5}{4\pi} \text{ В} = 5 \text{ мкВ}.$$

**б)** Кількість електрики, що переноситься індукційним струмом знайдемо за формулою (6.4) де:

$$\Delta\Phi = 0 - \Phi = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2.$$

Кількість електронів, що пройдуть через переріз проводу рамки, при видаленні її із магнітного поля буде дорівнювати:

$$N = \frac{\Phi}{|e|R} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R} \ln 2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-1} \cdot 0,693}{2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5} = 1,73 \cdot 10^{12} \text{ електронів}.$$

**в)** Згідно визначення (3.6) е.р.с. – це робота по переміщенню одиночного позитивного заряду по контуру, тобто

$$\mathcal{E}_i = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l},$$

де  $\Gamma$  – контур рамки,  $d\vec{l}$  – елемент контуру. Так як напруженість

електричного поля в проводі рамки у конкретний момент часу  $t$  є однаковою, то  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 4aE$ . Тоді, використавши формулу (1) знаходимо, що

$$E = \frac{\mu_0 I a v}{8\pi x(x+a)},$$

а для випадку  $x = a$  –

$$E = \frac{\mu_0 I v}{16\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 5}{16\pi \cdot 0,1} \frac{\text{В}}{\text{м}} = 12,5 \text{ мкВ/м}.$$

### Інший спосіб знаходження е.р.с. індукції в рамці

Силкові лінії магнітного поля перетинають дві сторони рамки: АВ і CD. В них індукується е.р.с. індукції, величину якої знайдемо за формулою  $\mathcal{E}_i = Bav$ . Для сторони АВ –

$$\mathcal{E}_{i_1} = B(x) \cdot av = \frac{\mu_0 I a v}{2\pi x},$$

для сторони CD –

$$\mathcal{E}_{i_2} = B(x+a) \cdot av = \frac{\mu_0 I a v}{2\pi(x+a)}.$$

За правилом Ленца ці е.р.с. діють назустріч одна одній, тому результуюча е.р.с.

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{i_1} - \mathcal{E}_{i_2} = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi x(x+a)}.$$

Ця формула співпадає з вище отриманою формулою (1).

**Задача 6.4.** Прямий провідник, опір якого  $R_1 = 0,1$  Ом/м на одиницю довжини, зігнути під кутом  $2\alpha = 60^\circ$ . Перемичка із такого ж проводу, яка розташована перпендикулярно до бісектриси кута  $2\alpha$ , утворює із зігнутим проводом замкнений трикутний контур (рис.6.5). Цей контур розміщений в однорідному магнітному полі, індукція якого  $|\vec{B}| = 0,03$  Тл перпендикулярна площині трикутника. Знайти

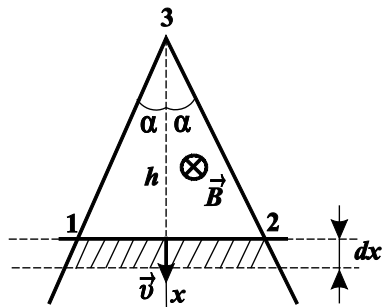


Рис.6.5

напрямок і силу струму  $I$ , який протікає в контурі, коли перемичка рухається з постійною швидкістю  $v = 2$  м/с.

Опором в місцях контактів 1 і 2 знехтувати.

**Розв'язок:** Сила струму, яка протікає в контурі 1 – 3 – 2 – 1, коли перемичка 1 – 2 рухається дорівнює  $I = \mathcal{E}_i/R$ , де  $\mathcal{E}_i$  – е.р.с. індукції, що діє в контурі,  $R = R_1P$  – опір контуру,  $P$  – його периметр. Е.р.с. індукції  $|\mathcal{E}_i| = B \frac{dS}{dt}$ , де  $\frac{dS}{dt}$  – швидкість зміни площі трикутника 1-2-3.  $dS$  – це площа заштрихованої трапеції на рис.6.5. Висота трапеції  $dx = v \cdot dt$  Основи трапеції дорівнюють  $2htg\alpha$  і  $2(h + v dt)tg\alpha$ . Тому

$$dS = 2htg\alpha \cdot v dt,$$

де  $h$  – висота трикутника 1 – 3 – 2. Тоді е.р.с. індукції

$$\mathcal{E}_i = 2Bhvtg\alpha.$$

Периметр трикутника 1-3-2

$$P = 2h(tg\alpha + 1/\cos\alpha).$$

Значить сила струму в контурі буде:

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{PR_1} = \frac{2Bhvtg\alpha}{2h(tg\alpha + 1/\cos\alpha)R_1} = \frac{Bv \sin\alpha}{(1 + \sin\alpha)R_1} = 0,2 \text{ А.}$$

**Задача 6.5.** Дві котушки, індуктивності яких  $L_1 = 4$  мГн і  $L_2 = 6$  мГн, з'єднані послідовно (рис.6.6,а). При цьому індуктивність системи  $L = 16$  мГн. Як зміниться індуктивність системи, якщо в одній із котушок напрямок струму змінити на протилежний (рис.6.6,б), не змінюючи взаємного розташування котушок?

**Аналіз:** Індуктивність системи визначається за (6.2)

$$\Phi = LI, \quad (1)$$

де – сила струму в котушках(так як котушки з'єднанні послідовно, то сила струм в них однакова),  $\Phi$  – сумарний магнітний потік, що дорівнює алгебраїчний сумі потоків, які пронизують всі витки котушок. Всі витки першої котушки пронизуються власним потоком

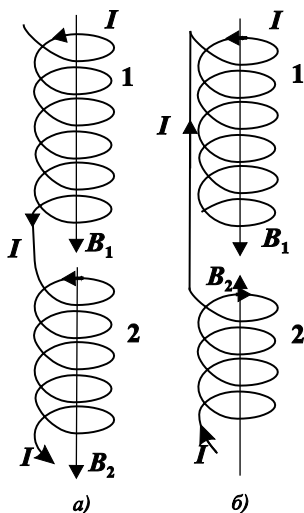


Рис. 6.6

$\Phi_1$  і потоком  $\Phi_{12}$ , що створюється другою котушкою. Друга котушка пронизується теж власним потоком  $\Phi_2$  і потоком  $\Phi_{12}$ , що створюється першою котушкою. Таким чином

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{12} + \Phi_{21}. \quad (2)$$

Власні потоки завжди позитивні і визначаються індуктивністю кожної котушки:

$$\Phi_1 = L_1 I, \quad \Phi_2 = L_2 I. \quad (3)$$

$\Phi_{12}$  і  $\Phi_{21}$  потоки можуть бути як позитивними так і негативними в залежності від напрямку індукції поля, яка створюється однією котушкою у витках другої. Знаки  $\Phi_{21}$  і  $\Phi_{12}$  завжди співпадають (при зміні напрямку струму

одночасно змінюються на протилежні і напрямки дотичної нормалі, і напрямки вектора індукції), а числові значення їх визначаються взаємною індуктивністю  $L_{12}$ :

$$\Phi_{12} = \pm L_{12} I_2, \quad \Phi_{21} = \pm L_{21} I_1.$$

У відсутності феромагнетиків  $L_{12} = L_{21}$ . Так як котушки з'єднані послідовно, то

$$\Phi_{12} = \Phi_{21} = \pm L_{12} I. \quad (4)$$

Зміст знаків визначається характером з'єднання і розташуванням котушок. Якщо поля котушок мають однаковий напрямок, то  $\Phi_{12} = \Phi_{21} = +L_{12} I$  (рис.6.6,а); якщо поля котушок направлені назустріч одне одному, то  $\Phi_{12} = \Phi_{21} = -L_{12} I$  (рис. 6.6,б).

**Розв'язок.** Підставимо (3) і (4) в (2) і (1) і отримаємо, що індуктивність двох котушок

$$L = L_1 + L_2 \pm 2L_{12}.$$

Так як до зміни напрямку струму  $L > L_1 + L_2$ , то очевидно (рис.6.6,а), що

$$L = L_1 + L_2 + 2L_{12}. \quad (5)$$

Після зміни напрямку струму в одній із котушок (рис.6.6, б)

$$L' = L_1 + L_2 - 2L_{12}. \quad (6)$$

Із рівнянь (5) і (6) знаходимо, що

$$L' = 2(L_1 + L_2) - L = 4 \text{ мГн.}$$

**Задача 6.6.** Соленоїд, індуктивність якого  $L = 0,1 \text{ Гн}$  і опір  $R = 0,02 \text{ Ом}$ , вмикається до джерела струму з е.р.с.  $\mathcal{E}_0 = 2 \text{ В}$ , внутрішнім опором якого можна знехтувати. Яка кількість тепла виділиться в соленоїді за перші  $5 \text{ с}$  після ввімкнення?

**Розв'язок.** При ввімкненні соленоїда до е.р.с  $\mathcal{E}_0$  виникає змінний струм замикання (6.7). Розподілимо проміжок часу  $t$  на такі малі відрізки  $dt$ , щоб в межах кожного відрізка часу силу струму можна було вважати майже сталою. Тоді кількість тепла, яка виділиться на опорі  $R$ , згідно закону Ленца-Джоуля буде:

$$dQ = I^2 R dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{R}{L} t \right\} \right)^2 dt.$$

Звідси після інтегрування знаходимо:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^5 \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{R}{L} t \right\} \right)^2 dt = \\ &= \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \left( t + \frac{2L}{R} \exp \left\{ -\frac{R}{L} t \right\} - \frac{L}{2R} \exp \left\{ -\frac{2Rt}{L} \right\} \right) \Bigg|_0^5 = \\ &= 200(5 - 10(1 - \exp\{-1\}) + 2,5(1 - \exp\{-2\})) = 168 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

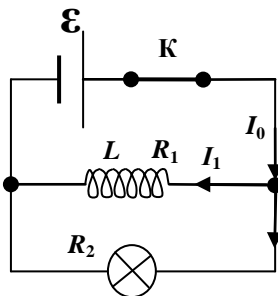
**Висновок.** Якщо б ми помилково вважали, що струм миттєво досягає свого максимального значення  $I_0 = \mathcal{E}_0/R = 100 \text{ А}$  (що можливо, якщо  $L$  дуже мале), то

$$Q = I_0^2 R t = 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 = 1000 \text{ Дж.}$$

Цей помилковий результат дуже сильно відрізняється від правильної відповіді  $168 \text{ Дж}$ .



**Задача 6.7.** Дросель з індуктивністю  $L = 5$  Гн і омичним опором  $R_1 = 20$  Ом і лампа із опором  $R_2 = 300$  Ом з'єднані паралельно і підключені до джерела з електрорушійною силою  $\mathcal{E} = 110$  В через ключ  $K$  (рис.6.7). Визначити різницю потенціалів на затискачах дроселя для моментів часу  $t_1 = 0,01$  с і  $t_2 = 0,2$  с після розмикання кола.



**Рис.6.7.**

**Аналіз.** Коли ключ  $K$  замкнутий і в колі встановився режим, то сила струму  $I_0$  в колі дорівнює сумі сил струмів, що протікають через дросель ( $I_1$ ) і лампу ( $I_2$ ). Причому

$$I_1 = \mathcal{E}/R_1. \quad (1)$$

При розмиканні ключа  $K$  в дроселі виникає е.р.с. самоіндукції, яка перешкоджає зменшенню струму  $I_1$ . Е.р.с. самоіндукції виникає тільки в дроселі, так як лампа і підвідні провідники можна вважати безіндуктивними.

Після відключення джерела замкнене коло складають дросель і лампа, які тепер з'єднані послідовно. В момент  $t = 0$ , який відповідає моменту розмикання, сила струму в цьому колі однакова і дорівнює  $I_1$  (струм в безіндуктивній лампі зникає миттєво). Різниця потенціалів на затискачах дроселя після відключення джерела в будь-який момент часу

$$U_d = IR_2, \quad (2)$$

де  $I$  – струм в колі, що залежить від часу.  $U_d \neq IR_1$ , так як в дроселі діє стороннє поле, обумовлене появою е.р.с. самоіндукції.

**Розв'язок.** За формулою (6.8)

$$I = I_1 \exp \left\{ -\frac{R_1 + R_2}{L} t \right\}.$$

Врахувавши (1) і (2) отримаємо, що

$$U_d = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1} \exp \left\{ -\frac{R_1 + R_2}{L} t \right\}. \quad (3)$$

При  $t = t_1$

$$U_{д_1} = \frac{110 \cdot 300}{20} \exp \left\{ -\frac{320}{5} 0,01 \right\} \text{ В} = 870 \text{ В},$$

а при  $t = t_2$

$$U_{д_2} = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

При виключенні джерела  $\mathcal{E}$ , як видно із отриманого результату, різниця потенціалів на дуже короткий час значно (у 8 раз) перевищує е.р.с. джерела, що дозволяє спостерігати миттєвий яскравий спалах лампи в момент розімкнення ключа К.

## 6.6. Задачі

**6.8.** Дротяне кільце знаходиться в магнітному полі, яке змінюється із часом. Положення кільця і напрямок магнітної індукції  $\vec{B}$  і характер її зміни показані на рисунку 6.8, а і б. Вказати напрямок

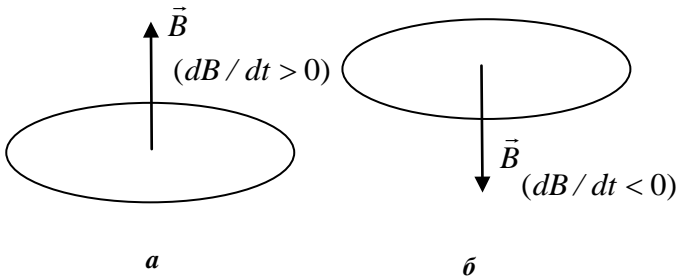


Рис.6.8.

струму, що наводиться в кільці, і напрямок елементарної сили  $d\vec{F}$ , яка діє на малу ділянку кільця  $dl$  зі сторони магнітного поля.

**6.9.** Дві котушки 1 і 2 підвішені на довгих нитках так, що їхні площини паралельні (див. рис.6.9). Котушка 2 замкнута накоротко. Що відбудеться з котушками зразу ж після ввімкнення першої котушки до джерела струму?

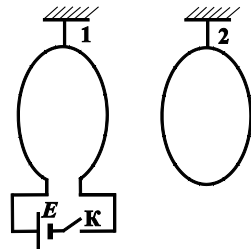


Рис. 6.9

**6.10.** Магнітний потік  $\Phi = 0,04$  Вб пронизує замкнутий контур. Визначити середнє значення величини е.р.с. індукції, яка виникає в контурі, якщо магнітний потік зміниться до нуля за час  $\Delta t = 0,02$  с.

**6.11.** Прямий провідник, довжина якого 40 см, рухається в однорідному магнітному полі зі швидкістю 5 м/с перпендикулярно до ліній індукції. Різниця потенціалів між кінцями провідника 0,6 В. Вирахувати індукцію магнітного поля.

**6.12.** Рамка, площа якої  $S = 200 \text{ см}^2$ , рівномірно обертається з частотою  $f = 10$  об/с відносно осі, що лежить в площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції однорідного магнітного поля ( $B = 0,2$  Тл). Яке середнє значення е.р.с. індукції за час, протягом якого магнітний потік, який пронизує рамку, змінюється від нуля до максимального значення? Кількість витків в рамці  $N = 100$ .

**6.13.** В однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 0,1$  Тл, рівномірно з частотою  $f = 600$  об/хв обертається рамка, яка складається із  $N = 1000$  витків, площа яких  $S = 100 \text{ см}^2$ . Вісь обертання лежить в площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції. Визначити максимальну е.р.с. індукції, яка виникає в рамці.

**6.14.** Індукція магнітного поля між полюсами двохполюсного генератора  $B = 0,8$  Тл. Ротор має  $N = 100$  витків, площа кожного з яких  $S = 400 \text{ см}^2$ . Скільки обертів за хвилину робить ротор, якщо максимальне значення е.р.с. індукції  $\varepsilon_{\text{max}} = 200$  В?

**6.15.** Накороткозамкнута котушка, що містить  $N = 1000$  витків, рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 5$  рад/с відносно осі, яка співпадає з діаметром котушки і перпендикулярна до ліній індукції поля. Магнітне поле однорідне, індукція поля  $B = 0,04$  Тл. Визначити е.р.с. індукції для тих моментів часу, коли нормаль до площини котушки складає кут  $\alpha = 60^\circ$  з лініями поля. Площа котушки  $S = 100 \text{ см}^2$ .

**6.16.** В однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 1$  Тл знаходиться прямий провідник зі струмом, довжина якого

$l = 20$  см. Кінці провідника замкненні проводом, що знаходиться поза полем. Опір всього кола  $R = 0,1$  Ом. Знайти силу, яку необхідно прикласти до провідника, щоб переміщувати його перпендикулярно до ліній індукції із швидкістю  $v = 2,5$  м/с.

**6.17.** Представимо собі, що рельси залізничної колії, відстань між якими  $1,2$  м, йдуть по магнітному меридіану і ізолювані одна від одної і від Землі. Цими рельсами їде поїзд із швидкістю  $60$  км/год. Вертикальна складова магнітного поля Землі  $B_g = 50$  мкТл. Що буде показувати мілівольтметр, що включений в якомусь місці між рельсами: 1) коли поїзд наближається до приладу; 2) коли поїзд проходить над приладом, тобто прилад знаходиться між двома скатами якого-небудь вагону; 3) коли поїзд віддаляється від приладу?

**6.18.** Чи буде в умові попередньої задачі впливати на покази мілівольтметра горизонтальна складова магнітного поля Землі, якщо шлях не прямолінійний?

**6.19.** Рамка в задачі (6.3) обертається з постійною кутовою швидкістю навколо сторони рамки, що знаходиться на відстані  $2a$  від провідника зі струмом. Чи буде е.р.с. індукції в рамці синусоїдальною?

**6.20.** Прямий провідник, довжина якого  $l = 10$  см розміщений в однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 1$  Тл. Кінці провідника замкненні гнучким проводом, що знаходиться поза полем. Опір всього кола  $R = 0,4$  Ом. Яка потужність необхідна для того, щоб рухати провідник перпендикулярно до ліній індукції із швидкістю  $v = 20$  м/с?

**6.21.** Тонкий металевий стержень, довжина якого  $l = 1,2$  м, обертається з частотою  $f = 120$  обертів за хвилину в однорідному магнітному полі навколо осі, яка перпендикулярна до стержня і проходить через нього на відстані  $l_1 = 0,25$  м від одного з кінців. Вектор  $\vec{B}$  паралельний осі обертання і  $|\vec{B}| = 1$  мТл. Знайти різницю потенціалів  $U$ , яка виникає між кінцями стержня.

**6.22.** До джерела струму з е.р.с.  $0,5$  В і нехтовно малим внутрішнім опором під'єднанні два металічних стрижні, які

розташовані горизонтально і паралельні один до одного. Відстань між стрижням  $l = 20$  см. Стрижні знаходяться в однорідному магнітному полі, яке направлене вертикально. Індукція поля  $B = 1,5$  Тл. По стрижнях ковзає під дією сил поля прямолінійний провідник із швидкістю  $v = 1$  м/с. Опір провідника  $R = 0,02$  Ом, опором стержнів знехтувати. Визначити:

- 1) е.р.с. індукції;
- 2) силу, яка діє із сторони поля на провідник;
- 3) силу струму в колі;
- 4) потужність, яка витрачається на рух провідника;
- 5) потужність, яка витрачається на нагрівання провідника;
- 6) потужність, яку віддає в коло джерело струму.

**6.23.** В однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 0,4$  Тл, обертається стрижень довжиною  $l = 10$  см. Вісь обертання паралельна до ліній індукції, проходить через один із кінців стержня і перпендикулярна до його довжини. Визначити різницю потенціалів на кінцях стержня, якщо він робить  $f = 16$  об/с?

**6.24.** Обмотка тороїда з немагнітним осердям має  $N_1 = 251$  виток. Середній діаметр тороїда  $D = 8$  см, діаметр витків  $d = 2$  см. На тороїд намотана вторинна обмотка, яка має  $N_2 = 100$  витків. При замиканні кола первинної обмотки в ній протягом часу  $t = 0,001$  с встановлюється струм  $I = 3$  А. Визначити середнє значення е.р.с. індукції, яка виникає у вторинній обмотці.

**6.25.** На довгий прямий соленоїд, діаметр перерізу якого  $d = 5$  см і густина намотки  $n = 20$  витків на один сантиметр довжини, щільно одягнутий круговий виток із мідного проводу перерізом  $S = 1$  мм<sup>2</sup>. Знайти струм у витку, якщо струм соленоїда збільшується з постійною швидкістю  $dl/dt = 100$  А/с. Індуктивністю витка знехтувати.

**6.26.** Провідне кільце, радіус якого  $R = 10$  см, знаходиться в однорідному магнітному полі  $\vec{B}$ , силові лінії якого перпендикулярні до площини витка (рис.6.10). Індукція магнітного поля змінюється за законом:  $|\vec{B}| = B_0 \sin kt$ , де  $B_0 = 0,5$  Тл,  $k = 0,4$  с $^{-1}$ . Знайти максимальну напруженість електричного поля всередині матеріалу провідника.

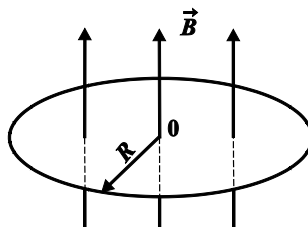


Рис.6.10

**6.27.** Провід який має форму параболи  $y = bx^2$ , знаходиться в однорідному магнітному полі, індукція якого  $B$ , причому вектор  $\vec{B}$  перпендикулярний площині  $x, y$ . З вершини параболи в момент  $t = 0$  починає переміщуватись поступально перемичка з постійним прискоренням  $a$  (рис.6.11). Знайти е.р.с. індукції в контурі, яка виникає внаслідок руху перемички, як функцію  $y$ .

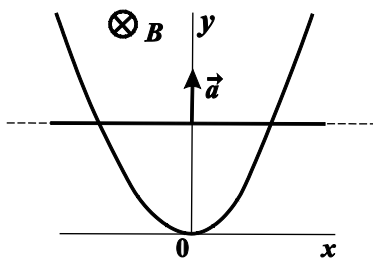


Рис. 6.11

**6.28.** Прямокутний контур із ковзаючою перемичкою, довжина якої  $l = 0,1$  м, знаходиться в однорідному магнітному полі, яке перпендикулярне площині контуру (рис.6.12). Індукція поля дорівнює  $B = 10$  мТл. Перемичка має опір  $R = 0,08$  Ом, сторони AB і CD – опори  $R_1 = 0,2$  Ом і  $R_2 = 0,4$  Ом. Нехтуючи самоіндукцією контуру, знайти струм через перемичку при її поступальному переміщенні із постійною швидкістю  $v = 10$  м/с.

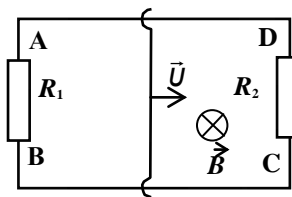


Рис.6.12.

**6.29.** Виток із проводу знаходиться в однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 0,04$  Тл. Радіус витка  $r = 4$  см,

опір проводу  $R = 0,01$  Ом. Площина витка складає кут  $\alpha = 30^\circ$  з лініями поля. Яка кількість електрики протече по витку, якщо магнітне поле виключити?

**6.30.** Кільце із проводу лежить на столі. Радіус кільця  $r = 10$  см. Опір проводу кільця  $R = 1$  Ом. Вертикальна складова індукції магнітного поля Землі  $B = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл. Яка кількість електрики протече по кільцю, якщо його повернути із однієї сторони на другу?

**6.31.** В кільце із проводу, яке під'єднане до балістичного гальванометра, внесли прямий постійний магніт. Балістичний гальванометр показав, що при цьому по колу протекла кількість електрики, що дорівнює  $10^{-5}$  Кл. Визначити магнітний потік, який пронизує площу кільця, якщо опір кола гальванометра дорівнює  $30$  Ом.

**6.32.** Між полюсами електромагніта розміщена котушка, яка під'єднана до балістичного гальванометра. Вісь котушки паралельна лініям індукції магнітного поля. Котушка має  $15$  послідовно з'єднаних витків, площа яких однакова і дорівнює  $2$  см<sup>2</sup>. Опір котушки  $R_1 = 4$  Ом, опір гальванометра  $R_2 = 46$  Ом. Коли струм в обмотці електромагніта виключили, то по колу гальванометра протекла кількість електрики  $q = 90$  мкКл. Вирахувати магнітну індукцію поля електромагніта.

**6.33.** Плоска рамка із проводу, опір якого  $R = 0,01$  Ом, рівномірно обертається в однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 0,05$  Тл. Вісь обертання лежить в площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції. Площина рамки  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Знайти, яка кількість електрики протече по проводу рамки за час обертання її на кут  $\alpha = 30^\circ$  в таких випадках: 1) від  $0$  до  $30^\circ$ ; 2) від  $30^\circ$  до  $60^\circ$ ; 3) від  $60^\circ$  до  $90^\circ$ .

**6.34.** Тонкий мідний провідник, маса якого  $m = 1$  г, зігнутий у вигляді квадрата і кінці його замкнуті. Квадрат розміщений в однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 0,1$  Тл, так, що

його площина перпендикулярна до ліній поля. Визначити кількість електрики, яка протече по провіднику, якщо квадрат , потягнувши за протилежні вершини, витягнути в лінію.

**6.35.** На відстані  $a = 1$  м від довгого прямого провідника зі струмом  $I = 10$  А розташоване кільце, радіус якого  $r = 1$  см. Кільце розташоване так, що потік, який пронизує кільце, максимальний. Чому дорівнює кількість електрики, яка протече по кільцю, якщо струм в провіднику виключити? Опір кільця  $R = 10$  Ом. Магнітне поле в межах кільця вважати практично однорідним.

**6.36.** По довгому прямому провіднику протікає струм. Біля провідника розташована квадратна рамка із тонкого проводу, опір якого  $R = 0,02$  Ом. Провідник знаходиться в площині рамки і паралельний до двох її сторін, відстань до яких дорівнює  $a_1 = 10$  см і  $a_2 = 20$  см відповідно. Знайти силу струму в провіднику, якщо при його виключенні через рамку протекла кількість електрики  $q = 6,93$  мкКл.

**6.37.** Короткозамкнутий виток дроту, опір якого  $R = 0,5$  Ом , має квадратну форму із стороною  $a = 10$  см. Виток розташували в однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 50$  мТл. Вектор  $\vec{B}$  перпендикулярний площині витка. Потім витку надали форму кола, не розтягуючи дріт, а тільки деформуючи його. Який заряд протече через поперечний переріз дроту в результаті такої деформації витка?

**6.38.** Між полюсами електромагніту розміщена невелика котушка так, що осі котушки і полюсних кінців магніту співпадають . Площа поперечного перерізу котушки  $S = 3$  мм<sup>2</sup>, число витків  $N=60$ . При повороті котушки на  $180^\circ$  через балістичний гальванометр, що включений послідовно з котушкою, протікає заряд  $q = 4,5$  мкКл. Визначити напруженість поля  $H$  між полюсами. Опір котушки, гальванометра і з'єднувальних проводів разом складають  $R = 40$  Ом.



**6.39.** В накоротко замкнуту котушку один раз швидко, а другий раз повільно вставляють магніт. а) Чи однакова кількість електрики індукується в котушці в першому і другому випадку? б) Чи однакову роботу проти електромагнітних сил виконує сила руки, яка всовує магніт в цих випадках?

**6.40.** Паралельно з'єднана котушка, індуктивність якої  $L = 0,01$  Гн, і опір  $R = 10$  Ом підключені через ключ К до батареї з е.р.с.  $\mathcal{E} = 12$  В і внутрішнім опором  $r = 2$  Ом (рис.6.13). В початковий момент часу ключ К розімкнутий і струму в колі немає. Який заряд протече через опір  $R$  після замикання ключа? Опором котушки знехтувати.

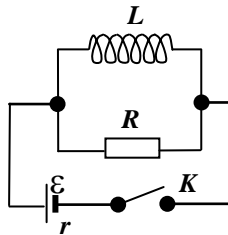


Рис.6.13.

**6.41.** Для вимірювання магнітної проникності заліза був виготовлений тороїд з цього матеріалу завдовжки 50 см по периметру та площею поперечного перерізу  $4 \text{ см}^2$ . Осердя тороїда спочатку розмагнічене. Одна з обмоток тороїда має 500 витків і була підключена до джерела струму. Інша обмотка має 100 витків і була підключена до гальванометра. Переключаючи напрямку струму у першій обмотці на протилежний отримаємо у другій обмотці індуктивний струм. Знайти магнітну проникність заліза, якщо відомо, що кількість електрики, яка пройшла через гальванометр дорівнює  $2,5$  мКл при переключенні у першій обмотці напрямку струму, сила якого  $1$  А. Опір другої обмотки дорівнює  $40$  Ом.

**6.42.** На дерев'яний циліндр, довжина якого  $l = 20$  см значно більша його діаметру, навиті щільно одна на одну дві мідні обмотки із мідного проводу, переріз якого  $S = 2 \text{ мм}^2$ . Одна із обмоток замкнута накоротко. Яка кількість електрики індукується в ній, якщо другу обмотку під'єднати до джерела струму з е.р.с.  $\mathcal{E} = 2$  В і дуже малим внутрішнім опором?

**6.43.** За допомогою реостата рівномірно збільшують силу струму в контурі на  $\Delta I = 0,1$  А за секунду. Індуктивність котушки  $L = 0,01$  Гн. Знайти середнє значення е.р.с. самоіндукції.

**6.44.** Індуктивність котушки  $L = 0,002$  Гн. Струм, частота якого  $f = 50$  Гц, протікає котушкою і змінюється за гармонічним законом. Чому дорівнює середня значення е.р.с. самоіндукції, яка виникає за інтервал часу  $\Delta I$ , на протязі якого струм в котушці змінюється від мінімального до максимального значення? Амплітудне значення сили струму  $I = 10$  А.

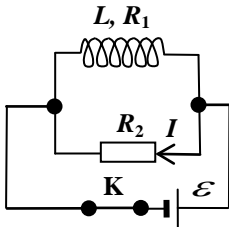


Рис.6.14.

**6.45.** Котушка, індуктивність якої  $L = 6$  мГн, активний опір  $R_1 = 0,5$  Ом, паралельно з'єднана з провідником, опір якого  $R_2 = 2,5$  Ом. По провіднику протікає струм  $I = 1$  А (рис.6.14) Визначити кількість електрики, яка буде індукована в котушці при розмиканні кола ключем К.

**6.46.** Котушка, яка намотана в один шар на немагнітний циліндричний каркас, має  $N = 750$  витків і індуктивність  $L_1 = 25$  мГн. Щоб збільшити індуктивність котушки до  $L_2 = 36$  мГн, обмотку з котушки зняли і замінили обмоткою із більш тонкого проводу в один шар з таким розрахунком, щоб довжина котушки залишилась попередньою. Скільки витків стало в котушці після перемотки?

**6.47.** Визначити індуктивність двопровідної лінії на ділянці довжиною  $l = 1$  км. Радіус проводу  $R = 1$  мм, відстань між осевими лініями  $d = 0,4$  м.

**6.48.** Соленоїд, переріз якого  $S = 5$  см<sup>2</sup>, містить  $N = 1200$  витків. Індукція магнітного поля всередині соленоїда при струмі  $I = 2$  А дорівнює  $B = 0,01$  Тл. Визначити індуктивність соленоїда.

**6.49.** Соленоїд містить  $N = 1000$  витків. Переріз осердя соленоїда  $S = 10$  см<sup>2</sup>. Обмоткою протікає струм, який створює всередині поле, індукція якого  $B = 1,5$  Тл. Визначити середнє значення е.р.с., яке виникає на затискачах соленоїда, якщо струм зменшується до 0 за час  $t = 5 \cdot 10^{-2}$  с.

**6.50.** Дві котушки розташовані на великій відстані одна від одної. Коли сила струму в першій котушці змінюється із швидкістю  $\Delta I/\Delta t = 5 \text{ А/с}$ , у другій котушці виникає е.р.с. індукції  $\mathcal{E}_i = 0,1 \text{ В}$ . Визначити коефіцієнт взаємної індукції котушок.

**6.51.** По сусідству розташовані 2 витки із проводу. По одному із них протікає струм силою  $I = 10 \text{ А}$ . В коло другого витка ввімкнений балістичний гальванометр. Повний опір цього кола  $R = 5 \text{ Ом}$ . Чому дорівнює взаємна індуктивність витків, якщо при включенні струму  $I$  в першому витку через гальванометр протікає заряд  $q = 10 \text{ нКл}$ ?

**6.52.** Із проводу, радіус якого  $a = 1 \text{ мм}$ , виготовлена прямокутна рамка, довжина якої  $l = 10 \text{ м}$  значно більша ширини  $b = 0,1 \text{ м}$  (ширина виміряна між осями сторін рамки). Знайти індуктивність  $L$  рамки. Рамка знаходиться в повітрі. Магнітним полем всередині проводу знехтувати.

**6.53.** Як буде змінюватись з часом сила  $I$  струму в колі, параметри якого показані на рис.6.15, після того, як ключ  $K$  буде замкнутий? Омічним опором всього кола на початковій стадії процесу встановлення струму можна знехтувати.

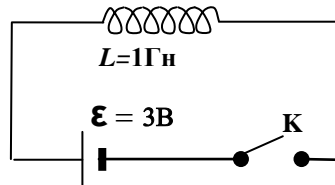


Рис.6.15.

**6.54.** Для визначення взаємної індуктивності  $L_{12}$  обмоток трансформатора виконують наступний дослід. Первинна обмотка через опір  $R_1$  підключається до джерела постійної напруги  $\mathcal{E}$ . В коло вторинної обмотки включається балістичний гальванометр  $G$ , який вимірює повний заряд  $Q$ , що протікає у вторинному контурі. Опір  $R_2$  вторинного контуру відомий. Знайти  $L_{12}$ .

Прийняти:  $R_1 = 1000 \text{ Ом}$ ,  $\mathcal{E} = 100 \text{ В}$ ,  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ ,  $Q = 1 \text{ мКл}$ .

**6.55.** Всередині тонкого повітряного соленоїда знаходиться маленька плоска котушка з числом витків  $N_1 = 20$  і площею витка  $S_1 = 4 \text{ см}^2$ , обмоткою якої протікає струм  $I_1 = 0,5 \text{ А}$ . Довжина соленоїда

$l_2 = 0,5$  м, число витків  $N_2 = 5000$  витків. Визначити магнітний потік, який посиляє поле котушки через обмотку соленоїда..

**Вказівка.** Використати теорему про рівність взаємних індуктивностей.

**6.56.** На одне осердя намотані дві котушки. Індуктивності котушок, окремо, відповідно дорівнюють  $L_1 = 0,4$  Гн і  $L_2 = 0,9$  Гн. Чому дорівнює взаємна індуктивність  $L_{12}$  котушок? Розсіюванням магнітного поля знехтувати.

**6.57.** Два колових витка із струмом  $I_1$  і  $I_2$ , радіуси яких  $R_1$  і  $R_2$ , розташовані так, що їхні центри співпадають, а нормалі утворюють кут  $\alpha$ . Знайти їх взаємну індуктивність  $L_{12}$ , якщо  $R_2 \ll R_1$ .

**6.58.** Дві котушки, індуктивності яких  $L_1$  і  $L_2$  з'єднані послідовно одна з одною. Визначити їх спільну індуктивність  $L$  у випадках їхнього взаємного розташування, як показано на рис.6.16.

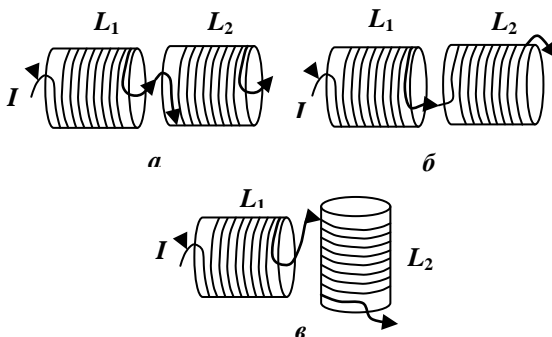


Рис.6.16.

Взаємна індуктивність у випадку, показаному на рис.6.16а, дорівнює  $L_{12} > 0$ .

**6.59.** Знайти взаємну індуктивність  $L_{12}$  двох витків, радіуси яких  $R_1$  і  $R_2$ , а центри їхні лежать на осі  $x$  на відстані  $l$  один від одного ( $l \gg R_1, R_2$ ). Вектори нормалей до площини витків направлені вздовж осі  $x$ .

**6.60.** На рис.6.17. приведений графік залежності струму через дросель при підключенні його до джерела постійного струму. Обмотка дроселя складається із мідного проводу з площею перерізу  $S = 1 \text{ мм}^2$ , діаметр осердя дорівнює  $d = 5 \text{ см}$ . Опором всіх частин

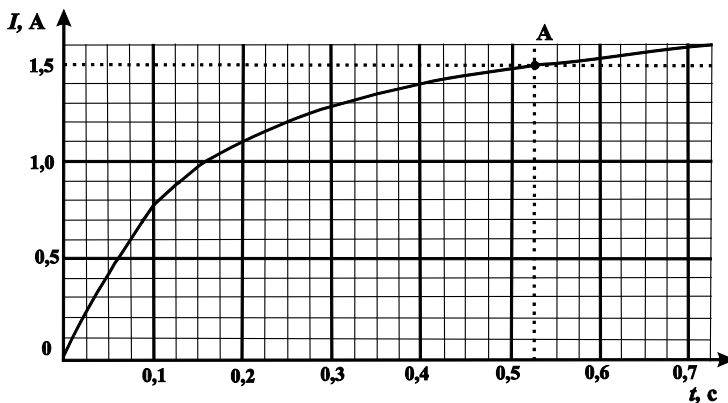


Рис.6.17.

кола, крім обмотки дроселя, можна знехтувати. Визначити через  $t = 0,525 \text{ с}$  після включення струм через дросель:

- індукцію магнітного поля в осерді дроселя;
- магнітну проникність матеріалу осердя.

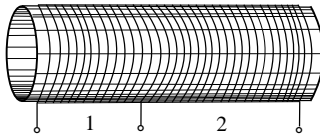
#### Додаткові задачі

**6.61.** В однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 0,77 \text{ Тл}$ , з невеликою швидкістю обертається квадратна рамка навколо осі, що проходить через середини протилежних сторін. Вісь обертання перпендикулярна лініям індукції магнітного поля. Сторона рамки  $a = 5 \text{ см}$ , складається вона із невеликої кількості витків мідного проводу, переріз якого  $S = 0,5 \text{ мм}^2$ . Кінці рамки з'єднані накоротко. Максимальне значення сили струму, який індукується в проводі рамки при її обертанні, дорівнює  $I_{\max} = 1,9 \text{ А}$ . а) Визначити кількість обертів рамки за секунду. б) Як потрібно змінити швидкість обертання рамки, щоб при заміні мідного проводу на алюмінієвий сила струму в колі залишилась незмінною?

**6.62.** Індукція магнітного поля довгого соленоїда, радіус перерізу якого  $R = 8$  см, змінюється з часом за законом  $B = B_0(1 - t^2/\tau^2)$ , де  $B_0 = 25$  мТл,  $\tau = 0,4$  с. Знайти напруженість вихрового електричного поля на поверхні соленоїда  $E(R)$  у момент часу  $t = \tau$ .

**6.63.** Напруженість однорідного електричного поля всередині плоского повітряного конденсатора з обкладками у формі дисків змінюється з часом за законом  $E = E_0 \cos 2\pi\nu t$ , де  $E_0 = 22$  кВ/м,  $\nu = 50$  Гц. Знайти максимальне значення індукції магнітного поля всередині конденсатора на відстані  $r = 4$  см від його осі.

**6.64.** Одношарова досить довга котушка з залізним осердям



розділена на дві секції (див. рисунок). Вимірювання індуктивностей секцій дали такі результати: в першій секції  $L_1 = 0,04$  Гн, у другій секції  $L_2 = 0,09$  Гн. а) За цими даними визначити індуктивність  $L$  всієї котушки. б) Скільки витків  $N$  є у всієї котушки, якщо в першій секції є  $N_1 = 100$  витків?

**6.65.** Два паралельних досить довгих прямих проводи знаходяться на відстані 15 см один від одного. В проводах підтримуються однакові за величиною струми, сила яких 15 А. Напрямки струмів взаємно протилежні. Як зміниться магнітна енергія одиниці довжини системи при переміщенні проводів до відстані 30 см? За рахунок яких джерел енергії збільшується магнітна енергія?

**6.66.** Котушка датчика магнітного поля виготовлена із мідного проводу, діаметр перерізу якого  $d = 0,2$  мм. Радіус котушки  $r = 1$  см. Датчик визначає індукцію магнітного поля за величиною заряду, який протікає через котушку, яка замикається на гальванометр, коли її вносять в магнітне поле так, що вісь котушки співпадає з напрямком поля. Визначити індукцію магнітного поля, якщо через гальванометр, коли котушку внесли в поле, протік заряд  $q = 10^{-4}$  Кл.

**6.67.** Індукція однорідного магнітного поля всередині циліндра, радіус якого  $r = 5$  см, лінійно зростає з часом:  $B = at$  (коефіцієнт  $a = 10^{-2}$  Тл/с). Магнітне поле направлене вздовж осі циліндра. Яка буде напруженість вихрового електричного поля на відстані  $b = 10$  см від осі циліндра?

**6.68.** Через соленоїд, довжина якого  $l_1 = 20$  см і радіус поперечного перерізу  $r_1 = 2$  см, протікає синусоїдальний струм  $I = I_0 \sin(2\pi \nu t)$ , де  $I_0 = 10$  А,  $\nu = 50$  Гц. Число витків в соленоїді  $N_1 = 200$ . Знайти розподіл напруженості вихрового електричного поля всередині соленоїда. Яку максимальну напругу  $U_{max}$  створює це поле в котушці, довжина якої  $l_2 = 4$  см, радіус поперечного перерізу  $r_2 = 1$  см і кількість витків  $N_2 = 50$ , яка розміщена всередині соленоїда вздовж його осі?

**6.69.** Якщо водій трамвая на повному ході виключить напругу на входних клеммах двигуна і з'єднає їх накоротко, то вагон швидко зупиниться. Як це пояснити?

**6.70.** Знаменитий англійський фізик М.Фарадей в 1831 р. відкрив явище електромагнітної індукції. Фарадей довго ретельно шукав це явище, керуючись загальною ідеєю про зв'язок явищ електрики і магнетизму. Одночасно з Фарадеєм і незалежно від нього в цьому ж напрямку працював швейцарський фізик Колладон, керуючись тією ж ідеєю.

Суть досліду Колладона був в наступному: кінці соленоїда з'єднувались з гальванометром, який для усунення впливу магніта \*) був винесений в сусідню кімнату. Колладон всовував магніт в соленоїд і йшов в сусідню кімнату дивитись, що показує гальванометр. В чому була помилка Колладона? Чому йому не вдалось відкрити явище електромагнітної індукції?

\*) В часи Колладона застосовувались гальванометри, в яких легка магнітна стрілка підвішувалась всередині котушки. По відхиленню стрілки судили про наявність струму в котушці. При такій системі гальванометра неминучий вплив магніта, який переміщувався біля гальванометра.

## 7. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

### 7. 1. Питання теми

1. Рівняння гармонічних коливань.
2. Геометричне зображення гармонічних коливань.
3. Додавання однаково спрямованих та взаємно перпендикулярних гармонічних коливань.
4. Електричні коливання в ідеалізованому контурі.

### 7. 2. Основні визначення та формули

#### Механічні коливання

1. Рівняння гармонічних коливань:

$$x = A \sin (\omega_0 t + \varphi_1) \quad (7.1)$$

або

$$x = A \cos (\omega_0 t + \varphi_2), \quad (7.2)$$

де  $x$  – зміщення точки, яка коливається, від положення рівноваги;  $t$  – час,  $A$  – амплітуда коливання,  $\omega_0$  – циклічна частота;  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$  – початкові фази коливань;  $(\omega_0 t + \varphi_1)$  та  $(\omega_0 t + \varphi_2)$  – фази коливань.

2. Циклічна частота

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0, \quad (7.3)$$

або

$$\omega_0 = 2\pi/T_0, \quad (7.4)$$

де  $\nu_0$  – лінійна частота коливань (кількість коливань за одиницю часу),  $T_0$  – період гармонічних коливань (час, за який здійснюється одне повне коливання).

3. Швидкість точки, яка здійснює гармонічні коливання:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos (\omega_0 t + \varphi_1), \quad (7.5)$$

або

$$v = -A\omega_0 \sin (\omega_0 t + \varphi_2). \quad (7.6)$$



**4. Прискорення при гармонічному коливанні:**

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (7.7)$$

або

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \quad (7.8)$$

**5.** Сила, що діє на тіло при вільному гармонічному коливанні (квазіпружна сила), завжди пропорційна зміщенню і спрямована в сторону, яка є протилежною цьому зміщенню. Тобто

$$F = ma = -m\omega_0^2 x = -kx, \quad (7.9)$$

де  $k$  – коефіцієнт квазіпружної сили,  $m$  – маса тіла, яке коливається.

**6.** Повна енергія точки, що коливається, визначається як сума кінетичної та потенційної енергій:

$$W = W_k + W_{\pi} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \quad (7.10)$$

де  $W_k = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$  – максимальна кінетична енергія,  $W_{\pi} = \frac{kA^2}{2}$  – максимальна потенційна енергія.

**7. Період гармонічних коливань дорівнює:**

**а)** для тіла, яке підвішене на пружині

$$T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}, \quad (7.11)$$

де  $m$  – маса тіла,  $k$  – жорсткість пружини;

**б)** для математичного маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}, \quad (7.12)$$

де  $l$  – довжина маятника,  $g$  – прискорення вільного падіння.

**8.** Амплітуда результуючого коливання, що отримується при додаванні двох однаково спрямованих коливань з однаковими частотами, знаходиться за формулою:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (7.13)$$

де  $A$  – амплітуда результуючого коливання,  $A_1$  та  $A_2$  – амплітуди коливання, які додаються,  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$  – їхні початкові фази.

**9.** Початкова фаза результуючого коливання знаходиться за формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} . \quad (7.14)$$

**10.** При складанні двох однаково спрямованих гармонічних коливань (7.2) з однаковими амплітудами  $A$  і нульовими початковими фазами, але з різними частотами, результуюче коливання називається биттям, а рівняння биття має вид:

$$x = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t , \quad (7.15)$$

де  $\omega_1$  і  $\omega_2$  – частоти коливань, які додаються.

**11.** Рівнянням траєкторії точки, що приймає участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, є

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (7.16)$$

### Електричні коливання

**12.** Формули, які описують електричні коливання в ідеалізованому контурі, легко отримати із формул, для механічних коливань. При цьому необхідно вважати, що зміщенню від положення рівноваги  $x$  відповідає  $q$  – заряд на обкладинці конденсатора, швидкості  $v$  – сила струму  $I$ , масі  $m$  – індуктивність котушки  $L$ , жорсткості пружинки  $k$  –  $1/C$ , де  $C$  – ємність конденсатора, кінетичній енергії  $mv^2/2$  – енергія магнітного поля котушки  $LI^2/2$ , потенційній енергії пружинки  $kx^2/2$  – енергія зарядженого конденсатора  $q^2/(2C)$ .

*Наприклад:* Період електромагнітних коливань в контурі, що складається з ємності  $C$  та індуктивності  $L$  визначається за формулою:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi/\omega_0, \quad (7.17)$$

де

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (7.18)$$

– циклічна частота.

Сила струму в такому контурі,

$$I = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad (7.19)$$

або

$$I = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_2), \quad (7.20)$$

де

$$I_m = q_m \omega_0. \quad (7.21)$$

Тут  $q_m$  – максимальний заряд конденсатора.

### 7.3. Питання на самопідготовку

1. Дати визначення коливального руху.
2. Які коливання називаються гармонічними? Записати рівняння гармонічних коливань.
3. Характеристики гармонічних коливань: амплітуда, фаза, циклічна частота, лінійна частота, початкова фаза. Дати їх визначення.
4. Як проявляється закон збереження енергії при гармонічних коливаннях?
5. Геометричне зображення гармонічного коливання.
6. Додавання однаково спрямованих гармонічних коливань з однаковими та різними частотами. При якій умові утворюються коливання, що носять назву «биття»?
7. Додавання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань з однаковими та різними частотами. Що таке фігури Ліссажу?
8. Яка відповідність між гармонічними механічними коливаннями і коливаннями, які виникають в ідеалізованому електричному контурі?

### 7.4. Методичні вказівки

1. При складанні  $n$  ( $n > 2$ ) однаково спрямованих коливань з однаковими періодами амплітуду та початкову фазу результуючого коливання можна знаходити за формулами (7.13) і (7.14) послідовно застосовуючи їх  $(n - 1)$  разів. Однак ефективним в цьому випадку буде застосування графічного методу додавання коливань.

2. В задачах, де необхідно визначити траєкторію точки, яка приймає участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, треба виключити час  $t$  з рівнянь коливань, які додаються.

3. Основна задача в теорії електричних коливань – це знаходження закону зміни з часом якої небудь електричної або магнітної фізичної величини.

Наприклад: заряду конденсатора  $q(t)$ , сили струму в контурі  $I(t)$ , енергії магнітного поля котушки  $W_H(t) = LI^2/2$  і т. п. Потім використання рівнянь, які зв'язують між собою різні фізичні величини, дозволить визначити невідомі величини.

4. В задачах на коливання час  $t$  вимірюється в секундах.

## 7.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 7.1.** Матеріальна точка, маса якої  $m = 5$  г, здійснює гармонічні коливання з частотою  $\nu_0 = 0,5$  с<sup>-1</sup>, амплітудою коливань  $A = 3$  см. Визначити 1) швидкість  $v$  точки в момент часу, коли зміщення  $x = 1,5$  см; 2) максимальну силу  $F_{max}$ , яка діє на точку; 3) повну енергію  $W$  точки.

**Розв'язок.** 1) Знайдемо зв'язок між швидкістю  $v$  точки і її зміщенням від положення рівноваги за допомогою формул (7.1) і (7.5). Піднесемо ці формули справа і зліва до квадрату і почленно складемо. Тоді отримаємо, що

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = A^2.$$

Звідки знаходимо, що

$$v = \pm \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2} = \pm 2\pi\nu_0 \sqrt{A^2 - x^2}.$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо, що

$$\begin{aligned} v &= \pm 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \sqrt{9 \cdot 10^{-4} - 2,25 \cdot 10^{-4}} = \\ &= \pm 8,2 \cdot 10^{-2} \text{ м/с} = \pm 8,2 \text{ см/с}. \end{aligned}$$

Знак “+” відповідає випадку, коли напрямок швидкості співпадає з додатнім напрямком осі X. Знак “-” відповідає випадку, коли напрямок швидкості співпадає з від’ємним напрямком осі X.

2) Силу, що діє на точку, знайдемо за другим законом Ньютона і з допомогою (7.7):

$$F_{\max} = ma_{\max} = mA\omega_0^2 = 4\pi^2\nu_0^2 mA;$$

$$F_{\max} = 4 \cdot 9,87 \cdot 0,25 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,03 \text{ мН} = 1,49 \text{ мН}.$$

3) Повна енергія:  $W = mv_m^2/2$ , де згідно формули (7.5)  $\nu_m = 2\pi\nu_0 A$ . Тому

$$\begin{aligned} W &= 2\pi^2 m \nu_0^2 A^2 = \\ &= 2 \cdot 9,87 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25 \cdot 9 \cdot 10^{-11} = 22,1 \text{ мкДж}. \end{aligned}$$

**Задача 7.2.** Матеріальна точка приймає участь в трьох коливаннях, які відбуваються вздовж однієї прямої і мають вид:

$$x_1 = 3 \cos t; x_2 = 3 \cos(t + \frac{\pi}{3}); x_3 = 3 \sin(t + 7\frac{\pi}{6}).$$

Визначити амплітуду та початкову фазу результуючого коливання. Написати його рівняння. (Зміщення  $x$  вимірюється у відносних одиницях).

**Розв’язок.** Перепишемо третє рівняння таким чином:

$$x_3 = 3 \cos(t + 7\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) = 3 \cos(t + \frac{2\pi}{3}).$$

Початкові фази коливань:  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ ;  $\varphi_3 = \frac{2\pi}{3}$ . Складемо перші два коливання. Результуюча амплітуда за формулою (7.13) буде:

$$\begin{aligned} A' &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = A_1 \sqrt{2[1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]} = \\ &= 3\sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{3})} = 3\sqrt{2(1 + \frac{1}{2})} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Початкова фаза результуючого коливання за формулою (7.14) буде:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \frac{\sin 0 + \sin \frac{\pi}{3}}{\cos 0 + \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\varphi' = \pi/6.$$

Результуюче коливання буде мати вид:

$$x' = 3\sqrt{3} \cos(t + \frac{\pi}{6}).$$

Додамо до  $x'$  коливання  $x_3$ , тоді

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A' \sin \varphi' + A_3 \sin \varphi_3}{A' \cos \varphi' + A_3 \cos \varphi_3} = \frac{\sqrt{3} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \frac{1}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}; \quad \varphi = \frac{\pi}{3},$$

а

$$A = \sqrt{A'^2 + A_3^2 + 2A'A^2 \cos(\varphi_3 - \varphi')} =$$

$$= 3\sqrt{3 + 1 + 2\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2}} = 3\sqrt{4} = 6.$$

Тоді результуюче коливання буде:  $x = 6 \cos(t + \pi/3)$ .

Цей же результат можемо швидше отримати за допомогою графічного методу додавання коливань. Довжина кожного вектора дорівнює амплітуді коливання, а кут між вектором та віссю  $OX$  – початковий фазі. Тоді

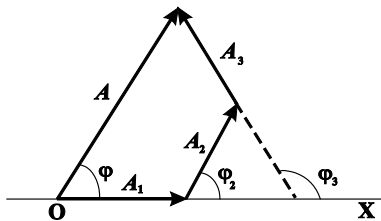


Рис.7.1.

отримаємо (див.рис.7.1):  $\varphi = \pi/3$ ;  $A = 2A_1 = 6$ .

**Задача 7.3.** Точка приймає участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях:

$$x = 2 \sin \pi t \text{ см},$$

$$y = \cos \pi t \text{ см}.$$

Знайти рівняння траєкторії точки і вказати напрямок руху точки. Визначити швидкість та прискорення точки в момент часу  $t = 0,5$  с.

**Розв'язок.** Скориставшись формулою (7.16) отримаємо, що при  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \pi/2$  рівняння траєкторії точки буде:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Це рівняння еліпса з півосями  $a = 2$  см та  $b = 1$  см. Для того, щоб визначити напрямок руху точки врахуємо, що в момент  $t = 0$ ,  $x = 0$ , а  $y = +1$  см. При зростанні  $t$  збільшується  $x$ , а  $y$  зменшується. Це означає, що точка рухається траєкторією за годинниковою стрілкою. Швидкість  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ , а прискорення  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ , де

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cos \pi t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\pi \sin \pi t,$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2\pi^2 \sin \pi t,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\pi^2 \cos \pi t.$$

Підставляючи ці значення в формули для швидкості та прискорення знайдемо:

$$v = \sqrt{4\pi^2 \cos^2 \pi t + \pi^2 \sin^2 \pi t},$$

$$a = \sqrt{4\pi^4 \sin^2 \pi t + \pi^4 \cos^2 \pi t}.$$

В момент часу  $t = 0,5$  с отримаємо:  $v = 3,14$  см/с,  $a = 19,7$  см<sup>2</sup>/с.

**Задача 7.4.** При складанні двох гармонічних коливань одного напрямку результуюче коливання точки має вид:

$$x = a \cos(2,1t) \cdot \cos(50t),$$

де  $t$  в секундах. Знайти циклічні частоти коливань, які складаються, та період биття результуючого коливання.

**Розв'язок.** Порівнюючи дане в умові задачі рівняння результуючого коливання із формулою (7.15), отримаємо співвідношення:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = 2,1; \quad \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = 50.$$

Звідки знаходимо, що

$$\omega_1 = 47,9 \text{ рад/с, а } \omega_2 = 52,1 \text{ рад/с.}$$

Амплітуда биття

$$A = |a \cos(2,1t)|$$

а значить період биття

$$T = \frac{2\pi}{2 \cdot 2,1} = 1,5 \text{ с.}$$

**Задача 7.5.** Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого  $C = 5 \text{ мкФ}$ , та котушки, індуктивність якої  $L = 0,2 \text{ Гн}$ . Визначити максимальну силу струму  $I_m$  в контурі, якщо максимальна різниця потенціалів на обкладинках конденсатора  $U_m = 90 \text{ В}$ . Опором контура знехтувати.

**Розв'язок.** Рівняння, яке визначає заряд на обкладинках конденсатора для випадку  $R = 0$  є  $q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ . Сила струму  $I = dq/dt = q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Амплітуда сили струму  $I = q_m \omega_0$ , де

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad q_m = CU_m.$$

Тоді

$$I_m = CU_m/\sqrt{LC} = U_m \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,45 \text{ А.}$$

**Задача 7.6.** До вертикальної невагомої пружини, верхній кінець якої закріплений, підвісили тягарець, маса якого  $m = 50 \text{ г}$  (рис.7.2). Жорсткість пружини  $k = 50 \text{ Н/м}$ . Записати рівняння малих вертикальних коливань системи, які виникнуть, якщо вивести тягарець із положення рівноваги. Вважати, що в початковий момент часу  $t = 0$  тягарець відтягнули вниз на відстань  $x_0 = 2 \text{ см}$  і надали



йому початкову швидкість  $v_0 = 0,707$  м/с, яка направлена вниз (вгору).

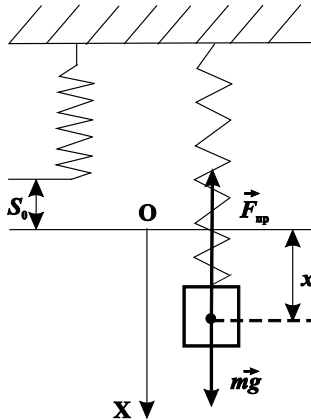


Рис.7.2.

**Аналіз.** Під дією тягарця пружина розтягнеться на величину  $S_0$ , яку знайдемо із умови стійкої рівноваги

$$mg = kS_0. \quad (1)$$

Це стійке положення тягарця приймемо за початок відліку зміщення тягарця. Якщо тягарець змістити вниз на величину  $x$ , то повний розтяг пружини буде  $x + S_0$  і сила пружності

$$F_{np} = -k(x + S_0). \quad (2)$$

Тоді рівняння руху тягарця (друге рівняння Ньютона) в скалярній формі можна записати так:

$$m\ddot{x} = mg - k(x + S_0)$$

Врахувавши (1) і (2) отримаємо, що

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (3)$$

Це є диференціальне рівняння гармонічних коливань, яке дозволяє визначити циклічну частоту коливань, а саме  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Амплітуду коливань  $A$  можна знайти, розглядаючи зміну енергії при переході із положення, в якому система знаходилась в момент  $t = 0$ , в положення, при якому  $x = A$ . Повна енергія системи складається із кінетичної енергії тягарця, потенційної енергії тягарця в полі тяжіння Землі (пружинка невагома) і потенційної енергії пружної деформації. Оскільки сили тертя не враховуються і зовнішніх сил не має, то зміна повної енергії системи дорівнює нулю, тобто

$$\Delta W_k + \Delta W_{тяж} + \Delta W_{пруж} = 0, \quad (4)$$

де  $\Delta W_k$  – зміна кінетичної енергії,  $\Delta W_{тяж}$  – зміна потенційної енергії в полі тяжіння Землі,  $\Delta W_{пруж}$  – зміна потенційної енергії пружної деформації.

Після визначення амплітуди коливань початкову фазу  $\varphi_0$  можна знайти, виходячи із початкових умов, тобто значення зміщення  $x$  і швидкості  $v_x$  в момент часу  $t = 0$ .

**Розв'язок.** Циклічна частота коливань

$$\omega_0 = \sqrt{50/50 \cdot 10^{-3}} = 10\sqrt{10} \text{ рад/с.}$$

Розпишемо рівняння (4). В початковий момент часу ( $t = 0$ ) зміщення  $x = x_0$ , а швидкість  $v_x = v_0$ . В крайньому положенні  $x = A$ ,  $v_x = 0$ . Тому

$$\Delta W_k = -mv_0^2/2, \Delta W_{тяж} = -mg(A - x_0), \quad (5)$$

$$\Delta W_{пруж} = k(S_0 + A)^2/2 - k(S_0 + x_0)^2/2.$$

Зміна потенційної енергії системи буде:

$$\begin{aligned} \Delta W_{тяж} + \Delta W_{пруж} = \\ = -mg(A - x_0) + kA^2/2 - kx_0^2/2 + kS_0(A - x_0) \end{aligned}$$

(члени, які містять  $S_0^2$ , взаємно скорочуються). Враховуючи рівність (1), отримаємо, що

$$\Delta W_{тяж} + \Delta W_{пруж} = kA^2/2 - kx_0^2/2. \quad (6)$$

Підставимо (6) і вираз  $\Delta W_k$  із (5) в (4), і отримаємо, що

$$-mv_0^2/2 + kA^2/2 - kx_0^2/2 = 0.$$

Звідки знаходимо амплітуду коливань:

$$A = \sqrt{\frac{mv_0^2}{2} + x_0^2} = 0,03 \text{ м.}$$

Запишемо тепер вираз для  $x(t)$  і  $v_x(t)$ :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$v_x = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

При  $t = 0$

$$x(0) = A \cos \varphi_0 = x_0, \quad v_x(0) = \dot{x} = -A\omega_0 \sin \varphi_0 = \pm v_0. \quad (7)$$

Значить  $\varphi_0 = \arccos(x_0/A) = 0,268 \pi$  (або  $1,732 \pi$ ). Якщо швидкість  $v_0$  направлена вгору, то  $v_x(0) = -0,707 \text{ м/с}$  і із (7)

$\sin \varphi_0 = \frac{0,707}{0,3\sqrt{10}}$ . Звідки знаходимо, що  $\varphi_0 = 0,841 \text{ рад} = 0,268 \pi$ . Тоді рівняння коливань запишеться так:

$$x(t) = 0,03 \cos(10\sqrt{10}t + 0,268\pi) \text{ м.}$$

Якщо швидкість в момент  $t = 0$  направлена вниз, то у виразі (7)

$$v_0 = +0,707 \text{ м/с і } \sin \varphi_0 = \frac{0,707}{0,3\sqrt{10}}.$$

Звідки знаходимо, що  $\varphi_0 = 1,732\pi$ . Тоді рівняння коливання запишеться так:

$$x(t) = 0,03 \cos(10\sqrt{10}t + 1,732\pi) \text{ м.}$$

## 7.6. Задачі

### Механічні коливання

**7.7.** Визначити максимальну швидкість та максимальне прискорення точки, що коливається за законом  $x = 2 \cos \pi(t+1)$  см.

**7.8.** Рівняння руху точки задається у вигляді  $x = 2 \sin(\pi t/2 + \pi/4)$  см. Знайти період коливань, максимальну швидкість та максимальне прискорення точки.

**7.9.** Рівняння руху точки дано у вигляді  $x = \sin(\pi t/6)$ . Знайти моменти часу  $t$ , в яких досягається максимальна швидкість й максимальне прискорення.

**7.10.** Точка виконує гармонічне коливання. Період коливань  $T = 2$  с, амплітуда  $A = 50$  мм. Знайти швидкість  $v$  точки в момент часу, коли зміщення точки від положення рівноваги  $x = 25$  мм.

**7.11.** Написати рівняння гармонічного коливального руху, якщо максимальне прискорення точки  $a_{\max} = 49,3 \text{ см/с}^2$ , період коливань  $T = 2$  с і зміщення точки від положення рівноваги в початковий момент часу  $x_0 = 25$  мм.

**7.12.** При зміщенні точки від положення рівноваги навеличину  $x_1 = 2,4$  см швидкість точки  $v_1 = 3 \text{ см/с}$ , а при зміщенні

$x_2 = 2,8$  см її швидкість  $v_2 = 2$  см/с. Знайти амплітуду і період цього коливання.

**7.13.** Частинка здійснює гармонічні коливання вздовж осі  $X$  біля положення рівноваги  $x = 0$ . Частота коливань  $\omega_0 = 4$  рад/с. В деякий момент часу координата частинки  $x_0 = 25$  см, а швидкість  $v_{x_0} = 100$  см/с. Знайти координату  $x$  і швидкість  $v_x$  частинки через  $t = 2,4$  с після цього моменту.

**7.14.** Частинка здійснює гармонічні коливання з амплітудою  $A$  і періодом  $T$ . Знайти: а) час  $t_1$ , за який зміщення частинки змінюється від 0 до  $A/2$ , б) час  $t_2$ , за який зміщення частинки змінюється від  $A/2$  до  $A$ .

**7.15.** Частинка коливається вздовж осі  $OX$  за законом  $x = 0,1 \sin 6,28 t$  (м). Визначити середнє значення модуля швидкості частинки: а) за період коливань  $T$ , б) за першу  $1/8$  частину  $T$ , в) за другу  $1/8$  частину  $T$ . Співставити отримані результати.

**7.16.** За який час від початку руху точка, яка здійснює коливальний рух, рівняння якого  $x = 7 \sin 0,5\pi t$ , пройде шлях від положення рівноваги до максимального зміщення?

**7.17.** Початкова фаза гармонічних коливань дорівнює нулю. Через яку долю періоду швидкість точки буде дорівнювати половині її максимального значення.

**7.18.** Залежність координати  $x$  від часу  $t$  має вид  $x = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Визначити залежність  $\dot{x}(x)$  (швидкості від координати) і  $\ddot{x}(x)$  (прискорення від координати). Намалювати графіки цих залежностей.

**7.19.** Залежність координати  $x$  від часу  $t$  має вид  $x = A \sin(5\pi t + \varphi_0)$ . В початковий момент часу  $t = 0$  значення координати  $x_0 = 2$  см, а швидкості  $\dot{x}_0 = 35$  см/с. Визначити амплітуду  $A$  і початкову фазу  $\varphi_0$ .

**7.20.** Кулька підвішена на довгій нитці. Один раз її піднімають по вертикалі до точки підвісу, другий раз її відхиляють, як маятник на невеликий кут. В якому із цих випадків кулька швидше повернеться в початкове положення, якщо її відпустити?

**7.21.** Точка здійснює гармонічні коливання вздовж деякої прямої з періодом  $T_0 = 0,60$  с і амплітудою  $A = 10,0$  см. Знайти середню швидкість точки за час, на протязі якого вона проходить шлях  $A/2$ : а) із крайнього положення; б) із положення рівноваги.

**7.22.** В момент  $t = 0$  частинка починає рухатись вздовж осі  $x$  так, що проекція її швидкості змінюється за законом  $v_x = 35 \cos \pi t$  см/с, де  $t$  в секундах. Знайти шлях, який пройде ця частинка за перші  $t = 2,80$  с після початку руху.

**7.23.** Мідна кулька, яка підвішена на пружині, здійснює гармонічні коливання. Як зміниться період коливань, якщо до пружини підвісити замість мідної алюмінієву кульку такого ж радіусу?

**7.24.** В молекулі азоту  $N_2$  частота пружних коливань атомів  $\omega_0 = 4,45 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ , маса одного атома  $m = 2,32 \cdot 10^{-26}$  кг. Знайти коефіцієнт  $k$  квазіпружної сили, яка діє між атомами.

**7.25.** До спіральної пружинки підвішують знизу тягарець, маса якого значно більша маси пружинки. При цьому пружинка розтягується на 4 см. З якого частотою буде коливатись тягарець, якщо йому надати поштовх у вертикальному напрямку?

**7.26.** Рух поршня у двигуні внутрішнього згорання можна прийняти як гармонічні коливання. Визначити силу, яка діє на колінчатий вал зі сторони поршня, коли він знаходиться у „мертвій” точці. Маса поршня  $m = 1,2$  кг, частота обертів колінчатого валу  $f = 200$  об/хв, хід поршня  $a = 12$  см.

**7.27.** Тягарець, маса якого  $m = 50$  г, підвішений на пружині, жорсткість якої  $k = 49,3$  Н/м. Тягарець піднімають до такого положення, при якому пружина не напружена ( $x = 0$ ), і відпускають без поштовху. Нехтуючи тертям і масою пружини, а) знайти період  $T_0$  і амплітуду  $A$  коливань, що виникли; б) вважати, що вісь  $x$  направлена вниз і, прийнявши точку  $x = 0$  за початкове положення тягарця, написати рівняння руху тягарця.

**7.28.** Визначити: а) силу, яка діє на частинку, що здійснює гармонічні коливання, при проходженні нею положення рівноваги; б) її швидкість в той момент, коли вона знаходиться „в крайньому” положенні.

**7.29.** Деяка точка рухається вздовж осі  $x$  за законом  $x = a \sin^2(\omega_0 t - \pi/4)$ . Знайти: а) амплітуду і період коливань; зобразити графік  $x(t)$ ; б) проекцію швидкості як функцію координати  $x$ ; зобразити графік  $v_x(x)$ .

**7.30.** В кабіні ліфта підвішений маятник, період коливань якого, коли ліфт нерухомий, дорівнює  $T_0$ .

а) Який буде період  $T$  коливань маятника, якщо ліфт буде опускатися з прискоренням, яке дорівнює  $3g/4$ , де  $g$  – прискорення вільного падіння.

б) З яким прискоренням  $a$  необхідно піднімати ліфт для того, щоб період коливань маятника дорівнював  $T_0/2$ .

**7.31.** Нехтуючи тертям, визначити період малих коливань ртуті, яка налита в  $U$ -подібну трубку із внутрішнім перерізом  $S = 0,5 \text{ см}^2$  (рис.7.3). Маса ртуті  $m = 338 \text{ г}$ .

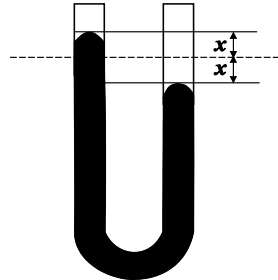


Рис.7.3.

**7.32.** Дерев'яне поліно намокло у воді і занурилось у воду так, що над водою знаходиться тільки дуже незначна його частина (порівняно із довжиною). Переріз поліна по всій довжині вважати однаковим. При слабому вертикальному поштовху поліна воно починає коливатись. Період цих вертикальних коливань поліна  $T_0 = 3 \text{ с}$ . Визначити довжину поліна.

**7.33.** Зобразити на векторній діаграмі коливання а)  $x = a \cos(\omega_0 t + \pi/4)$ , б)  $x = -2a \cos(\omega_0 t - \pi/6)$  в моменти часу  $t_1 = 0$  і  $t_2 = \pi/(2\omega_0)$ . Константа  $a > 0$ .

**7.34.** Зобразити на векторній діаграмі в моменти часу  $t = 0$  зміщення  $x = a \cos(\omega_0 t + \pi/3)$ , швидкість  $\dot{x}$ , прискорення  $\ddot{x}$  і похідну  $d^{11}x/(dt^{11})$ .

**7.35.** Залежність координати  $x$  від часу  $t$  має вид:

а)  $x = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t$ ; б)  $x = a \sin^2 \omega_0 t$ ; в)  $x = at \sin \omega_0 t$ ; г)  $x = 3 - 4 \sin(\omega_0 t - \pi/6)$ ; д)  $x = a \sin^3 \omega_0 t$ . Які із цих залежностей описують гармонічні коливання? Визначити для цих випадків значення  $x = x_0$ , які відповідають положенню рівноваги, амплітуду  $A$ , частоту  $\omega$  і початкову фазу  $\varphi_0$  для залежності  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ .

**7.36.** Написати рівняння результуючого коливання, яке отримується в результаті додавання двох взаємно перпендикулярних коливань з однаковою частотою  $\nu_1 = \nu_2 = 5$  Гц і з однаковою початковою фазою  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/3$ . Амплітуди коливань дорівнюють  $A_1 = 0,1$  м і  $A_2 = 0,05$  м.

**7.37.** Точка бере участь одночасно у двох коливаннях. Періоди і початкові фази однакові. Амплітуди коливань дорівнюють  $A_1 = 3$  см,  $A_2 = 4$  см. Знайти амплітуду результуючого коливання, якщо коливання виконуються:

а) в одному напрямку; б) у взаємно перпендикулярних напрямках.

**7.38.** Знайти графічним методом амплітуди коливань, які виникають при складанні наступних коливань одного напрямку:

а)  $x_1 = 3 \cos(\omega_0 t + \pi/3)$ ,  $x_2 = 8,0 \sin(\omega_0 t + \pi/6)$ ;

б)  $x_1 = 3,0 \cos \omega_0 t$ ,  $x_2 = 5,0 \cos(\omega_0 t + \pi/4)$ ,  $x_3 = 6,0 \sin \omega_0 t$ .

**7.39.** Визначити амплітуду і початкову фазу гармонічного коливання, яке отримується від додавання однаково направлених коливань, що задаються рівняннями  $x_1 = 0,02 \cdot \sin(5\pi t + \pi/2)$  м і  $x_2 = 0,03 \cdot \sin(5\pi t + \pi/4)$  м.

**7.40.** В результаті додавання двох однаково направлених гармонічних коливань с однаковими амплітудами і однаковими

періодами отримується результуюче коливання з тим же періодом і тією ж амплітудою. Знайти різницю фаз коливань, які додаються.

**7.41.** Рух частинки – це суперпозиція двох гармонічних коливань вздовж осі ОХ. Частоти цих коливань  $\nu_1 = 100$  Гц і  $\nu_2 = 101$  Гц. Визначити частоту  $\nu_6$  і період  $T_6$  биття. Скільки повних коливань здійснює частинка за один період биття?

**7.42.** Точка приймає участь одночасно у двох коливаннях одного напрямку, які відбуваються за законом  $x_1 = A \cos \omega_0 t$  і  $x_2 = A \cos 2\omega_0 t$ . Знайти максимальну швидкість точки.

**7.43.** Точка приймає участь одночасно в трьох коливаннях, що відбуваються вздовж однієї прямої:  $x_1 = 2 \cos t$ ;  $x_2 = 2 \sin(t - \pi/4)$ ;  $x_3 = 2 \cos t + \pi/2$  (зміщення дано в сантиметрах). Визначити амплітуду і початкову фазу результуючого коливання.

**7.44.** Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях  $x = 2 \sin \omega_0 t$  і  $y = 2 \cos \omega_0 t$ . Знайти траєкторію результуючого руху точки.

**7.45.** Точка бере участь в двох взаємно перпендикулярних коливаннях  $x = \cos \pi t$  і  $y = \cos(\pi t/2)$ . Знайти траєкторію результуючого руху точки.

**7.46.** Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях  $x = \sin \pi t$  і  $y = 2 \sin(\pi t + \pi/2)$ . Знайти траєкторію результуючого руху точки і накреслити її графік з нанесенням масштабу.

**7.47.** Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях  $x = \sin \pi t$  і  $y = 4 \sin(\pi t + \pi)$ . Знайти траєкторію результуючого руху точки і накреслити її графік з нанесенням масштабу.

**7.48.** Енергія частинки, маса якої  $m$ , є функція її координати  $x$  і швидкості  $\dot{x}$ : а)  $W = m\dot{x}^2 / 2 - kx^2 / 2$ ;



б)  $W = m\dot{x}^2 / 2 + kx^2 / 2 + bx$ ; в)  $W = m\dot{x}^2 / 2 + kx^4 / 2$ , де  $k > 0$  і  $b$  – константи. В яких випадках частинка здійснює гармонічні коливання? Знайти для цих випадків частоту власних коливань  $\omega_0$ .

**7.49.** Матеріальна точка (наприклад, кулька на пружині) під дією квазіпружної сили  $F = -kx$  здійснює коливання вздовж осі  $X$  навколо положення рівноваги. Показати, що середнє по часу значення кінетичної і потенційної енергії при таких коливаннях однакове.

**7.50.** Матеріальна точка, маса якої 10 г, коливається згідно рівняння  $x = 5 \sin(\pi t / 5 + \pi / 4)$  см. Знайти максимальну силу, яка діє на точку, і її повну енергію.

**7.51.** Повна енергія тіла, яке здійснює гармонічний коливальний рух,  $W = 12$  мкДж, максимальна сила, яка діє на тіло  $F_{\max} = 1,5$  мН. Написати рівняння руху цього тіла, якщо період коливань  $T_0 = 2$  с і початкова фаза  $\varphi_0 = \pi / 3$ .

**7.52.** Амплітуда гармонічних коливань матеріальної точки  $A = 2$  см, повна енергія коливань  $W = 0,3$  мкДж. При якому зміщенні  $x$  від положення рівноваги на цю точку буде діяти сила  $F = 22,5$  мкН?

**7.53.** До пружини підвішений тягар. Максимальна кінетична енергія коливань тягара дорівнює 1 Дж. Амплітуда коливань  $A = 5$  см. Знайти жорсткість пружини.

**7.54.** Частинка, маса якої  $m = 20$  г, здійснює гармонічні коливання вздовж осі  $X$  біля точки  $x = 0$  з частотою  $\omega_0 = 2$  рад/с. В початковий момент часу  $t = 0$  її координата  $x$  і швидкість  $\dot{x}$  дорівнюють відповідно: а)  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = -5$  см/с; б)  $x(0) = -4$  см,  $\dot{x}(0) = 0$ ; в)  $x(0) = -4$  см,  $\dot{x}(0) = 5$  см/с. Визначити для цих випадків повну механічну енергію частинки, амплітуду коливань  $A$  і амплітуду швидкості  $\dot{x}_m$ .

**7.55.** Написати залежність  $x(t)$  у випадках а), б), в) задачі 7.54 із урахуванням вказаних там початкових умов.

**7.56.** Для випадків а) і б) – задачі 7.54 написати залежність від часу кінетичної і потенційної енергії частинки.

**7.57.** Енергія частинки, яка здійснює гармонічні коливання, має вид  $W = m\dot{x}^2 / 2 + kx^2 / 2$ , де  $m$  – маса частинки,  $k$  – коефіцієнт квазіпружної сили. Знайти амплітуду  $A$  коливань і максимальну швидкість частинки  $\dot{x}_m$ .

**7.58.** Для гармонічного маятника, маса якого  $m$ , а координата  $x = a \cos(\omega_0 t + \pi/4)$ , намалювати графіки залежностей: а) кінетичної енергії  $W_k(t)$ , потенційної енергії  $W_p(t)$  повної механічної енергії  $W(t)$ ; б)  $W_k(W_p)$ ,  $W_k(x)$ ,  $W_p(x)$ .

**7.59.** Знайти відношення кінетичної енергії  $W_k$  точки, що виконує гармонічне коливання, до її потенційної енергії  $W_p$  для моментів часу: а)  $t = T_0/12$ ; б)  $t = T_0/8$ ; в)  $t = T_0/6$ . Початкова фаза коливань  $\varphi_0 = 0$ .

**7.60.** Знайти відношення кінетичної енергії  $W_k$  точки, що здійснює гармонічне коливання, до її потенційної енергії  $W_p$  для моментів, коли зміщення точки від положення рівноваги становить:

а)  $x = A/4$ ; б)  $x = A/2$ ; в)  $x = A$ , де  $A$  – амплітуда коливань.

### Електричні коливання

**7.61.** Зеленому кольору відповідає електромагнітна хвиля з циклічною коловою частотою коливань вектора  $\vec{E}$  (напруженості електричного поля)  $\omega_0 = 3,43 \cdot 10^{15} \text{с}^{-1}$ . Скільки повних коливань здійснює за секунду вектор  $\vec{E}$  і чому дорівнює період цих коливань?

**7.62.** Конденсатор, ємність якого  $C = 8 \text{ мкФ}$ , заряджається до напруги  $U_0 = 20 \text{ В}$  і замикається на котушку, індуктивність якої  $L = 0,2 \text{ мГн}$ . Чому дорівнює амплітуда  $I_m$  сили струму в такому коливальному контурі? Активним опором контуру знехтувати.

**7.63.** Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого  $C = 25 \text{ нФ}$ , і котушки, індуктивність якої  $L = 1,015 \text{ Гн}$ . Обкладка конденсатора має заряд  $q = 2,5 \text{ мкКл}$ . Написати рівняння (з числовими коефіцієнтами) зміни різниці потенціалів  $U$  на обкладках конденсатора і струму  $I$  в колі. Знайти різницю потенціалів на

обкладках конденсатора й струм в колі в моменти часу  $T_0/8$ ,  $T_0/4$ ,  $T_0/2$ . Побудувати графіки цих залежностей в межах одного періоду.

**7.64.** Рівняння зміни з часом різниці потенціалів на обкладках конденсатора в коливальному контурі має вигляд  $U = 50 \cos 10^4 \pi t$ , В. Ємність конденсатора  $C = 0,1$  мкФ. Знайти період коливань, індуктивність контуру, закон зміни з часом струму в колі.

**7.65.** В коливальному контурі (рис.7.4) індуктивність котушки  $L = 2,5$  мГн, а ємності конденсаторів  $C_1 = 2,0$  мкФ і  $C_2 = 3,0$  мкФ. Конденсатори зарядили до напруги  $U = 180$  В і замкнули ключ  $K$ . Знайти: а) період власних коливань; б) амплітудне значення струму через котушку.

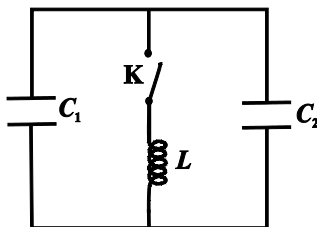


Рис.7.4

**7.66.** Чому дорівнює відношення енергії магнітного поля коливального контура до енергії електричного поля для моменту часу  $t = T_0/8$ . Початкова фаза коливань  $\varphi_0 = 0$ .

**7.67.** Яка енергія конденсатора в коливальному контурі в момент максимуму струму в контурі у випадках: а) опір контура нехтовно малий; б) опір контура має помітну величину  $R$ ?

**7.68.** Коло складається із послідовно з'єднаних двох однакових конденсаторів, ємність кожного з яких  $C = 10$  мкФ і котушки з індуктивністю  $L = 2$  мГн (рис.7.5). При розімкненому ключі  $K$  один із конденсаторів заряджають до різниці потенціалів  $U = 100$  В. Потім джерело відключають.

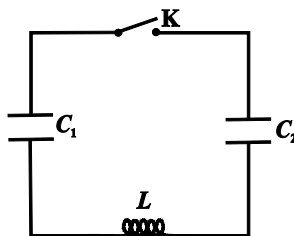


Рис.7.5.

Визначити закон зміни з часом заряду на конденсаторі після замикання ключа  $K$ .

## 8. ЗГАСАЮЧІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

### 8. 1. Питання теми

1. Згасаючі коливання та їхні характеристики.
2. Вимушені коливання.
3. Резонанс.

### 8. 2. Основні визначення та формули

1. Диференційне рівняння згасаючих коливань при наявності сили опору  $F_{\text{оп}}$  ( $F_{\text{оп}} = -rv$ , де  $r$  – коефіцієнт опору,  $v$  – швидкість) та його розв’язок:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$
$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_3 t + \varphi_0),$$

або (8.1)

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \varphi_0),$$

де  $A_0$  – максимально можливе відхилення від положення рівноваги,  $\beta$  – коефіцієнт згасання ( $\beta = r/(2m)$ , де  $m$  – маса тіла, яке здійснює коливальний рух),  $\varphi_0$  – початкова фаза,  $\omega_3$  – циклічна частота згасаючих коливань:

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (8.2)$$

де  $\omega_0$  – циклічна частота за відсутності згасання, так звана “власна” частота.

#### 2. Логарифмічний декремент згасання

$$\lambda = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \beta T, \quad (8.3)$$

де  $A_i$  та  $A_{i+1}$  – амплітуди двох послідовних коливань через період коливань  $T$ . Логарифмічний декремент згасання величина обернена до числа коливань  $N_e$ , які здійснює система за час, на протязі якого амплітуда зменшується в  $e \approx 2,718$  раз:

$$\lambda = 1/N_e$$

**3.** Для електричного коливального контура, який має ємність  $C$ , індуктивність  $L$  та опір  $R$ , заряд на обкладках конденсатора змінюється з часом за законом

$$q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_3 t + \varphi_0) \quad (8.4)$$

або

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \varphi_0),$$

де  $q_0 e^{-\beta t}$  – „амплітуда” згасаючих коливань,  $q_0$  – максимальний заряд конденсатора,  $\varphi_0$  – початкова фаза,  $\beta = R/(2L)$  – коефіцієнт згасання.

**4.** Добротність коливального контуру визначається за формулою:

$$Q = \pi/\lambda. \quad (8.5)$$

**5.** Рівняння вимушених механічних коливань під дією вимушуючої сили

$$F_x = F_0 \cos \omega t,$$

в диференційному вигляді буде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (8.6)$$

а в інтегральному вигляді –

$$x = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (8.7)$$

де амплітуда зміщення

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (8.8)$$

а

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8.9)$$

В цих формулах  $f_0$  – відношення амплітуди вимушуючої сили  $F_0$  до маси тіла  $m$ ,  $\omega$  – циклічна частота вимушуючої сили.

**6.** Максимум амплітуди коливань досягається при частоті вимушуючої сили

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\beta^2}. \quad (8.10)$$

7. Рівняння вимушених електричних коливань при послідовному включенні в контур напруги  $U = U_m \cos \omega t$  в диференційному вигляді буде:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (8.11)$$

Розв'язком цього рівняння є

$$q = q_a \cos(\omega t - \varphi), \quad (8.12)$$

де амплітуда заряду на конденсаторі

$$q_a = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (8.13)$$

а початкова фаза  $\varphi$  визначається за формулою (8.9). Максимум заряду (напруги) на конденсаторі досягається при частоті, яка визначається за формулою (8.10).

8. Сила струму в контурі визначається за формулою:

$$I = I_m \cos(\omega t - \psi), \quad (8.14)$$

де амплітуда сили струму

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}, \quad (8.15)$$

а фаза  $\psi$  –

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (8.16)$$

9. Амплітуда сили струму досягає максимуму (має місце резонанс) при частоті

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (8.17)$$

### 8.3. Питання на самопідготовку

1. Записати рівняння згасаючих коливань.
2. Дати визначення коефіцієнта та логарифмічного декременту згасання.
3. Розкрити фізичний зміст добротності коливального контура.

4. Як відрізняється циклічна частота загасаючих коливань від “власної” циклічної частоти коливальної системи?
5. Дати визначення аперіодичного процесу. Записати формулу для визначення критичного опору коливального контуру.
6. Записати рівняння вимушених коливань.
7. З якою частотою відбуваються вимушені коливання?
8. Записати і пояснити формулу для амплітуди вимушеного коливання.
9. Дати визначення явища резонансу. При яких умовах резонанс має місце?
10. Чим пояснюється зсув по фазі між вимушуючою силою (напругою) і зміщенням (зарядом) при вимушених коливаннях?

## 8.4. Методичні вказівки

1. Циклічна частота  $\omega_z$  згасаючих коливань завжди менша від циклічної частоти вільних коливань  $\omega_0$  через присутність опору. Таким чином опір середовища призводить до зменшення частоти та до збільшення періоду коливань. Незважаючи на це, в багатьох задачах, якщо опір середовища незначний, його впливом можна знехтувати. Це можливо робити при виконанні таких умов:

$$1) \quad \beta^2 \ll \omega_0^2, \text{ або } 2) \quad \lambda \ll 1. \quad (8.18)$$

2. Формули, які описують вимушені коливання для механічних і електричних систем за формою подібні (наприклад, формула (8.10)). Якщо для механічних систем  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ,  $\beta = r/(2m)$ , то для електричних систем  $\omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$ ,  $\beta = R/(2L)$ .

## 8.5. Приклади розв’язування задач

**Задача 8.1.** Тягар, маса якого 0,5 кг, підвішений до пружини, жорсткість якої  $k = 32$  Н/м, здійснює згасаючі коливання.

Визначити період коливань у двох випадках: 1) за час, протягом якого здійснилось  $n_1 = 88$  коливань, амплітуда зменшилась в  $N_1 = 2$  рази; 2) за час двох коливань ( $n_2 = 2$ ) амплітуда зменшилась в  $N_2 = 20$  раз.

**Розв'язок.** Період згасаючих коливань  $T = 2\pi/\omega_3$ .

Використавши формулу (6.2) отримаємо, що

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2/T^2}}.$$

Власна частота  $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 8 \text{ рад/с}$ , а  $\beta = \lambda/T$  (згідно формули (8.3)). Розв'язавши це квадратне рівняння відносно  $T$ , одержимо, що

$$T = \sqrt{\frac{4\pi}{\omega_0^2} + \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}} = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}{\omega_0}.$$

Амплітуда згасаючих коливань  $A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{\lambda t}{T}}$ . За умовою

задачі  $\frac{A_0}{A} = N$ ,  $\frac{t}{T} = n$ , тоді:

$$\frac{A_0}{A} = N = e^{\lambda n}, \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{\ln N}{n}.$$

Підставивши значення  $N$  та  $n$  для двох випадків, отримаємо:

$\lambda_1 = 0,0079$ ,  $\lambda_2 = 1,5$ . В першому випадку  $\lambda \ll 1$ , тому

$$T_1 \cong \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{8} = 0,78 \text{ с}, \text{ а } T_2 = \frac{\sqrt{4 \cdot 9,87 + 2,25}}{8} \approx 0,81 \text{ с}.$$

**Задача 8.2.** Добротність коливального контуру  $Q = 5$ . Визначити на скільки відсотків відрізняється частота  $\omega_3$  вільних коливань контура від його власної частоти  $\omega_0$ .

**Розв'язок** В задачі необхідно знайти величину

$$\chi = \frac{\omega_0 - \omega_3}{\omega_0} = 1 - \frac{\omega_3}{\omega_0}. \quad (1)$$

Згідно (8.2), (8.3) та (8.5):



$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi \omega_3}{\beta 2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1},$$

де

$$\beta^2 = \omega_0^2 - \omega_3^2.$$

Тоді

$$Q^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\omega_3^2}{\omega_0^2 - \omega_3^2}; \quad \frac{1}{Q^2} = \frac{4(\omega_0^2 - \omega_3^2)}{\omega_3^2} = 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_3^2} - 4$$

і

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_3^2} = \frac{1}{4Q^2} + 1. \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1) і отримаємо, що

$$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1,01}} \approx 0,005 = 0,5\%.$$

**Задача 8.3.** Деяка точка здійснює згасаючі коливання з частотою  $\omega_3 = 25$  рад/с. Знайти коефіцієнт згасання  $\beta$ , якщо в початковий момент часу швидкість точки дорівнює нулю, а її зміщення із положення рівноваги в цей момент в  $\eta = 1,020$  рази менше від максимально можливого відхилення точки від положення рівноваги.

**Розв'язок.** Швидкість точки знайдемо за допомогою (8.1), а саме

$$v = \frac{dx}{dt} = -\beta A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_3 t + \varphi_0) + A_0 \omega_3 e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \varphi_0).$$

За умовою задачі  $v = 0$  при  $t = 0$ . З цієї умови знаходимо, що

$$\beta \sin \varphi_0 = \omega_3 \cos \varphi_0. \quad (1)$$

Так як

$$\frac{A_0}{x(0)} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \cdot 0} \sin(\omega_3 \cdot 0 + \varphi_0)} = \eta, \text{ то } \sin \varphi_0 = 1/\eta.$$

Тоді із (1) отримаємо, що

$$\frac{\beta}{\eta} = \omega_3 \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}.$$

Звідки

$$\beta = \omega_3 \sqrt{\eta^2 - 1} = 5\text{с}^{-1}.$$

**Задача 8.4.** Коливальний контур складається із послідовно з'єднаних конденсатора  $C = 100$  мкФ, котушки індуктивності  $L = 10$  мГн і опору  $R = 10$  Ом. В початковий момент часу  $t = 0$  конденсатору надали заряд  $q_0 = 10$  мКл і в контурі виникли згасаючі коливання. Знайти залежність від часу: а) напруги  $U$  на конденсаторі; б) сили струму  $I$  в контурі; в) е.р.с. самоіндукції  $\mathcal{E}_s$  в котушці індуктивності; г) зсув по фазі  $\Delta\varphi$  між силою струму  $I$  і напругою  $U$ ; д) зсув по фазі  $\Delta\varphi$  між е.р.с. самоіндукції  $\mathcal{E}_s$  і напругою  $U$ ; е) моменти часу, коли напруга  $U$  на конденсаторі дорівнює нулю; є) моменти часу, коли струм  $I$  в контурі максимальний; ж) інтервали часу  $\Delta t_k$  і  $\Delta t'_k$  між двома послідовними моментами часу, коли напруга на конденсаторі дорівнює нулю і двома послідовними моментами часу, коли струм в контурі максимальний, відповідно.

**Розв'язок. а)** Використаємо формулу (8.4). Із врахуванням початкових умов ( $t=0$ ,  $q = q_0$ ),  $\varphi_0 = \pi/2$  формула (8.4) переписеться так:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega_3 t. \quad (1)$$

Тоді напруга на конденсаторі  $U = q/C$ , буде змінюватись за законом:

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega_3 t, \quad (2)$$

де  $U_0 = q_0 / C = 100$  В,  $\beta = R / 2L$ ,  $\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

**б)** Сила струму в контурі  $I = \frac{dq}{dt}$  і тому

$$I = -q_0 e^{-\beta t} (\beta \cos \omega_3 t + \omega_3 \sin \omega_3 t).$$

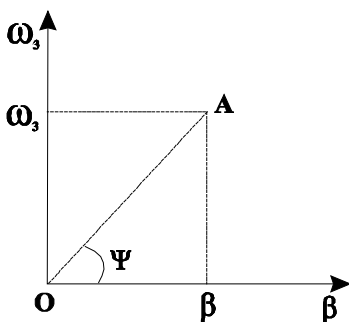


Рис. 8.1.

Значенням  $\beta$  і  $\omega_3$  на координатній площині  $\beta 0 \omega_3$  відповідає точка А (рис.8.1). Тоді

$$\cos \psi = \beta / \sqrt{\omega_3^2 + \beta^2},$$

$$\sin \psi = \omega_3 / \sqrt{\omega_3^2 + \beta^2},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \omega_3 / \beta$$

і вираз для струму можна переписати так:

$$I = -q_0 \sqrt{\omega_3^2 + \beta^2} e^{-\beta t}.$$

$$\cdot (\cos \psi \cos \omega_3 t + \sin \psi \sin \omega_3 t)$$

або

$$I = q_0 \sqrt{\omega_3^2 + \beta^2} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_3 t + \pi - \psi). \quad (3)$$

в) Е.р.с. самоіндукції  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$ . Продиференціюємо формулу (3) по часу і отримаємо:

$$\mathcal{E}_s = L q_0 \sqrt{\omega_3^2 + \beta^2} \cdot e^{-\beta t} \cdot (\beta \cos(\omega_3 t + \pi - \psi) + \omega_3 \sin(\omega_3 t + \pi - \psi)).$$

Скористаємось формулами, приведеними у пункті б) даної задачі, і вираз для  $\mathcal{E}_s$  перепишеться так:

$$\mathcal{E}_s = L q_0 (\omega_3^2 + \beta^2) \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_3 t + \pi - 2\psi). \quad (4)$$

г) Згідно формул (2) і (3) зсув по фазі між напругою і силою струму

$$\Delta \varphi = \pi - \psi = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega_3}{\beta}.$$

д) Із формул (2) і (4) знайдемо різницю фаз  $\Delta \varphi'$  між напругою на конденсаторі та е.р.с. самоіндукції.

$$\Delta \varphi' = \pi - 2\psi = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_3}{\beta}.$$

е) Напруга на конденсаторі дорівнює нулю, коли  $\cos \omega_3 t = 0$ . Звідки знаходимо, що

$$\omega_3 t = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ де } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

є) Струм в контурі максимальний, коли згідно формули  
 (3)  $\cos(\omega_3 t + \pi - \frac{\pi}{3}) = \pm 1$ . (Враховано, що  $\psi = \arctg \frac{\omega_3}{\beta} = \frac{\pi}{3}$ ). Звідки  
 знаходимо, що  $\omega_3 t'_1 + \frac{2\pi}{3} = 2\pi k$  і  $\omega_3 t'_2 + \frac{2\pi}{3} = \pi + 2\pi k$ , або

$$\omega_3 t'_1 = 2\pi(k - \frac{1}{3}), \quad \omega_3 t'_2 = 2\pi(k + \frac{1}{6}). \quad (6)$$

ж) Інтервал часу між двома послідовними моментами часу, коли напруга на конденсаторі дорівнює нулю, із формули (5) дорівнює

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{\omega_3}(\frac{1}{2} + k + 1 - \frac{1}{2} - k) = \frac{\pi}{\omega_3}. \quad (7)$$

Інтервал часу між двома послідовними моментами часу, коли струм в контурі максимальний знайдемо із формули (6), а саме

$$\Delta t'_k = t'_2 - t'_1 = \frac{\pi}{\omega_3}. \quad (8)$$

Порівнюючи (7) і (8) бачимо, що  $\Delta t_k = \Delta t'_k$ . Тепер приведемо числові розрахунки:

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 500\sqrt{3} \text{ c}^{-1}, \quad \beta = \frac{R}{2L} = 500 \text{ c}^{-1},;$$

$$\sqrt{\omega_3^2 + \beta^2} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000 \text{ c}^{-1}; \quad \omega_3^2 + \beta^2 = 10^6 \text{ c}^{-2};$$

$$I_0 = q_0 \sqrt{\omega_3^2 + \beta^2} = 10^{-2} \cdot 10^3 \text{ A} = 10 \text{ A};$$

$$Lq_0(\omega_3^2 + \beta^2) = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \text{ B} = 100 \text{ B}.$$

Тоді формули (2), (3) і (4) переписуться так:

$$U = 100 e^{-500t} \cos 500\sqrt{3} t \text{ B},$$

$$I = 10 e^{-500t} \cos(500\sqrt{3} t + \frac{2\pi}{3}) \text{ A},$$

$$\mathcal{E}_s = 100 e^{-500t} \cos(500\sqrt{3} t + \frac{\pi}{3}) \text{ B}, \quad \text{а}$$

$$\Delta\varphi = \pi - \pi/3 = 2\pi/3, \quad \Delta\varphi' = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$$

і

$$\Delta t_k = \Delta t'_k = \frac{\pi}{500\sqrt{3}} \text{ c} = 3,63 \text{ мс}.$$

**Задача 8.5.** Енергія згасаючих коливань маятника, що відбуваються в деякому середовищі, за час  $t = 2$  хв зменшилась в  $N = 100$  раз. Визначити коефіцієнт опору  $r$ , якщо маса маятника  $m = 0,1$  кг.

**Розв'язок.** Розглянемо рівняння (8.1). Множник  $A = A_0 e^{-\beta t}$  визначає амплітуду коливань, яка зменшується з часом. Енергія коливань, як відомо, пропорційна квадрату амплітуди.

Тоді 
$$N = \frac{w_0}{w} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 = 100,$$

або

$$\frac{A_0}{A} = \sqrt{N} = 10.$$

Звідки отримаємо, що

$$\frac{A_0}{A} = e^{\beta t} = 10.$$

Прологарифмувавши останній вираз, знайдемо, що:

$$\beta = \frac{\ln 10}{t}.$$

Так як  $\beta = \frac{r}{2m}$ , то

$$r = 2m\beta = 2m \frac{\ln 10}{t} = 2 \cdot 0,1 \frac{2,3}{120} \cong 0,0038 \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$

**Задача 8.6.** Знайти добротність математичного маятника, довжина якого  $l = 50$  см, якщо за проміжок часу  $\tau = 5,2$  хв його повна механічна енергія зменшилась в  $\eta = 4 \cdot 10^4$  раз.

**Розв'язок.** За формулою (8.5) добротність коливальної системи  $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T}$ , де  $T = 2\pi/\sqrt{g/l - \beta^2}$  – період згасаючих коливань математичного маятника. При цьому враховано, що  $\omega_0^2 = g/l$ , де  $g$  – прискорення вільного падіння. Тому

$$Q = \frac{\sqrt{(g/l) - \beta^2}}{2\beta} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l\beta^2} - 1}.$$

Повна механічна енергія коливальної системи  $W \sim x^2 \sim \exp\{-2\beta t\}$ , а тому  $\eta = \frac{W_0}{W(\tau)} = \exp\{2\beta\tau\}$ . Звідки знаходимо, що  $\beta = \ln \eta / (2\tau)$ .

Тоді

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\tau^2 g}{l \ln^2 \eta} - 1} = 130.$$

**Задача 8.7.** Коливальний контур складається із конденсатора, ємність якого  $C = 4 \text{ мкФ}$ , котушки, індуктивність якої  $L = 2 \text{ мГн}$ , і активного опору  $R = 10 \text{ Ом}$ . Знайти відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора в момент максимального струму.

**Розв'язок.** Відношення енергії поля котушки до енергії поля конденсатора буде:

$$\frac{W_L}{W_C} = \frac{LI^2/2}{q^2/(2C)} = LC I^2 / q^2.$$

Таким чином задача зводиться до знаходження відношення  $I^2/q^2$  в момент максимуму струму в контурі. Згідно формули (8.4) сила струму

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0(-\beta) \exp\{-\beta t\} \sin(\omega_3 t + \varphi_0) + q_0 \exp\{-\beta t\} \omega_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_0).$$

Тоді

$$\frac{I}{q} = -\beta + \omega_3 \text{ctg}(\omega_3 t + \varphi_0).$$

В момент максимуму струму  $\frac{dI}{dt} = 0$ . Звідки знаходимо, що

$$\operatorname{ctg}(\omega_3 t + \varphi_0) = \frac{\beta^2 - \omega_3^2}{2\beta\omega_3}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{I}{q} &= -\beta + \omega_3 \frac{\beta^2 - \omega_3^2}{2\beta\omega_3} = -\frac{\beta^2 + (\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})^2}{2\beta} = \\ &= -\frac{\omega_0^2}{2\beta} = -\frac{1}{LC \frac{R}{L}} = -\frac{1}{RC}. \end{aligned}$$

Значить

$$\frac{W_L}{W_C} = \frac{L}{R^2 C} = 5.$$

**Задача 8.8.** Параметри коливального контуру мають значення:  $C = 1 \text{ мкФ}$ ;  $L = 6 \text{ мГн}$ ;  $R = 0,5 \text{ Ом}$ . Яку потужність  $P$  потрібно підводити до контуру, щоб підтримати в ньому незгасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі  $U_m = 10 \text{ В}$ ?

**Розв'язок.** Амплітуда напруги  $U = q/C$  на конденсаторі згідно (8.4) згасає з часом за законом  $U = U_m e^{-\beta t}$ , де  $\beta$ —коефіцієнт згасання, що дорівнює  $R/(2L)$ . Енергія, яка накопичена в контурі в момент  $t = 0$ ,

$$W = CU_m^2/2.$$

Зменшення енергії за 1 період коливань буде:

$$\Delta W = W(0) - W(T) = \frac{CU_m^2}{2}(1 - e^{-2\beta T}).$$

Згідно умови задачі отримуємо такі числові величини:

$$\beta^2 = \frac{R^2}{4L^2} \approx 1,7 \cdot 10^3 \text{ с}^{-2}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \approx 1,7 \cdot 10^8 \text{ с}^{-2}.$$

Тобто  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ . Це означає, що згасання слабе ( $2\beta T \ll 1$ ) і тоді можна записати, що  $e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T$ . Тобто

$$\Delta W = \frac{CU_m^2}{2} 2\beta T = \frac{CU_m^2}{2L} RT.$$

Це означає, що у випадку слабого згасання, втрати енергії в контурі за один період коливань є однаковими і не залежать від часу.

Тоді, щоб підтримувати в контурі коливання, необхідно підводити потужність

$$P = \frac{\Delta W}{T} = \frac{CU_m^2 R}{2L} = \frac{10^{-6} \cdot 10^2 \cdot 0,5}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 4,2 \text{ мВт}.$$

**Задача 8.9.** Чому дорівнює амплітуда вимушених коливань при резонансі, якщо при дуже малій (порівняно з власною) частоті вимушених коливань вона дорівнює  $A = 0,1 \text{ см}$ , а логарифмічний декремент згасання  $\lambda = 0,01$ ?

**Розв'язок.** Підставимо (8.10) в (8.8) і отримаємо амплітуду вимушених коливань при резонансі, а саме:

$$A_{\text{рез}} = f_0 / \left( 2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \right).$$

При дуже малій частоті вимушуючої сили ( $\omega \approx 0$ ) із формули (8.8) знаходимо, що

$$A = f_0 / \omega_0^2.$$

Із цих двох формул знаходимо, що

$$A_{\text{рез}} = \frac{A \omega_0^2}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

За формулою (8.3) логарифмічний декремент згасання

$$\lambda = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1}}.$$

Так як  $\lambda = 0,01 \ll 1$ , то  $\omega_0^2 / \beta^2 \gg 1$ , тобто  $\omega_0^2 \gg \beta^2$ . Це означає, що  $\lambda \approx 2\pi\beta / \omega_0$ . Тоді амплітуда коливань при резонансі

$$A_{\text{рез}} = \frac{A \omega_0}{2\beta} = \frac{A\pi}{2\pi\beta / \omega_0} = \frac{A\pi}{\lambda} \text{ см} = 31,4 \text{ см}.$$

**Задача 8.10.** При частотах вимушуючої гармонічної сили  $\omega_1 = 300 \text{ с}^{-1}$  і  $\omega_2 = 350 \text{ с}^{-1}$  амплітуда швидкості частинки дорівнює



половині максимального значення. Знайти: а) частоту, яка відповідає резонансу швидкості; б) коефіцієнт згасання  $\beta$  та частоту згасаючих коливань.

**Розв’язок.** Швидкість частинки  $v = \frac{dx}{dt}$ . Із формули (8.7) знаходимо, що

$$v = -A\omega \sin(\omega t - \varphi).$$

Амплітуда швидкості частинки

$$v_a = A\omega = \frac{f_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

Частоту  $\omega$ , при якій  $v_a$  має максимальне значення, знайдемо із умови  $dv_a/d\omega = 0$ . Ця частота дорівнює  $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$ . При такій частоті вимушуючої сили, швидкість буде мати максимальне значення

$$v_{\text{max}} = f_0/(2\beta). \quad (1)$$

**а)** Згідно умови задачі  $v_a(\omega_1) = v_a(\omega_2)$ , або

$$\frac{f_0 \omega_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2 \omega_1^2}} = \frac{f_0 \omega_2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\beta^2 \omega_2^2}}.$$

Із цього співвідношення знаходимо, що

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 324 \text{ с}^{-1}.$$

**б)** Коефіцієнт згасання знайдемо із співвідношення (1) і умови задачі, а саме:

$$\frac{v_{\text{max}}}{2} = \frac{f_0}{4\beta} = \frac{f_0 \omega_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2 \omega_1^2}},$$

де  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ . Розв’язавши це рівняння відносно  $\beta$ , знаходимо, що

$$\beta = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\sqrt{3}} = 14,4 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді частота згасаючих коливань

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_1 \omega_2 - \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{12}} = 323,7 \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 8.11.** В коливальний контур послідовно ввімкнули джерело е.р.с. з амплітудою  $U_m = 5$  В. Амплітуда напруги на конденсаторі у випадку слабого згасання при резонансі дорівнює  $U_{max} = 150$  В. Визначити добротність коливального контуру, якщо згасання слабе.

**Розв'язок.** За формулою (8.13) амплітуда напруга на конденсаторі  $U = q_a / C$ , тобто

$$U = \frac{U_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

При резонансній частоті (8.10) напруга приймає максимальне значення:

$$U_{max} = \frac{U_m}{2LC\beta \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Для випадку слабого згасання, коли  $\omega_0^2 \gg \beta^2$ ,

$$U_{max} = \frac{U_m}{2LC\beta\omega_0} = \frac{U_m\omega_0}{2\beta}.$$

Добротність коливальної системи:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\pi\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Тому

$$Q = \frac{U_{max}}{U_m} = 30.$$

**Задача 8.12.** Коло складається із послідовного з'єднаних конденсатора, ємність якого  $C = 50$  мкФ, опору  $R = 20$  Ом і котушки індуктивності  $L = 20$  мГн, опором якої можна знехтувати. Послідовно в коло включений генератор синусоїдальної напруги, частоту якого можна змінювати при сталій амплітуді. Знайти частоту, при якій амплітуда напруги на котушці буде максимальною. Порівняти її із власною частотою контуру.

**Розв'язок.** Якщо активним опором котушки можна знехтувати, то напруга на котушці буде дорівнювати е.р.с. самоіндукції, тобто

$$U_L = -L \frac{dI}{dt}.$$

Із формули (8.14) отримаємо, що

$$\frac{dI}{dt} = -I_m \omega \sin(\omega t - \psi),$$

де  $I_m$  визначається за формулою (8.15), а  $I_m \omega L$  – амплітуда е.р.с. самоіндукції. Частоту, при якій амплітуда напруги на котушці буде максимальною знайдемо із умови:

$$\frac{d(I_m \omega)}{d\omega} = 0.$$

Із цієї умови отримаємо співвідношення:

$$\left( R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right)^{1/2} - \frac{\omega}{2} \left( R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right)^{-1/2} \cdot 2 \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot \left( L + \frac{1}{\omega^2 C} \right) = 0.$$

Після алгебраїчних перетворень отримаємо, що

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C(L - R^2 C/2)}}$$

або

$$\omega = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}},$$

де  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1000$  рад/с,  $\beta = R/(2L) = 500$  с<sup>-1</sup>. Тоді  $\omega = 1414$  рад/с. Значить  $\omega/\omega_0 = 1,414$ .

**Задача 8.13.** Кінці кола, яке складається із послідовно з'єднаних конденсатора, індуктивності і активного опору  $R = 110$  Ом, підключили до змінної напруги, амплітудне значення якої  $U_m = 110$  В. При цьому амплітуда струму, який встановився в колі,  $I_m = 0,5$  А. Знайти різницю фаз між струмом в колі і напругою, що подається в коло.

**Розв'язок.** За формулою (8.16) різниця фаз між струмом і напругою буде:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Із формули (8.15) знайдемо, що

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \sqrt{\left(\frac{U_m}{I_m}\right)^2 - R^2}.$$

Тоді

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\left(\frac{U_m}{I_m R}\right)^2 - 1} = \sqrt{3}, \quad \text{а } \psi = 60^\circ = \pi/3.$$

**Задача 8.14.** В коливальному контурі, добротність якого  $Q = 100$ , включене послідовно джерело синусоїдальної е.р.с. з постійною амплітудою напруги. При деякій частоті джерела напруги тепла потужність, яка виділяється в контурі, є максимальна. На скільки відсотків необхідно змінити цю частоту, щоб ця потужність зменшилась у  $n = 2$  рази?

**Розв'язок.** Теплова потужність в коливальному контурі виділяється на активному опорі  $R$  і дорівнює  $P = I^2 R$ , де струм  $I$  визначається за формулою (8.15). Максимальне значення струму, а значить і максимальна потужність досягається при частоті, яка визначається за формулою (8.17). При цій частоті  $I = I_{\max} = U_m/R$ . Тому відношення потужностей

$$\frac{P_m}{P} = \frac{I_{\max}^2}{I^2} = \frac{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{R^2} = n. \quad (1)$$

Згідно умови задачі необхідно знайти відношення  $(\omega - \omega_0)/\omega_0$ , де  $\omega_0$  визначається за формулою (8.17), а  $\omega$  відповідає частоті, при якій тепла потужність у  $n$  раз менша максимальної. В нашому випадку має місце слабе згасання, так як  $Q = 100 \gg 1$ . Для цього випадку  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Тому вище приведені співвідношення (1) перепишемо так:

$$n - 1 = \left(\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2;$$

$$n-1 = \left( \omega \cdot \sqrt{LC} \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right)^2;$$

$$n-1 = \left( Q \frac{\omega}{\omega_0} - Q \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2;$$

$$\frac{n-1}{Q^2} = \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2;$$

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} = \frac{\sqrt{n-1}}{Q}; \quad \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n-1}}{Q} = 0,5\%.$$

При отриманні цієї відповіді враховано, що  $(\omega + \omega_0) / \omega \approx 2$ .

**Задача 8.15.** Ємнісний датчик – один із найбільш чутливих радіотехнічних пристроїв, який застосовується для реєстрації малих механічних зміщень. Він представляє собою електричний коливальний контур з повітряним конденсатором, одна із пластин якого рухлива (рис.8.2). Оцінити мінімальне переміщення пластини конденсатора  $\Delta d$ , яке

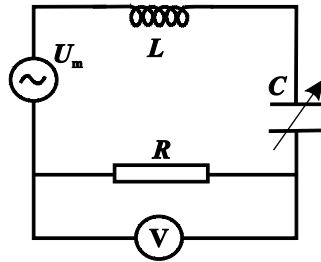


Рис.8.2.

можна виміряти, якщо контур настроєний в резонанс; напруга джерела живлення  $U_m = 100\text{В}$ , мінімальне значення напруги на опорі  $R$ , яке вимірюється мікровольтметром з похибкою  $\Delta U = 10\text{ мкВ}$ , добротність контуру  $Q = 1000$ , зазор між пластинами конденсатора  $d = 1\text{ мм}$ .

**Розв'язок.** Якщо контур налаштований в резонанс, то за формулами (8.15) і (8.17)

$$I_{\max} = U_m / R.$$

Якщо пластина конденсатора змістилась на величину  $\Delta d$ , то ємність конденсатора зміниться і система вийде з резонансу. Тоді сила струму в контурі буде визначатись за формулою (8.15).

$$I = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C'}\right)^2}},$$

де  $C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d \pm \Delta d}$ . Якщо врахувати, що при резонансі

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0, \text{ де } C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \text{ то } I = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 C} \frac{\Delta d}{d}\right)^2}},$$

де  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Для випадку слабого згасання (велика добротність) добротність коливальної системи

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Тоді сила струму в контурі

$$I = \frac{U_m}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2}}.$$

Зміна напруги на опорі  $R$  буде:

$$\Delta U = I_{max} \cdot R - IR = U_m \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2}} \right).$$

Враховавши формули наближеного обчислення (додатки 2),

отримаємо, що  $\frac{\Delta U}{U_m} = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2$ .

Звідки знаходимо:

$$\Delta d = \frac{d}{Q} \sqrt{\frac{2 \Delta U}{U_m}} = \frac{10^{-3}}{10^3} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-5}}{10^2}} \text{ м} = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 4,5 \text{ \AA}.$$

## 8.6. Задачі

### Згасаючі механічні коливання

**8.16.** Період згасаючих коливань  $T = 4 \text{ с}$ ; логарифмічний декремент згасання  $\lambda = 1,6$ ; початкова фаза  $\varphi_0 = 0$ . В момент часу

$t = T/4$  від початку коливань зміщення точки дорівнює 4,5 см. Написати рівняння руху цього коливання і знайти зміщення точки від положення рівноваги в момент часу  $t = T/8$  від початку коливань.

**8.17.** Рівняння згасаючих коливань задається у вигляді  $x = 5e^{-0,25t} \cdot \sin(\pi t/2)$  м. Знайти швидкість точки, яка коливається, в моменти часу: 0;  $T$ ;  $2T$ .

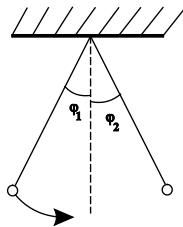
**8.18.** Період згасаючих коливань  $T = 8$  с, логарифмічний декремент згасання  $\lambda = 3,2$ , початкова фаза  $\varphi_0 = -\pi/6$ . В момент часу  $t = 2$  с після початку коливань зміщення точки від положення рівноваги дорівнювало 9 см. Написати рівняння руху цього коливання.

**8.19.** Період згасаючих коливань  $T = 8$  с, логарифмічний декремент згасання  $\lambda = 3,2$ , початкова фаза  $\varphi_0 = -\pi/6$ . В момент часу  $t = 2$  с після початку коливань зміщення точки від положення рівноваги дорівнювало 9 см. Знайти зміщення точки від положення рівноваги в момент часу  $t_1 = 8/3$  с після початку коливання.

**8.20.** Логарифмічний декремент згасання математичного маятника  $\lambda = 0,2$ . У скільки разів зменшиться амплітуда коливань за одне повне коливання маятника?

**8.21.** Знайти логарифмічний декремент згасання математичного маятника, якщо за час  $t = 1$  хв амплітуда коливань зменшується в 2 рази. Довжина маятника  $l = 1$  м.

**8.22.** Два послідовних максимальних відхилення математичного маятника, довжина якого  $l = 0,98$  м, від вертикалі (рис.8.3) дорівнюють  $\varphi_1 = 10^\circ$  і  $\varphi_2 = 9,5^\circ$ . Знайти логарифмічний декремент згасання  $\lambda$  і період коливань цього маятника  $T$ . **Рис.8.3.**



**8.23.** Тягар, маса якого  $m = 500$  г, підвішений до пружини з жорсткістю  $k = 20$  Н/м і здійснює пружні коливання в деякому середовищі. Логарифмічний декремент згасання  $\lambda = 0,004$ .

Скільки коливань повинен здійснити тягар, щоб амплітуда коливань зменшилась в 2 рази? За який час це відбувається ?

**8.24.** За 10 с амплітуда вільних коливань зменшилась в 10 раз. За який час амплітуда цих коливань зменшиться в 100 раз?

**8.25.** За 1,00 с амплітуда вільних коливань зменшилась в 2 рази. На протязі якого проміжку часу амплітуда зменшиться в 10 раз?

**8.26.** За час  $t = 16,1$  с амплітуда коливань зменшилась в  $\eta = 5,00$  раз. а) Знайти коефіцієнт згасання коливань  $\beta$ ; б) За який час  $t$  амплітуда зменшиться в  $e = 2,72$  рази?

**8.27.** За час, протягом якого система здійснює  $N=100$  коливань, амплітуда зменшується в  $\eta = 5,00$  раз. Визначити добротність системи  $Q$ .

**8.28.** Добротність деякої коливальної системи  $Q = 2,00$ , частота вільних коливань  $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ . Визначити власну частоту коливальної системи  $\omega_0$ .

**8.29.** Амплітуда згасаючих коливань зменшилась в  $e^2$  раз за 50 коливань. Визначити логарифмічний декремент згасання  $\lambda$  і добротність системи  $Q$ ?

**8.30.** Шматок сиру кинули на ваги. Три послідовних крайніх положення стрілки ваг були такі  $A_1 = 560 \text{ г}$ ,  $A_2 = 440 \text{ г}$ ,  $A_3 = 520 \text{ г}$ . Яка дійсна маса шматка сиру? Чому дорівнює логарифмічний декремент згасання коливань стрілки ваг?

**8.31.** Виразити відносну похибку  $\delta T = (T - T_0)/T_0$ , яка вноситься в розрахунок при заміні періоду вільних згасаючих коливань  $T$  на власний період коливань  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , якщо  $\lambda = 0,628$ .

**8.32.** Згасаючі коливання точки відбуваються за законом  $x = a_0 \exp\{-\beta t\} \cdot \sin \omega_3 t$ . Знайти: а) швидкість точки в момент часу  $t = 0$ ; б) моменти часу, коли точка досягає крайніх положень.

**8.33.** Тіло здійснює коливання за законом  $x = a_0 \exp\{-\beta t\} \cdot \cos \omega_3 t$ . Знайти: а) швидкість і прискорення тіла в момент  $t = 0$ ;



б) моменти часу, коли швидкість стає максимальною.

**8.34.** Математичний маятник здійснює коливання в середовищі, для якого логарифмічний декремент згасання  $\lambda_0 = 1,50$ . Яким буде логарифмічний декремент згасання, якщо опір середовища збільшити в  $n = 2$  рази? В скільки раз необхідно збільшити опір середовища, щоб коливання стали неможливими?

**8.35.** До невагомої пружини підвісили тягарець, в результаті чого вона розтягнулась на  $\Delta x = 9,8$  см. Яким буде період коливань тягарця, якщо йому надати невеликий поштовх у вертикальному напрямку? Логарифмічний декремент згасання  $\lambda = 3,1$ .

**8.36.** Знайти добротність коливальної системи, в якій амплітуда зміщення зменшується в  $\eta = 3$  рази через кожні  $n = 140$  коливань.

**8.37.** Згасаючі коливання частинки були збуджені шляхом зміщення її із положення рівноваги на відстань  $A_0 = 1$  см. Логарифмічний декремент згасання  $\lambda = 0,01$ . При такому малому згасанні з великою точністю можна вважати, що максимальні відхилення від положення рівноваги досягаються в моменти часу  $t_n = (T/2) \cdot n$ , ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). В цьому наближенні знайти шлях  $S$ , який пройде частинка до повної зупинки.

**8.38.** Який логарифмічний декремент згасання маятника, довжина якого  $l = 1$  м, якщо його початкова амплітуда  $\varphi_0 = 4,5^\circ$ , а через час  $t = 4$  хв амплітуда  $\varphi$  дорівнює  $30'$ ?

**8.39.** Початкова амплітуда коливань маятника дорівнює  $A_0 = 4$  см. Через  $t_1 = 15$  с вона дорівнює  $A_1 = 1,5$  см. Через який час амплітуда коливань буде дорівнювати  $A_2 = 0,8$  см?

**8.40.** Деяка точка здійснює згасаючі коливання з частотою  $\omega_3 = 30$  рад/с. Знайти коефіцієнт згасання  $\beta$ , якщо в початковий момент часу швидкість точки дорівнює нулю, а її зміщення із положення рівноваги в цей момент в  $\eta = 1,05$  рази менше максимально можливого відхилення точки від положення рівноваги.

**8.41.** Математичний маятник, довжина якого  $l = 24,7$  см, здійснює згасаючі коливання. Через який час від початку коливань енергія коливань маятника зменшиться в  $\eta = 9,4$  рази. Задачу розв'язати при значеннях логарифмічного декременту згасання:

а)  $\lambda_1 = 0,01$  і б)  $\lambda_2 = 1$ .

**8.42.** Знайти добротність математичного маятника, довжина якого  $l = 1$  м, якщо за проміжок часу  $\tau = 6,5$  хв його повна механічна енергія зменшилась в  $\eta = 30\,000$  раз.

**8.43.** Математичний маятник, довжина якого  $l = 24,7$  см, здійснює згасаючі коливання. Через який час енергія коливань маятника зменшиться в 9,4 рази? Логарифмічний декремент згасання 0,01.

**8.44.** За 100 с система встигає здійснити 100 коливань. За цей же час амплітуда коливань зменшується в 2,718 рази. Визначити: а) коефіцієнт згасання коливань  $\beta$ , б) логарифмічний декремент згасання  $\lambda$ , в) добротність  $Q$ , г) відносне зменшення енергії системи –  $\Delta W/W$  за період коливань.

**8.45.** За який час енергія коливань камертона з частотою  $\nu = 600$  Гц зменшиться в  $n = 10^6$  раз, якщо логарифмічний декремент згасання  $\lambda = 0,0008$ ?

### Електричні згасаючі коливання

**8.46.** Період згасаючих коливань  $T = 1$  мс, початкова фаза коливання  $\varphi_0 = 0$ . В момент часу  $t = 2$  мс після початку коливань напруга на конденсаторі в коливальному контурі дорівнювала 90 В. Максимальна напруга на конденсаторі  $U_m = 100$  В. Визначити логарифмічний декремент згасання контуру.

**8.47.** Період згасаючих коливань  $T = 10^{-3}$  с, початкова фаза коливань  $\varphi_0 = \pi$ . В момент часу  $t = 0,5$  мс від початку коливань напруга на конденсаторі в коливальному контурі дорівнювала 50 В. Визначити струм в контурі в цей момент часу. Максимальна напруга на конденсаторі  $U_m = 100$  В, ємність конденсатора  $C = 1$  мкФ.

**8.48.** В контурі здійснюються вільні згасаючі коливання, при яких напруга на конденсаторі змінюється з часом за законом  $U = 10e^{-10^3 t} \cdot \cos 10^3 t$ , В. Знайти моменти часу, коли заряд на конденсаторі досягає максимального (екстремального) значень.

**8.49.** Коливальний контур має ємність  $C = 10$  мкФ, індуктивність  $L = 1$  мГн і активний опір  $R = 1$  Ом. Скільки коливань заряду на конденсаторі відбудеться за час релаксації.

**8.50.** Коливальний контур складається із конденсатора, ємність якого  $C = 1$  мкФ, котушки, індуктивність якої  $L = 20$  мГн, і опору  $R = 50$  Ом. В початковий момент часу  $t = 0$  конденсатор заряджений і містить заряд  $q_0 = 60$  мкКл. Написати рівняння зміни з часом різниці потенціалів на обкладинках конденсатора.

**8.51.** Коливальний контур складається із конденсатора, ємність якого  $C = 1$  мкФ, котушки, індуктивність якої  $L = 20$  мГн, і опору  $R = 50$  Ом. В початковий момент часу конденсатор заряджений і містить заряд  $q_0 = 60$  мкКл. Знайти різницю потенціалів на обкладинках конденсатора через час  $t = T/2$  від початку коливань, де  $T$  — період коливань.

**8.52.** Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого  $C = 7$  мкФ, котушки з індуктивністю  $L = 0,23$  Гн і опору  $R = 49$  Ом. Обкладка конденсатора має заряд  $q = 0,56$  мКл. Знайти період коливань контуру і логарифмічний декремент згасання коливань. Написати рівняння зміни з часом різниці потенціалів  $U$  на обкладинках конденсатора. Знайти різницю потенціалів в момент часу  $t = T/2$ , який відраховується від початку коливань.  $T$  — період коливань.

**8.53.** Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого  $0,2$  мкФ, і котушки, індуктивність якої  $5,07$  мГн. При якому логарифмічному декременті згасання коливань різниця потенціалів на обкладках конденсатора за час  $t = 1$  мс зменшиться в три рази. Який буде при цьому опір котушки?

**8.54.** Коливальний контур складається з конденсатора і котушки, довжина якої  $l = 40$  см. Котушка виготовлена з мідного

дроту, площа поперечного перерізу якого  $S = 0,1 \text{ мм}^2$ . Знайти ємність конденсатора, якщо при обчисленні періоду коливаний контуру за наближеною формулою  $T_1 = 2\pi\sqrt{LC}$ , ми робимо помилку

$\delta = (T_2 - T_1)/T_2 = 0,01 = 1\%$ .  $T_2$  – період коливаний, який знаходиться за точною формулою.

**8.55.** Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого  $2,22 \text{ нФ}$ , та котушки з мідного дроту, діаметр якого  $d = 0,5 \text{ мм}$ . Довжина котушки  $l = 20 \text{ см}$ . Знайти логарифмічний декремент згасання коливаний.

**8.56.** Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого  $405 \text{ нФ}$ , котушки індуктивністю  $10 \text{ мГн}$  та опору  $2 \text{ Ом}$ . В скільки раз зменшиться різниця потенціалів на обкладках конденсатора за один період коливаний?

**8.57.** Добротність деякого контуру дорівнює  $10$ . Визначити на скільки відсотків відрізняється частота вільних коливаний  $\omega_3$  контуру від власної частоти контуру  $\omega_0$ ? Знайти  $(\omega_0 - \omega_3)/\omega_0$ .

**8.58.** Параметри коливального контуру мають значення:  $C = 4,00 \text{ мкФ}$ ,  $L = 0,10 \text{ мГн}$ ,  $R = 1,00 \text{ Ом}$ . а) Визначити добротність контуру  $Q$ ; б) Яку відносну похибку ми робимо, коли вираховуємо добротність за наближеною формулою  $Q = \sqrt{L/C}/R$ ?

**8.59.** В контурі здійснюються вільні загасаючі коливання, при цьому напруга на конденсаторі змінюється з часом за законом  $U = U_m \exp\{-\beta t\} \cdot \cos \omega_3 t$ . Знайти моменти часу, коли модуль напруги на конденсаторі досягає: а) амплітудних значень; б) максимальних (екстремальних) значень.

**8.60.** Знайти час, за який амплітуда коливаний струму в контурі, добротність якого  $Q = 5000$ , зменшиться в  $\eta = 2$  рази, якщо частота коливаний  $\nu = 2,2 \text{ МГц}$ .

**8.61.** Коливальний контур має ємність  $C = 10 \text{ мкФ}$ , індуктивність  $L = 25 \text{ мГн}$  і активний опір  $R = 1 \text{ Ом}$ . Через скільки коливаний амплітуда струму в цьому контурі зменшиться в  $e$  раз?

**8.62.** Коливальний контур має ємність  $1,1 \text{ нФ}$  та індуктивність  $5 \text{ мГн}$ . Логарифмічний декремент згасання  $0,005$ . За який час внаслідок згасання втрачається  $99 \%$  енергії контуру?

**8.63.** Власна частота коливань деякого контуру дорівнює  $\nu_0 = 8,0 \text{ кГц}$ , добротність контуру  $Q = 72$ . В контурі збуджуються згасаючі коливання. а) Знайти закон зменшення енергії контуру  $W$  з часом. б) Яка частина початкової енергії  $W_0$  збережеться в контурі на момент часу  $t = 1 \text{ мс}$  від початку коливань.

**8.64.** В схемі, що приведена на рис.8.4, всі опори, крім  $R_1 = 1 \text{ Ом}$  і  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ , нехтовно малі. Індуктивність котушки  $L = 0,1 \text{ Гн}$ , ємність конденсатора  $C = 1 \text{ мкФ}$ , е.р.с. елемента  $\mathcal{E} = 3,2 \text{ В}$ . Ключ  $K$  замикають і після того, як струм в котушці встановиться, розмикають. Знайти:

а) Яка початкова енергія коливань, які будуть мати місце в контурі  $LC$  після розмикання ключа  $K$ ? б) Яка буде енергія цих коливань через час  $t = 0,2 \text{ с}$  після розмикання ключа?

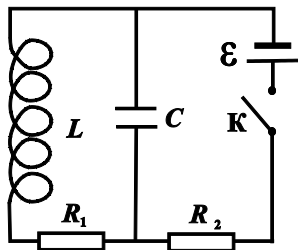


Рис.8.4.

**8.65.** В схемі на рис.8.5 е.р.с. елемента  $\mathcal{E} = 2 \text{ В}$ , його внутрішній опір  $r = 9 \text{ Ом}$ , ємність конденсатора  $C = 10 \text{ мкФ}$ , індуктивність котушки  $L = 100 \text{ мГн}$  і опір  $R = 1 \text{ Ом}$ . В деякий момент часу ключ  $K$  розімкнули. Знайти енергію коливань в контурі:

а) безпосередньо після розмикання ключа;  
б) через час  $t = 0,3 \text{ с}$  після розмикання ключа.

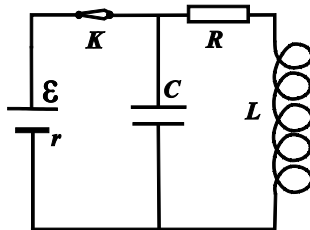


Рис.8.5.

**8.66.** В контурі, добротність якого  $Q = 50$  і власна частота коливань  $\nu_0 = 5,5$  кГц, збуджуються згасаючі коливання. Через який час енергія, яка була запасена в контурі, зменшиться в  $\eta = 2$  рази?

**8.67.** Знайти добротність контуру, ємність якого  $C = 2$  мкФ, а індуктивність  $L = 5$  мГн, якщо на підтримання в ньому згасаючих коливань з амплітудою напруги на конденсаторі  $U_m = 1$  В необхідно підводити середню потужність  $\langle P \rangle = 0,1$  мВт. Згасання коливань в контурі досить мале.

**8.68.** Яку середню потужність повинен споживати коливальний контур, активний опір якого  $R = 0,45$  Ом, щоб в ньому підтримувались незгасаючі гармонічні коливання з амплітудою струму  $I_m = 30$  мА?

**8.69.** Коливальний контур складається із конденсатора, ємність якого  $C = 6,0$  мкФн, індуктивності  $L = 30$  мГн і активного опору  $R = 0,5$  Ом. Яку середню потужність необхідно підводити до контуру, щоб підтримувати в ньому незгасаючі гармонічні коливання з амплітудою напруги на конденсаторі  $U_m = 10$  В?

### Вимушені механічні коливання

**8.70.** Рівняння руху системи має вид  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$ . Чому дорівнює період коливань  $T$ , якщо: **а)** не має вимушуючої сили і не має сили тертя; **б)** не має вимушуючої сили; **в)** система виконує вимушені коливання, які вже встановились?

**8.71.** Жорсткість пружин ресори вагону  $k = 4,8 \cdot 10^5$  Н/м. Маса вагону з вантажем  $m = 6,4 \cdot 10^4$  кг. Вагон має 4 ресори. При якій швидкості  $v$  вагон почне сильно розгойдуватися внаслідок поштовхів на стиках рельсів, якщо довжина рельси  $l = 12,8$  м?

**8.72.** Амплітуди зміщень вимушених коливань при частотах вимушуючої сили  $\omega_1 = 200$  с<sup>-1</sup> і  $\omega_2 = 300$  с<sup>-1</sup> однакові. Знайти частоту відповідних резонансних зміщень.

**8.73.** Під дією вимушуючої сили  $F_x = F_0 \cos \omega t$  система здійснює вимушені коливання  $x(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega))$ , які вже встановились. Визначити: а) потужність  $P_{\text{вим}}$  вимушуючої сили; б) роботу  $A_{\text{вим}}$  вимушуючої сили за період коливань; в) роботу  $A_{\text{тертя}}$  сили тертя за період коливань.

**8.74.** Тіло, маса якого  $m = 10$  г, виконує згасаючі коливання з максимальним значенням амплітуди 7 см, початковою фазою, яка дорівнює нулю, і коефіцієнтом згасання  $1,6 \text{ с}^{-1}$ . На це тіло почала діяти зовнішня періодична сила, під дією якої встановились вимушені коливання. Рівняння вимушених коливань має вид:  $x = 5 \sin(10\pi t - 0,75\pi)$  см. Знайти: 1) рівняння (з числовими коефіцієнтами) вільних коливань; 2) рівняння (з числовими коефіцієнтами) зовнішньої періодичної сили.

**8.75.** При зміні частоти  $\nu$  вимушуючої сили, яка діє на лінійну коливальну систему, змінюється фаза  $\psi$  коливань, які встановились в цій системі, і енергії  $W$ , що запасасться в ній. Нехай при малій зміні частоти  $\nu$  відносно резонансної на величину  $\Delta \nu = 1$  Гц фаза коливань  $\psi$  змінюється на  $\pi/4$ ? Як змінилась при цьому енергія  $W$ ? Визначити час згасання (релаксації)  $\tau$  системи в режимі вільних коливань.

**8.76.** Деяка резонансна крива відповідає механічній коливальній системі з логарифмічним декрементом згасання  $\lambda = 1,6$ . Знайти для цієї кривої відношення максимальної амплітуди зміщення до амплітуди зміщення при дуже малій частоті.

**8.77.** Під дією зовнішньої вертикальної сили  $F = F_0 \cos \omega t$  тіло, підвішене на пружинці, здійснює вимушені коливання за законом  $x = a \cos(\omega t - \varphi)$ . Знайти роботу сили  $F$  за період коливання. Показати, що ця робота йде на подолання сили тертя.

## Електричні вимушені коливання

**8.78.** Якою повинна бути добротність контура  $Q$ , щоб частота, при якій настає резонанс струму, відрізнялась від частоти, при якій настає резонанс напруги не більше, ніж на 1%?

**8.79.** Визначити добротність контура, в якому послідовно включене джерело змінної е.р.с., якщо при резонансі струму в колі напруга  $U$  на конденсаторі в 2,55 рази перевищує амплітуду напруги джерела.

**8.80.** При дослідженні резонансної кривої коливального контуру (рис.8.6) з малим згасанням знайдено, що напруга  $U$  на конденсаторі максимальна при частоті  $\nu_0 = 1,6$  кГц; при частоті  $\nu \ll \nu_0$  ця напруга дорівнює  $U_m = 1$  В. Чому дорівнює вихідна напруга при частоті  $\nu = 16$  кГц?

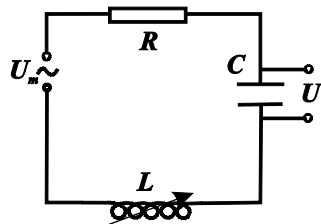


Рис.8.6.

**8.80.** При дослідженні резонансної кривої коливального контуру (рис.8.6) з малим згасанням знайдено, що напруга  $U$  на конденсаторі максимальна при частоті  $\nu_0 = 1,6$  кГц; при частоті  $\nu \ll \nu_0$  ця напруга дорівнює  $U_m = 1$  В. Чому дорівнює вихідна напруга при частоті  $\nu = 16$  кГц?

**8.81.** При дослідженні резонансної кривої коливального контуру (див. рис.8.6 попередньої задачі) знайдено, що максимальний струм  $I_m = 0,1$  А отримується при частоті генератора  $\nu_0 = 1,6$  кГц, струм при частоті  $\nu_1 = 16$  кГц дорівнює  $I_1 = 10^{-4}$  А. Вхідна напруга  $U_m$  в обох випадках дорівнює 1 В. Знайти за цими даними приблизне значення параметрів контуру  $R, L, C$ .

**8.82.** Коло, яке складається із послідовно з'єднаних конденсатора, ємність якого  $C = 22$  мкФ, котушки з активним опором  $R = 20$  Ом і індуктивністю  $L = 0,35$  Гн, підключили до мережі змінної



напруги з амплітудою  $U_m = 180$  В і частотою  $\omega = 314$  рад/с. Знайти:  
а) амплітуду струму в колі; б) різницю фаз між струмом і зовнішньою напругою; в) амплітуди напруг на конденсаторі і котушці.

**8.83.** Знайти різницю фаз між струмом і прикладеною напругою в колі, схема якого приведена на рис.8.7.

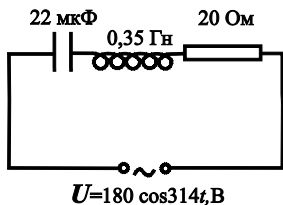


Рис.8.7.

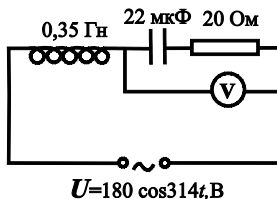


Рис.8.8.

**8.84.** Яку напругу буде показувати вимірювальний прилад в електричному колі, схема якого приведена на рис.8.8.

**8.85.** Коло, яке має послідовно з'єднані конденсатор, котушку індуктивності і активний опір, підключене до джерела гармонічної напруги, частоту якої можна змінювати, не змінюючи амплітуду напруги. При частотах 20 кГц і 45 кГц амплітуди струму в колі в 2 рази менші від амплітуди струму при резонансі струму. Знайти резонансну частоту для струму та добротність контуру.

**8.86.** Визначити добротність коливального контуру за наступними даними: резонансна частота напруги на конденсаторі  $\nu_p = 50$  кГц, індуктивність котушки  $L = 0,5$  мГн, омичний опір кола  $R = 40$  Ом.

**8.87.** Резонансна частота для струму в коливальному контурі  $\nu_0 = 100$  Гц, добротність контуру  $Q = 5$ , омичний опір контуру  $R = 10$  Ом. Визначити ємність конденсатора контуру.

**8.88.** На точки А і В кола, яке зображене на рис.8.9, подаються одночасно дві змінні напруги однакової амплітуди, але різної частоти: частота першої напруги співпадає з власною частотою

контура  $\omega_0$ , частота другої напруги  $\omega$  більша власної частоти на 10% ( $\omega = 1,1\omega_0$ ). Знайти відношення амплітуд струмів в контурі, які генеруються обома напругами для випадків, коли:

- а) добротність контура  $Q = 100$ ;
- б) добротність контура  $Q = 10$ .

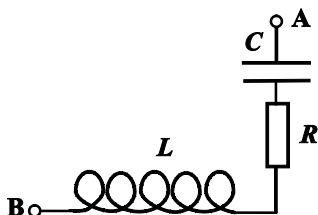


Рис.8.9.

**8.89.** Змінна напруга, частота якої  $\omega = 314$  рад/с і амплітудне значення  $U_m = 180$  В, підключена до клем кола, яке складається із послідовно з'єднаних конденсатора і котушки з активним опором  $R = 40$  Ом і індуктивністю  $L = 0,36$  Гн. При якому значенні ємності конденсатора амплітуда напруги на котушці буде максимальною? Чому дорівнює ця амплітуда і відповідна амплітуда напруги на конденсаторі?

**8.90.** Знайти добротність коливального контуру, в якому послідовно включене джерело змінної е.р.с., якщо при максимальному струмі в контурі напруга на конденсаторі в  $n$  раз перевищує напругу джерела.

**8.91.** Коло змінного струму, яке складається із послідовно з'єднаних котушки і конденсатора, підключене до джерела змінної е.р.с., причому індуктивність котушки підібрана так, що струм в колі максимальний. Знайти добротність системи, якщо відомо, що при збільшенні індуктивності в  $n$  раз струм в колі зменшиться в  $\eta$  раз.

**8.92.** Коло, яке містить послідовно з'єднані конденсатор і котушку з активним опором, підключене до джерела гармонічної напруги, частоту якого можна змінювати, не змінюючи амплітуду напруги. При частотах  $\omega_1$  і  $\omega_2$  амплітуди струму в  $n$  раз менші резонансної амплітуди. Знайти: а) резонансну частоту; б) добротність кола.

**8.93.** Показати, що при малому згасанні добротність контуру, в якому здійснюється вимушені коливання,  $Q = \omega_0/\Delta\omega$ , де  $\omega_0$  – власна частота коливань,  $\Delta\omega$  – ширина резонансної кривої  $I(\omega)$  на “висоті”, в  $\sqrt{2}$  рази меншій амплітуди струму при резонансі.

**8.94.** Визначити добротність  $Q$  контура за наступними даними: резонансна частота  $\nu_p = 600$  кГц, ємність  $C = 350$  пФ, омичний опір для частот, близьких до резонансної,  $R = 15$  Ом.

**8.95.** Індуктивний датчик — це радіотехнічний пристрій для реєстрації невеликих змін індуктивності. Таким датчиком є електричний коливальний контур із змінною індуктивністю (рис.8.10). Оцінити мінімальну відносну зміну індуктивності  $\Delta L/L$ , яку можна виміряти, якщо контур настроєний в резонанс. Напруга джерела живлення  $U_m = 100$  В, мінімальна зміна напруги на опорі  $R$ , яка вимірюється,  $\Delta U = 10$  мкВ, добротність контуру  $Q = 100$ .

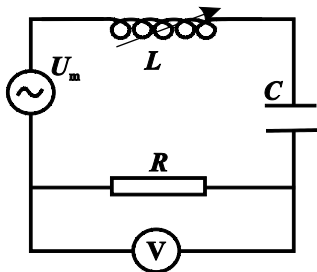


Рис.8.10.

**8.96.** Оцінити резонансну довжину хвилі тороїдального резонатора, який використовується в клістронах, переріз якого показаний на рис.8.11. Центральну частину резонатора вважати конденсатором, через який протікає струм, а тороїдальна порожнина заповнена магнітним полем цього струму. Розміри резонатора  $a = 10$  см,  $d = 1$  см.

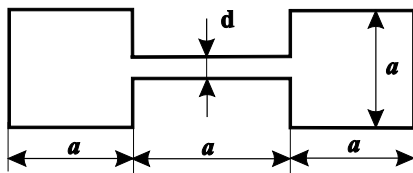


Рис.8.11.

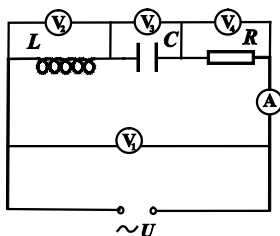


Рис.8.12.

**8.97.** В схемі на рис.8.12 вольметри показують модулі амплітуди напруги, причому  $U_2 = 3,0$  В,  $U_3 = 7,0$  В,  $U_4 = 3,0$  В відповідно для вольметрів  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$ . Яку напругу  $U_1$  показує вольметр  $V_1$ ?

**8.98.** Для умови задачі 8.97 визначити середню теплову потужність  $\langle P \rangle$ , яка виділяється в колі, якщо величина опору  $R = 1,0 \text{ Ом}$ .

**8.99.** На коливальний контур з власною частотою  $\omega_0$  і логарифмічним декрементом згасання  $\lambda = 0,02$  діє зовнішня періодична сила із сталою амплітудою. Частота коливаний  $\omega$  зовнішньої сили, яка спочатку дорівнює частоті власних коливаний, змінюється настільки, що потужність, яка витрачається в контурі, падає вдвічі. Визначити відносну зміну частоти у відсотках по відношенню до власної частоти  $\omega_0$ .

#### Додаткові задачі

**8.100.** Який сумарний шлях пройде точка, яка здійснює згасаючі коливання, до повної зупинки, якщо амплітуда першого коливання  $A_1 = 2 \text{ мм}$ , а логарифмічний декремент згасання  $\lambda = 0,008$ .

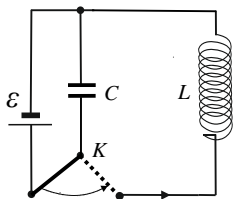
**8.101.** Амплітуда згасаючих коливаний зменшується за один період коливаний в  $\eta = 5$  раз.

а) На скільки відсотків  $\delta$  період коливаний більший від періоду коливаний, якщо б згасання було відсутнє?

б) При якому фазовому куті зміщення максимальне?

в) При якому фазовому куті швидкість максимальна?

**8.102.** Контур складається із котушки, опір якої  $R = 10 \text{ Ом}$ ,



**Рис.8.13.**

а індуктивність  $L = 10^{-5} \text{ Гн}$ , і конденсатора, ємність якого  $C = 0,002 \text{ мкФ}$ . Конденсатор  $C$  заряджається від батареї акумуляторів (рис.8.13.), а потім під'єднується до котушки  $L$ .

а) Визначити логарифмічний декремент згасання коливань, які почнуться в контурі.

б) Знайти відношення енергії магнітного поля в котушці до енергії електричного поля в конденсаторі в момент максимального струму в контурі.

**8.103.** Знайти зв'язок між амплітудами сили струму  $I_0$  і напруги  $U_0$  при вільних коливаннях в контурі, який складається із котушки, індуктивність якої  $L$ , і конденсатора, ємність якого  $C$ .

**8.104.** Коливальний контур складається із конденсатора і котушки, індуктивність якої  $L = 1 \text{ Гн}$ . Визначити омичний опір контура, якщо відомо, що амплітуда власних коливань в ньому за час  $t = 0,05 \text{ с}$  зменшується в  $e = 2,72$  рази.

**8.105.** Через скільки періодів коливань амплітуда їх зменшиться в  $e = 2,72$  рази в коливальному контурі, у якого  $L = 1 \text{ Гн}$ ,  $C = 0,5 \text{ мкФ}$  і  $R = 30 \text{ Ом}$ ?

**8.106.** Коливальний контур складається із конденсатора, ємність якого  $C = 270 \text{ пФ}$ , котушки, індуктивність якої  $L = 40 \text{ мкГн}$  і опору  $R = 8 \text{ Ом}$ . Визначити час, за який амплітуда власних коливань зменшиться в  $e^2 = 2,72^2$  рази.

**8.107.** Батарея, яка складається із двох конденсаторів, ємності яких по  $2 \text{ мкФ}$  кожен, розряджається через котушку, індуктивність якої  $1 \text{ мГн}$  і опір  $50 \text{ Ом}$ . Чи виникнуть при цьому коливання, якщо конденсатори з'єднані: а) паралельно? б) послідовно?

**8.108.** Визначити логарифмічний декремент згасання контуру з ємністю  $C = 2 \text{ мкФ}$  і індуктивністю  $L = 1 \text{ мГн}$ , якщо на підтримання в цьому контурі незгасаючих коливань з максимальною напругою на конденсаторі  $U_m = 2 \text{ В}$  необхідна потужність  $P = 0,5 \text{ Вт}$ .

**8.109.** На коливальний контур, який складається із послідовно включених конденсатора, ємність якого  $C = 1 \text{ мкФ}$ , котушки, індуктивність якої  $L = 0,01 \text{ Гн}$ , і опору  $R = 10 \text{ Ом}$  діє зовнішня е.р.с. з амплітудою  $U_m = 10 \text{ В}$ . Чому дорівнює частота  $\nu$  е.р.с., яка включена послідовно в контур, якщо відомо, що амплітуда сили струму, який протікає в контурі, дорівнює  $I = 1 \text{ А}$ ?

**8.110.** На графіку залежності струму  $I(\omega)$  в коливальному контурі від частоти  $\omega$  вимушуючої сили провели пряму, яка паралельна осі  $\omega$  (абсцис), на висоті, що дорівнює половині максимального струму. Відрізок цієї прямої між точками перетину з графіком відповідає різниці частот  $\Delta\omega = 100 \text{ рад/с}$ . Визначити коефіцієнт згасання в цьому контурі.

**8.111.** Амплітуда вимушених коливань напруги на конденсаторі в коливальному контурі при дуже малій частоті дорівнює  $U_m = 2 \text{ В}$ , а при резонансі дорівнює  $U_{\text{рез}} = 32 \text{ В}$ . Вважаючи декремент згасання для контуру меншим одиниці, визначити його.

**8.112.** Коло, яке має послідовно з'єднані конденсатор, котушку індуктивності і активний опір, підключене до джерела гармонічної напруги, частоту якої можна змінювати, не змінюючи амплітуду напруги. При частоті  $\nu_0 = 1150 \text{ Гц}$  амплітуда струму в колі максимальна. При частоті  $\nu = 1145 \text{ Гц}$  амплітуда напруги на конденсаторі максимальна. Знайти добротність цього контуру.

**8.113.** Під дією зовнішньої синусоїдальної напруги з амплітудою  $U_m = 200 \text{ В}$  при резонансі в коливальному контурі з послідовно включеними ємністю, індуктивністю  $L = 1 \text{ Гн}$  і опором  $R$  встановився змінний струм з амплітудою  $I_m = 20 \text{ А}$ . Визначити: а) опір контуру  $R$ ; б) час згасання (релаксації)  $\tau$  в режимі вільних згасаючих коливань.

## 9. ХВИЛІ

### 9.1. Питання теми

1. Рівняння, параметри та властивості хвиль.
2. Інтерференція когерентних хвиль.

### 9.2. Основні визначення та формули

#### Пружні хвилі

1. Рівняння біжучої плоскої хвилі із швидкістю  $v$  в напрямку осі  $Ox$ :

$$S(x, t) = A \cos(\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0) \quad (9.1)$$

або

$$S(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (9.2)$$

де  $S(x, t)$  – зміщення від положення рівноваги точки, яка знаходиться на відстані  $x$  від джерела гармонічних коливань, яке характеризується амплітудою  $A$ , циклічною частотою  $\omega$  і початковою фазою  $\varphi_0$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  – хвильове число.

2. Довжина хвилі  $\lambda$  і фазова швидкість розповсюдження хвилі  $v$  зв'язані співвідношенням:

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}, \quad (9.3)$$

де  $T$  – період коливань,  $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$  – лінійна частота коливань.

3. Хвильове рівняння для одномірного випадку:

$$\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t^2}, \quad (9.4)$$

де  $v$  – фазова швидкість розповсюдження хвилі, яка описується рівнянням  $S(x, t)$ .

4. Фазова швидкість поздовжніх  $v_{\parallel}$  і поперечних  $v_{\perp}$  хвиль у пружному середовищі:

$$v_{\parallel} = \sqrt{E/\rho}, \quad v_{\perp} = \sqrt{G/\rho}, \quad (9.5)$$

де  $E$  – модуль Юнга (модуль пружності),  $\rho$  – густина середовища,  $G$  – модуль зсуву.

5. Об'ємна густина енергії пружної хвилі і її середнє значення:

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0), \quad \langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2, \quad (9.6)$$

де  $\langle w \rangle$  – середнє значення.

6. Густина потоку енергії (вектор Умова) та його середнє значення (інтенсивність хвилі):

$$\vec{j} = w\vec{v}; \quad I = \langle w \rangle v = (1/2) \rho \omega^2 A^2 v. \quad (9.7)$$

7. Амплітуда звукового тиску  $\Delta p_0$  (тобто амплітуда коливань тиску повітря в кожній точці, через яку проходить звукова хвиля) і амплітуда швидкості коливань  $v_m$  частинок у звуковій хвилі зв'язані співвідношенням

$$\Delta p_0 = v_{\parallel} \rho' v_m, \quad (9.8)$$

де  $\rho'$  – густина газу,  $v_{\parallel}$  – швидкість звуку (при нормальних умовах у повітрі  $v_{\parallel} = 332$  м/с, у воді  $v_{\parallel} = 1450$  м/с).

Інтенсивність звуку  $I$ , тобто енергія, яка переноситься хвилею за одиницю часу через одиничну площадку, що перпендикулярна до напрямку розповсюдження хвилі, виражається через амплітуду звукового тиску:

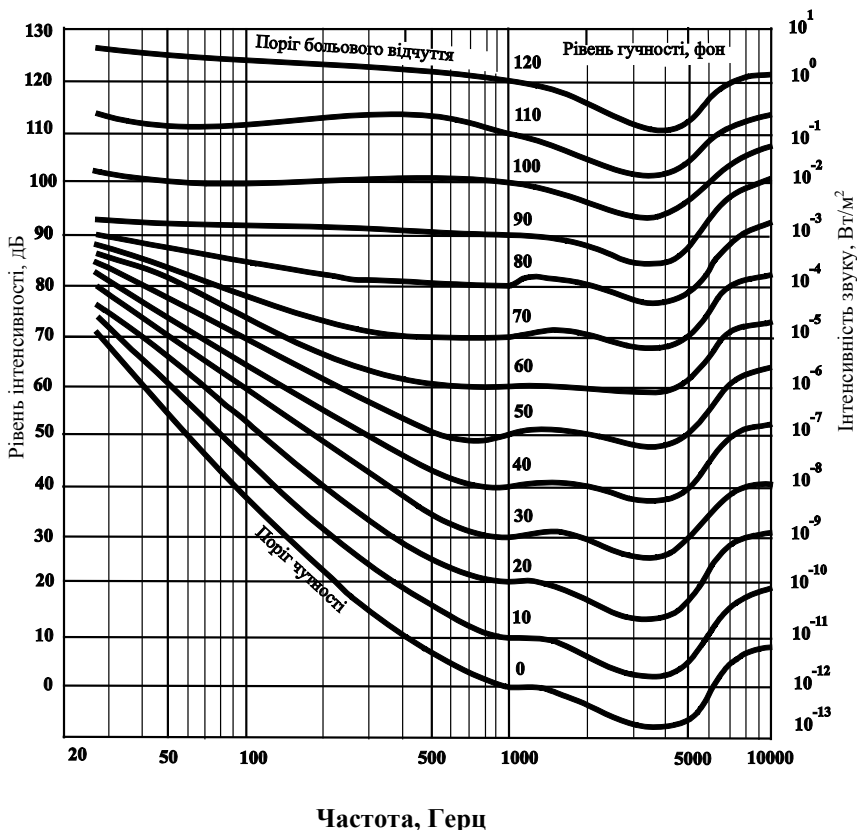
$$I = \frac{\Delta p_0^2}{2v_{\parallel}\rho'} = \frac{1}{2} \rho' v_{\parallel} v_m^2. \quad (9.9)$$

8. Рівень інтенсивності звуку (в децибелах) визначається за формулою

$$L = 10 \lg(I/I_0), \quad (9.10)$$

де  $I$  – інтенсивність даного звуку,  $I_0 = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> – інтенсивність даного звуку на порозі чутності при стандартній частоті  $\nu = 1000$  Гц.





**Рис.9.1.** Криві однакової гучності,

які виражають залежність рівня звукового тиску (в децибелах) від частоти при заданій гучності (у фонах). Нижня крива – поріг чутливості, верхня крива – поріг больового відчуття.

**Децибел (дБ)** – рівень звукового тиску  $p$ , для якого виконується співвідношення  $20\lg(p/p_n) = 1$ , де  $p_n$  – пороговий звуковий тиск, який дорівнює  $2 \cdot 10^{-5}$  Па. Одному децибелу відповідає рівень звукового тиску  $p = 2,24 \cdot 10^{-5}$  Па. За формулою (9.10) один децибел відповідає зміні інтенсивності звуку в  $10^{0,1}$  рази = 1,26 рази.

**9.** Рівень гучності звуку  $L_N$  (у фонах) залежить від інтенсивності звуку, його частоти і розраховується за формулою

$$L_N = 10 \lg(I_N/I_0), \quad (9.11)$$

де  $I_N$  – інтенсивність звуку з частотою  $\nu = 1000$  Гц, який має однакову гучність із звуком, який досліджується. Залежність  $L_N$  від інтенсивності звуку і його частоти складна і простим аналітичним співвідношенням не виражається. Визначається  $L_N$  за кривими рівня гучності (рис.9.1). *Фон – одиниця рівня гучності даного звуку.*

Рівень гучності даного звуку у фонах дорівнює рівню звукового тиску в децибелах для чистого тону з частотою 1000 Гц, гучність якого при порівнянні на слух дорівнює гучності даного звуку.

Для звуку еталонної частоти ( $\nu = 1000$  Гц) рівень гучності звуку, який виражений у фонах, чисельно дорівнює рівню інтенсивності, що виражається у децибелах,  $L = L_N$  (числова рівність справедлива тільки для частоти  $\nu = 1000$  Гц).

**10.** Зв'язок між різницею фаз в точці перекриття біжучих хвиль і різницею ходу  $\Delta x = x_2 - x_1$  (тобто різницею відстаней від точки перекриття хвиль до джерел коливань):

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k \cdot \Delta = 2\pi(x_2 - x_1) / \lambda. \quad (9.12)$$

**11.** В результаті інтерференції (накладання) хвиль амплітуда досягає максимального значення при умові:

$$(x_2 - x_1) = \Delta = 2m\lambda/2 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (9.13)$$

і мінімального значення при умові

$$\Delta = (2m + 1)\lambda/2 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (9.14)$$

**12.** Рівняння стоячої хвилі:

$$S(x, t) = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t. \quad (9.15)$$

Рівняння стоячої хвилі записане для випадку коли у рівнянні хвилі (3.2)  $\varphi_0 = 0$ , для  $t = 0$  і  $x = 0$ . Відстань між сусідніми пучностями і вузлами у стоячій хвилі дорівнює  $\lambda/4$ .

### Електромагнітні хвилі

**13.** Фазова швидкість електромагнітних хвиль:

$$v = c / \sqrt{\epsilon \mu} , \quad (9.16)$$

де  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  – швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі,  $\epsilon$  – відносна діелектрична, а  $\mu$  – відносна магнітна проникності середовища.

**14.** В біжучій електромагнітній хвилі:

$$E\sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0} . \quad (9.17)$$

**15.** Для плоскої електромагнітної хвилі, яка розповсюджується в напрямку осі  $X$  мають місце співвідношення:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = - \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (9.18)$$

**16.** Об'ємна густина енергії електромагнітного поля:

$$\omega = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} . \quad (9.19)$$

**17.** Густина потоку електромагнітної енергії – вектор Пойнтинга:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} . \quad (9.20)$$

**18.** Густина потоку енергії випромінювання диполя у хвильовій зоні:

$$\langle P \rangle = I = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{r^2} . \quad (9.21)$$

де  $r$  – відстань від диполя,  $\theta$  – кут між радіус-вектором  $\vec{r}$  і віссю диполя.

**19.** Потужність випромінювання диполя з електричним моментом  $\vec{p}(t)$  і заряду  $q$ , який рухається з прискоренням  $\vec{a}$ :

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2(\ddot{\vec{p}})^2}{3c^3} , \quad P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q^2 \vec{a}^2}{3c^3} . \quad (9.22)$$

### 9.3. Питання на самопідготовку

1. Дати визначення рівняння хвилі.
2. Записати рівняння біжучої плоскої та сферичної хвиль. В чому різниця між цими рівняннями?

3. Хвильове рівняння для одномірного випадку.
4. Характеристики хвилі: амплітуда, фаза, частота, довжина хвилі (хвильове число), фазова швидкість хвиль у пружному середовищі.
5. Густина потоку енергії хвиль – вектор Умова.
6. Звукові хвилі. Характеристики звукових хвиль: амплітуда звукового тиску, інтенсивність звуку, гучність звуку.
7. Когерентні хвилі, інтерференція хвиль. Умови максимуму та мінімуму інтерференції.
8. Стоячі хвилі. Рівняння стоячої хвилі. Вузли та пучності стоячої хвилі та відстань між ними.
9. Рівнянні плоскої біжучої електромагнітної хвилі (EMX). Фазова швидкість EMX у вакуумі та середовищі. Співвідношення між напруженістю електричного та напруженістю магнітного поля в EMX.
10. Густина потоку електромагнітної енергії – вектор Пойтинга.
11. Пояснити, чому стоячі хвилі не переносять енергію.
12. Нарисувати і пояснити полярну діаграму випромінювання електричного диполя у хвильовій зоні.
13. Яка необхідна умова, щоб електричний диполь і електричний заряд випромінювали електромагнітні хвилі?

## 9.4. Методичні вказівки

1. Рівняння біжучої хвилі (9.1) і (9.2) виражають зміщення від положення рівноваги будь-якої частинки, як функцію відстані до джерела коливань і часу. При цьому вважається, що амплітуда зміщення всіх частинок на шляху хвилі однакова. Це може бути лише у випадку плоских хвиль, які розповсюджуються в одному напрямку при відсутності поглинання енергії хвиль середовищем.

В учбовій літературі часто приводять рівняння біжучої хвилі, приймаючи  $\varphi_0 = 0$ . Таке рівняння вже не є загальним, а відповідає певним початковим умовам: при  $t = 0$  і  $x = 0$   $S(0,0) = A$ . Якщо в задачі не міститься початкових умов, то знайти однозначно зміщення  $S(x,t)$  згідно рівняння біжучої хвилі не можна.

2. Одним із способів знаходження фазової швидкості розповсюдження хвилі є складання хвильового рівняння (9.4). Коефіцієнт при другій похідній по часу від  $S(x,t)$  є величина обернена до квадрату фазової швидкості хвилі.

3. Необхідно розрізнити дві фізичні величини, які виражаються формулами (9.10) і (9.11), – рівень інтенсивності звуку і рівень його гучності. Рівень інтенсивності звуку є його об'єктивною характеристикою, яка не залежить від звукового відчуття. Рівень гучності звуку, як суб'єктивна характеристика його, залежить не тільки від інтенсивності звуку  $I$ , але і від частоти  $\nu$ , так як вухо людини має різну чутливість до звуків різних частот. Порівнюючи формули (9.10) і (9.11), бачимо, що для звуку з частотою  $\nu = 1000$  Гц рівень гучності  $L_N$  в фонах дорівнює рівню інтенсивності  $L$  в децибелах (рис.9.1).

Однак при інших частотах  $L_N \neq L$ . Різниця між цими величинами особливо велика при дуже низьких звукових частотах.

4. Щоб розрахувати рівень гучності звуку використовують криві гучності однакового рівня, які показують залежність інтенсивності звуку від частоти при постійних рівнях гучності. Такі графіки у вигляді сімейства кривих приведені на рис.9.1.

5. Якщо в задачі необхідно визначити рівень гучності звуку і не вказана частота звукових коливань, то мається на увазі, що мова йде про звук, частота якого близька до стандартної частоти  $\nu = 1000$  Гц.

## 9.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 9.1.** Поперечна хвиля розповсюджується вздовж пружного шнура зі швидкістю  $v = 15$  м/с. Період коливань точок шнура  $T = 1,2$  с, амплітуда коливань  $A = 2$  см. Визначити: 1) довжину хвилі  $\lambda$ ; 2) фазу  $\phi$  коливань, зміщення  $S$ , швидкість  $\dot{S}$ , прискорення  $\ddot{S}$  точки, яка розташована на відстані  $x = 45$  м від джерела хвиль в момент часу  $t = 4$  с; 3) різницю фаз  $\Delta\phi$  коливань двох точок, які

лежать на промені, на відстані  $x_1 = 20\text{м}$  та  $x_2 = 30\text{м}$  від джерела. Вважати, що  $\varphi_0 = 0$ .

**Розв'язок.**

1) Згідно (9.3)  $\lambda = vT = 18\text{ м}$ .

2) Згідно (9.1) фаза коливань точки з координатою  $x = 45\text{м}$  в момент часу  $t = 4\text{ с}$  дорівнює:

$$\varphi = \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \right) = 5,24 \text{ рад} = 300^\circ,$$

а зміщення

$$S = A \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \right) = 2 \cos 300^\circ \text{ см} = 1 \text{ см}.$$

Знайдемо першу та другу похідні по часу від рівняння хвилі (9.1):

$$\dot{S} = -A\omega \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = -\frac{2\pi A}{T} \sin \varphi = 9 \text{ см/с},$$

$$\ddot{S} = -A\omega^2 \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = -\frac{4\pi^2 A}{T^2} \cos \varphi = -27,4 \text{ см/с}^2.$$

3) Згідно (3.12)  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = 3,49 \text{ рад}$  або  $\Delta\varphi = 200^\circ$ .

**Задача 9.2.** Рівняння біжучої плоскої хвилі має вид  $S(x,t) = 60 \cos(1800t - 5,3x)$ , де  $S(x,t)$  визначається в мікрометрах,  $t$  – в секундах,  $x$  – в метрах. Знайти : а) відношення амплітуди зміщення частинок середовища до довжини хвилі; б) амплітуду коливань швидкості частинок середовища і її відношення до швидкості розповсюдження хвилі; в) амплітуду коливань відносної деформації середовища і її зв'язок з амплітудою коливань швидкості частинок середовища.

**Розв'язок.** Порівнявши даний вид хвилі із (9.2), знаходимо, що  $A = 60 \text{ мкм} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ ,  $\omega = 1800 \text{ рад/с}$ ,  $k = 5,3 \text{ м}^{-1}$ ,  $\varphi_0 = 0$ .

а) так  $2\pi/\lambda$ , то  $A/\lambda = Ak/(2\pi) = 5,06 \cdot 10^{-5}$ , тобто довжина хвилі значно більша амплітуди коливань частинок середовища.

б) швидкість руху частинок середовища біля положення рівноваги є

$$v = \frac{dS}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - kx),$$

де  $v_m = A\omega = 6 \cdot 10^{-5} \cdot 1800 = 0,108$  м/с – максимальна швидкість.

Фазова швидкість розповсюдження хвилі згідно (9.3) дорівнює:

$$v_\phi = \lambda v = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k} = \frac{1800}{5,3} = 340 \text{ м/с}.$$

Це фазова швидкість розповсюдження звуку в повітрі. Тоді відношення

$$\frac{v_m}{v_\phi} = \frac{0,108}{340} = 3,18 \cdot 10^{-4},$$

тобто швидкість коливань частинок середовища біля положення рівноваги значно менша швидкості розповсюдження цих коливань.

**Зауваження.** Фазову швидкість розповсюдження хвилі можна було би знайти за допомогою хвильового рівняння (9.4). Для цього необхідно наш вид рівняння хвилі, який задається в задачі, підставити в (9.4) і знайти коефіцієнт біля  $\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$ . Корінь квадратний із оберненої величини до цього коефіцієнта і є фазова швидкість розповсюдження хвилі.

в) Відносна деформація середовища внаслідок розповсюдження хвилі визначається як

$$\varepsilon = \frac{dS}{dx} = Ak \sin(\omega t - kx),$$

де  $\varepsilon_m = Ak = 60 \cdot 10^{-6} \cdot 5,3 = 3,18 \cdot 10^{-4}$  – амплітуда відносної деформації середовища. Так як  $v_m = A\omega$ , а  $k = \frac{\omega}{v_\phi}$ , то

$$\varepsilon_m = \frac{v_m}{\omega} \cdot \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{v_m}{v_\phi} = 3,18 \cdot 10^{-4}.$$

**Задача 9.3.** Джерело звуку невеликих розмірів має потужність  $N = 1,00$  Вт при частоті  $\nu = 400$  Гц. Вважати, що звук розповсюджується від джерела однаково у всіх напрямках в повітрі при нормальних умовах і при цьому поглинання звуку незначне. Визначити амплітуду звукового тиску, амплітуду швидкості і

амплітуду зміщення частинок повітря на відстані  $r = 100$  м від джерела звуку.

**Розв'язок.** Амплітуда звукового тиску  $\Delta p_0$  зв'язана співвідношенням (9.9) з інтенсивністю звуку  $I$ , яка в свою чергу зв'язана з потужністю  $N$  джерела:

$$I = N/(4\pi r^2), \quad (1)$$

де  $r$  – відстань від джерела до точки, в якій визначається величина  $I$ . Формула (1) витікає із визначення інтенсивності звуку (пункт 7, стор. 67). При цьому важливо, що, згідно умови задачі, від джерела звуку розповсюджуються сферичні хвилі. Тому знаменник формули (1) є площа поверхні сфери, через яку проходить вся звукова енергія, що випромінюється джерелом. Підставимо (1) у формулу (9.9) і отримаємо, що

$$\Delta p_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{N v_{\parallel} \rho'}{2\pi}}. \quad (2)$$

Так як повітря знаходиться при нормальних умовах, то  $v_{\parallel} = 332$  м/с, (див. п. 7, стор. 67), а згідно табл. 6 додатків  $\rho' = 1,293$  кг/м<sup>3</sup>. Тоді

$$\Delta p_0 = 10^{-2} (1 \cdot 332 \cdot 1,293 / 2\pi)^{1/2} \text{ Па} = 0,083 \text{ Па}.$$

Тепер знову використаємо співвідношення (9.9) і отримаємо, що амплітуда швидкості коливань частинок у звуковій хвилі буде:

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{N}{2\pi v_{\parallel} \rho'}} = 10^{-2} (1 / (2 \pi \cdot 332 \cdot 1,293))^{1/2} \text{ м/с} = \\ &= 1,93 \cdot 10^{-4} \text{ м/с} = 0,193 \text{ мм/с}. \end{aligned}$$

Для гармонічних коливань зв'язок між амплітудою зміщення і амплітудою швидкості наступна:

$$v_m = A\omega = 2\pi\nu A.$$

Звідки знаходимо, що

$$A = v_m / (2\pi\nu) = 0,193 / (2\pi \cdot 400) \text{ мм} = 7,7 \cdot 10^{-5} \text{ мм}.$$

**Задача 9.4.** Рівні гучності двох тонів з частотами 50 і 3000 Гц однакові і дорівнюють 30 фон. Визначити рівні інтенсивності і інтенсивність цих тонів.



**Розв'язок.** Рівень гучності звуку залежить від рівня його інтенсивності (методичні вказівки). Ця залежність різна для різних частот. Виразити її простою формулою, яка б була справедлива для всіх частот, не можливо. Тому залежність між рівнем гучності і рівнем інтенсивності зображено графічно (рис.9.1). На графіку по горизонтальній осі відкладені логарифми частот (самі частоти вказані під відповідними їм логарифмами). По вертикальній осі відкладені рівні інтенсивності в децибелах. Рівні гучності в фонах відкладені по вертикальній осі для частоти 1000 Гц. Для цієї частоти рівень гучності, який виражений у фонах, дорівнює рівню інтенсивності в децибелах. Рівень гучності звуків інших частот визначається за допомогою кривих гучності, що приведені на графіку. Кожна крива відповідає певному рівню гучності.

Знаходимо криву, яка відповідає рівню гучності 30 фон (четверта крива знизу). Користуючись цією кривою, визначаємо рівні інтенсивності, що відповідають частотам 50 і 3000 Гц. Для цього із точок на горизонтальній осі, які відповідають цим частотам, проводимо вертикальні лінії до перетину із кривою (30 фон). Ординати точок перетину і дадуть рівні інтенсивності в децибелах.

Для частоти 50 Гц рівень інтенсивності –  $L_1 = 70$  дБ.

Для частоти 3000 Гц –  $L_2 = 26$  дБ.

Знаючи рівень інтенсивності, за формулою (9.10) визначаємо інтенсивність даного звуку, а саме

$$\lg I = 0,1L + \lg I_0 = 0,1L - 12.$$

Для першого тону

$$\lg I_1 = 7,0 - 12 = -5$$

і

$$I_1 = 10^{-5} \text{ Вт/м}^2.$$

Для другого тону

$$\lg I_2 = 2,6 - 12 = -9,4$$

і

$$I_2 = 4 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/м}^2.$$

Зауважимо, що значення  $I_1$  і  $I_2$  можна отримати із рис.9.1 по правій шкалі «інтенсивність звуку». Співставимо результати: інтенсивність першого тону в 25000 раз більша інтенсивності другого тону, рівень інтенсивності першого тону на 43 дБ більший рівня інтенсивності другого тону, рівень гучності обох тонів однаковий і дорівнює 30 фон.

**Задача 9.5.** На відстані  $r_1 = 10$  м від джерела сферичних звукових хвиль, частота яких  $\nu = 1000$  Гц, рівень гучності  $L_{N_1} = 40$  фон. Знайти найбільшу відстань  $r_2$ , на якій звук ще чутний.

**Розв’язок.** Перш за все зауважимо, що в задачі задається звук стандартної частоти  $\nu = 1000$  Гц. Тому формулу (9.11) для рівня гучності звуку можна записати так:

$$L_N = 10 \lg(I / I_0),$$

де  $I$  – інтенсивність даного звуку. Таким чином, в даній задачі рівень гучності звуку  $L_N$  співпадає з рівнем його інтенсивності  $L$ , що визначається формулою (9.10).

Двом відстаням  $r_1$  і  $r_2$  відповідають деякі інтенсивності звуку  $I$ , а, значить, і певні рівні гучності  $L_N$ , тому можемо записати:

$$L_{N_1} = 10 \lg(I_1 / I_0), \quad (2)$$

$$L_{N_2} = 10 \lg(I_2 / I_0). \quad (3)$$

Так як звук розповсюджується однаково у всіх напрямках, то згідно формули (1) задачі 3.3  $I \sim 1/r^2$ . Тому

$$I_2 / I_1 = (r_1 / r_2)^2. \quad (4)$$

Із співвідношень (2) і (3) знайдемо, що

$$I_1 / I_0 = 10^{0,1 L_{N_1}}, \text{ а } I_2 / I_0 = 10^{0,1 L_{N_2}}.$$

Звідки отримаємо, що

$$I_2 / I_1 = 10^{0,1(L_{N_2} - L_{N_1})} = (r_1 / r_2)^2. \quad (5)$$

Так як відстань  $r_2$  за умовою задачі відповідає порогу чутності, то у

формулі (3) треба вважати, що  $I_2 = I_0$  і  $L_{N_2} = 0$ . Тоді із (5) знайдемо, що  $r_2 = r_1 \cdot 10^{0,05 L_{N_1}} = 10 \cdot 10^2 \text{ м} = 1 \text{ км}$ .

**Задача 9.6.** На відстані  $r_1 = 10 \text{ м}$  від джерела сферичних звукових хвиль, частота яких  $100 \text{ Гц}$ , рівень гучності  $L_{N_1} = 40 \text{ фон}$ . Знайти найбільшу відстань  $r_2$ , для якої цей звук ще чутний.

**Розв'язок.** Так як частота  $\nu = 100 \text{ Гц}$  суттєво відрізняється від частоти  $\nu = 1000 \text{ Гц}$ , то для рівня гучності використаємо формулу (3.11)

$$L_N = 10 \lg(I_N/I_0).$$

Тоді по графіку рівня гучності для частоти  $\nu = 100 \text{ Гц}$  і рівня гучності  $L_{N_1} = 40 \text{ фон}$  знаходимо, що інтенсивність звуку  $I_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2$  (див. рис.9.1). Потім за графіком порогу чутності ( $L_{N_2} = 0$ ) для частоти  $\nu = 100 \text{ Гц}$  знаходимо інтенсивність звуку  $I_2 = 7 \cdot 10^{-9} \text{ Вт/м}^2$ . Тоді за формулою (4) задачі 3.5 знаходимо, що

$$r_2 = r_1 \sqrt{I_1/I_2} = 10 \sqrt{5 \cdot 10^{-6} / 7 \cdot 10^{-9}} \text{ м} = 267 \text{ м} = 0,267 \text{ км}.$$

**Задача 9.7.** Визначити енергію, яку переносить за час  $t = 1,00 \text{ хв}$  плоска синусоїдальна електромагнітна хвиля, що розповсюджується у вакуумі через площадку  $S = 10,0 \text{ см}^2$ , яка перпендикулярна напрямку розповсюдження хвилі. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі  $E_0 = 1,00 \text{ мВ/м}$ . Період хвилі  $T \ll t$ .

**Розв'язок.** Енергія, яку переносить електромагнітна хвиля за одиницю часу через одиничну поверхню, яка перпендикулярна напрямку розповсюдження хвилі, визначається вектором Пойтинга (9.20). У плоскій електромагнітній хвилі вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  взаємно перпендикулярні і оскільки хвиля синусоїдальна, то можна записати, що

$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin(\omega t - kx), \\ H &= H_0 \sin(\omega t - kx). \end{aligned}$$

Тому

$$P = E_0 H_0 \sin^2(\omega t - kx).$$

Так як  $T \ll t$ , то середнє значення потоку енергії

$$\langle \Pi \rangle = E_0 H_0 \langle \sin^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0.$$

де значок  $\langle \rangle$  означає середнє значення.

Врахувавши (9.17), отримаємо:

$$\langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2.$$

Тоді енергія, яка переноситься хвилею через площадку  $S$  за час  $t$  буде:

$$W = \langle \Pi \rangle S t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S t.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{1,26 \cdot 10^{-6}}} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3} \cdot 60 = 8 \cdot 10^{-11} \text{ Дж.}$$

**Задача 9.8.** Плоска гармонічна електромагнітна хвиля розповсюджується у вакуумі вздовж осі  $X$ . Амплітуда напруженості електричної складової хвилі  $E_0 = 50 \text{ В/м}$ , частота -  $\nu = 100 \text{ МГц}$ . Знайти: а) діюче значення густини струму зміщення; б) середнє значення густини потоку енергії.

**Розв'язок.** Рівняння для електричної складової хвилі буде

$$E(x, t) = E_0 \cos(2\pi\nu t - kx).$$

Тоді густина струму зміщення

$$j_{зм} = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -2\pi\nu\epsilon_0 E_0 \sin(2\pi\nu t - kx).$$

Діюче значення струму зміщення

$$\begin{aligned} j_{зм.0} &= \frac{2\pi\nu\epsilon_0 E_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi 10^8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = \\ &= 2 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}^2 = 0,2 \text{ мА/м}^2. \end{aligned}$$

Згідно розв'язку задачі (9.7)

$$\begin{aligned} \langle \Pi \rangle &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 = \\ &= 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2 = 3,3 \text{ мкВт/м}^2, \end{aligned}$$

де  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  - швидкість світла у вакуумі.

**Задача 9.9.** У вакуумі вздовж осі Х встановилась стояча електромагнітна хвиля  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos kx \cdot \cos \omega t$ . Знайти середнє значення модуля вектора Пойнтинга за період коливання.

**Розв'язок.** За формулою (9.20)  $|\vec{P}| = E \cdot H$ , так як  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , а за формулою (9.18)

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_0 \omega E_0 \cos kx \cdot \sin \omega t.$$

Звідки знаходимо, що у стоячій хвилі

$$H = \epsilon_0 \omega E_0 \cdot \sin \omega t \int_0^x \cos kx \, dx = \epsilon_0 \frac{\omega}{k} E_0 \sin kx \cdot \sin \omega t.$$

Врахувавши, що  $\frac{\omega}{k} = v_\phi = c$ , отримаємо вираз для  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \Pi &= \epsilon_0 c E_0^2 \sin kx \cdot \cos kx \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_0 c E_0^2 \sin 2kx \cdot \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Тоді середнє значення модуля вектора Пойнтинга за період коливання буде:

$$\langle \Pi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi(x, t) dt = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{4T} \sin 2kx \int_0^T \sin 2\omega t dt.$$

Інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin 2\omega t \, dt &= -\frac{1}{2\omega} \cos 2\omega t \Big|_0^T = -\frac{1}{2\omega} \left( \cos 2\frac{2\pi}{T} T - \cos 0 \right) = \\ &= -\frac{1}{2\omega} (\cos 4\pi - 1) = 0. \end{aligned}$$

Значить  $\langle \Pi \rangle = 0$ . Це означає, що стояча електромагнітна хвиля не переносить енергії вздовж осі Х.

**Задача 9.10.** Два паралельних провідники занурені в бензол і індуктивно з'єднані з генератором Г височастотних електромагнітних коливань (рис.9.2). При частоті  $\nu = 100$  МГц в системі встановлюються стоячі електромагнітні хвилі. Переміщуючи

вздовж провідників газорозрядну трубку А, по її свіченню визначають положення пучностей напруженості електричного поля. Відстань між сусідніми пучностями дорівнює  $l = 1$  м. Знайти діелектричну проникність бензолу.

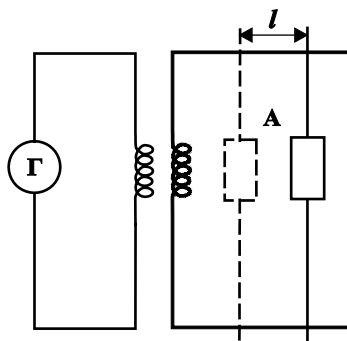


Рис.9.2.

**Розв'язок.** Стоячі електромагнітні хвилі виникають в результаті інтерференції хвиль, які розповсюджуються по двохпровідній лінії від генератора в прямому напрямку, з хвилями, які відбиваються від кінців лінії. Врахуємо, що при даній високій частоті електромагнітних коливань основні процеси, які зв'язані з розповсюдженням електромагнітних хвиль вздовж лінії, відбуваються не у провідниках, а в оточуючому їх середовищі.

Згідно теорії Максвелла швидкість електромагнітних хвиль в середовищі зв'язана з їх швидкістю у вакуумі за формулою (9.16). Враховуючи, що для бензолу  $\mu = 1$ , знайдемо його діелектричну проникність:

$$\varepsilon = c^2 / v^2 .$$

Швидкість електромагнітних хвиль зв'язана з довжиною хвилі  $\lambda$  і частотою  $\nu$  співвідношенням  $v = \lambda \nu$ . Так як відстань між сусідніми пучностями в стоячій хвилі дорівнює половині довжині хвилі, тобто  $\lambda = 2l$ , то отримаємо:

$$\varepsilon = \frac{c^2}{v^2} = \frac{c^2}{\lambda^2 \nu^2} = \frac{c^2}{4l^2 \nu^2} .$$

Після підстановки числових значень величин:  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с,  $l = 1$  м,  $\nu = 1 \cdot 10^8$  Гц і виконання розрахунків отримаємо  $\varepsilon = 2,2$ .

**Задача 9.11.** Яка частина всієї потужності випромінювання диполя приходить на інтервал кутів  $\theta$  від  $70^\circ$  до  $110^\circ$  ( $\theta$  – кут з віссю диполя)?

**Розв'язок.** Потужність випромінювання диполя визначається за формулою (9.21). Потужність, яка випромінюється через поверхню  $dS$

(меридіальна смужка) дорівнює  
(див.рис.9.3):

$$dP = \Pi dS = A \frac{\sin^2 \theta}{r^2} dS,$$

де  $dS = 2\pi R \cdot dr = 2\pi r \sin \theta \cdot r d\theta$   
(рис.9.3),  $A$  – стала величина. Тоді  
 $dP = A 2\pi \sin^3 \theta d\theta$  і відношення, яке  
необхідно знайти, буде:

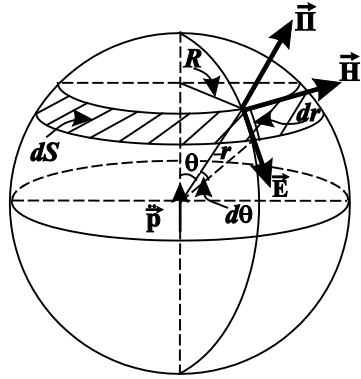


Рис.9.3.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\int_{70^\circ}^{110^\circ} dP}{\int_0^\pi dP} = \frac{\int_{70^\circ}^{110^\circ} \sin^3 \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta} = \frac{\int_{70^\circ}^{110^\circ} \sin^2 \theta d(\cos \theta)}{\int_0^\pi \sin^2 \theta d(\cos \theta)} = \\ &= \frac{\int_{70^\circ}^{110^\circ} (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta)}{\int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta)} = \frac{(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta) \Big|_{70^\circ}^{110^\circ}}{(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta) \Big|_0^\pi} = \\ &= \frac{\cos 110^\circ - \frac{1}{3} \cos^3 110^\circ - \cos 70^\circ + \frac{1}{3} \cos^3 70^\circ}{\cos \pi - \frac{1}{3} \cos^3 \pi - \cos 0^\circ + \frac{1}{3} \cos^3 0^\circ} = \\ &= \frac{-0,342 + 0,013 - 0,342 + 0,013}{-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}} = \frac{-0,657}{-\frac{4}{3}} = 0,493 \approx 0,5. \end{aligned}$$

## 9.6.Задачі

### Пружні хвилі

**9.12.** Яку хвилю – поздовжню чи поперечну – описує  
рівняння  $S(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ ?

**9.13** Пружна хвиля переходить із середовища, в якому  
фазова швидкість хвилі дорівнює  $v$ , в середовище, в якому фазова  
швидкість у 2 рази більша. Що відбувається при цьому з частотою  
хвилі  $\omega$  і довжиною хвилі  $\lambda$ ?

**9.14.** Вддовж осі  $X$  розповсюджується плоска хвиля з довжиною  $\lambda$ . Чому дорівнює найменша відстань  $\Delta x$  між точками середовища, в яких коливання здійснюються в протифазі?

**9.15.** На рис.9.4 показана “моментальна фотографія” зміщення  $S$  частинок середовища, в якому розповсюджуються вздовж осі  $X$  пружна хвиля. Вказати напрямки швидкостей частинок в точках А, В і С у випадках: а) поздовжньої хвилі, б) поперечної хвилі, коливання в якій відбуваються в площині рисунка.

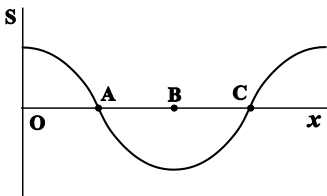


Рис.9.4.

**9.16.** Дослідження деякої фізичної величини показало, що вона задовільняє рівнянню:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

де  $\alpha$  – постійна величина, числове значення якої в системі одиниць СІ дорівнює  $1,44 \cdot 10^8$  а) за видом цього рівняння визначити розмірність величини  $\alpha$ . б) Що можна стверджувати відносно величини  $f$  ?

**9.17.** Що описує рівняння виду  $S = f(\omega t - kx)$ , де  $S$  – деяка функція,  $\omega$  і  $k$  – константи? Який зміст має величина  $\omega/k$ ?

**9.18.** Показати, що люба диференційована функція  $f(t + \alpha x)$ , де  $\alpha$  – стала величина, є розв’язком хвильового рівняння. Який фізичний зміст сталої  $\alpha$  ?

**9.19.** Відомо, що на великих відстанях  $L$  від точкового джерела сферична хвиля може розглядатись як плоска. При якому характерному розмірі  $d$  малу ділянку хвильової поверхні можна вважати плоскою? Довжина хвилі в

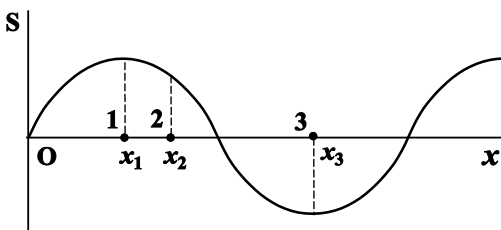


Рис.9.5



задачі  $\lambda$ . Прийняти  $L = 10$  м,  $\lambda = 0,6$  мкм.

**9.20.** Є два однакових знімки: один для біжучої хвилі, а другий для стоячої хвилі (рис.9.5). Чому дорівнює різниця фаз коливань точок 1 і 2, 1 і 3 для кожної із хвиль?

**9.21.** Коливання, які мають частоту  $\nu = 500$  Гц та амплітуду  $A = 0,25$  мм, розповсюджуються в повітрі. Довжина хвилі  $\lambda = 70$  см. Знайти швидкість розповсюдження коливань і максимальну швидкість коливань частинок повітря.

**9.22.** Знайти різницю фаз  $\Delta\varphi$  коливань двох точок, які знаходяться від джерела коливань на відстанях  $x_1 = 10$  м і  $x_2 = 16$  м. Період коливань  $T = 0,04$  с, швидкість їх розповсюдження  $300$  м/с.

**9.23.** Знайти зміщення  $S$  від положення рівноваги точок, що знаходяться від джерела коливань на відстані  $x = \lambda/6$  для моменту часу  $t = T/6$ . Амплітуда коливань  $A = 0,05$  м.

**9.24.** Зміщення від положення рівноваги точки, що знаходиться від джерела коливань на відстані  $x = 4$  см, в момент часу  $t = T/6$ , де  $T$  – період коливань, дорівнює  $\sqrt{3}/2$  значення амплітуди. Знайти довжину  $\lambda$  біжучої хвилі.

**9.25.** Для звукової хвилі, яка описується рівнянням

$$S(x, t) = 1 \cdot 10^{-4} \cos(6280t - 18,5x),$$

де множник перед косинусом виражений в м, множник при  $t$  – в  $\text{с}^{-1}$ , множник при  $x$  – в  $\text{м}^{-1}$ . Знайти: а) амплітуду швидкості коливань частинок середовища  $v_m$ , б) відношення амплітуди  $A$  зміщення частинок середовища до довжини хвилі  $\lambda$ , в) відношення амплітуди швидкості коливань частинок  $v_m$  до швидкості розповсюдження хвилі  $v$ .

**9.26.** Плоска біжуча акустична хвиля може бути представлена таким рівнянням:

$$S(x, t) = 0,05 \sin(1980t - 6x),$$

де  $S(x, t)$  – зміщення частинок в напрямку розповсюдження хвилі в сантиметрах,  $t$  – час в секундах,  $x$  – відстань в метрах по осі  $X$ , вздовж

якої розповсюджується хвиля. Знайти: 1) лінійну частоту коливань  $\nu$ ; 2) швидкість розповсюдження хвилі  $v$ ; 3) довжину хвилі  $\lambda$ ; 4) амплітуду коливань швидкості кожної частинки.

**9.27.** Рівняння незгасаючих коливань джерела має вигляд  $S = 10\sin(\pi t / 2)$  см. Знайти рівняння хвилі, якщо швидкість розповсюдження коливань в напрямку осі  $OX$   $v = 300$  м/с. Написати рівняння коливань для точки, яка знаходиться на відстані  $x = 600$  м від джерела коливань. Написати рівняння зміщень від положення рівноваги для точок хвилі в момент  $t = 4$  с після початку коливань.

**9.28.** Рівняння незгасаючих коливань джерела має вигляд  $S = 4 \sin(600\pi t)$  см. Знайти зміщення  $S$  від положення рівноваги точки, яка знаходиться на відстані  $x = 75$  см від джерела коливань, для моменту часу  $t = 0,01$  с після початку коливань. Швидкість розповсюдження коливань  $300$  м/с.

**9.29.** Рівняння незгасаючих коливань джерела має вигляд  $S = \sin(2,5\pi t)$  см. Знайти зміщення  $S$  від положення рівноваги, швидкість та прискорення точки, яка знаходиться на відстані  $x = 20$  м від джерела коливань, для моменту часу  $t = 1$  с після початку коливань. Швидкість розповсюдження коливань  $100$  м/с.

**9.30.** Рівняння незгасаючих коливань точок пружного середовища в початку координат ( $x = 0$ ) має вигляд:  $S(t) = 5 \cos(\pi/3)t$  см. Швидкість розповсюдження коливань  $v = 330$  м/с. Знайти зміщення точок середовища від положення рівноваги на відстані  $x = 660$  м в момент часу  $t = 4$  с від початку виникнення коливань.

**9.31.** В напрямку осі  $OX$  розповсюджується плоска біжуча хвиля. Рівняння зміщення від положення рівноваги для точок середовища в момент часу  $t = 4$  с від початку виникнення коливань має вид  $S(x, 4с) = 50 \cos\pi(2000 - 1,5x)$  см. Визначити швидкість розповсюдження коливань.

**9.32.** В початку координат знаходиться джерело гармонічних коливань. Рівняння цих коливань в площині YOZ має вид:  $S(0,t) = 10 \cos 500t$ , см. Швидкість розповсюдження цих коливань в пружному середовищі  $v = 300$  м/с. Знайти зміщення від положення рівноваги точок, які знаходяться на відстані  $x=15$  м від джерела коливань для моменту часу  $t = 0,1$  с після початку виникнення коливань.

**9.33.** Плоска хвиля  $S(x,t) = 20 \cos(100\pi t - \pi x/3)$  мкм розповсюджується в пружному середовищі, причому її джерело знаходиться в площині  $x = 0$ . Знайти зміщення і швидкість: а) джерела в початковий момент часу  $t = 0$ ; б) точок середовища, які знаходяться на відстані  $x = 20$  м від джерела через час  $t = 0,1$  с після початку коливань джерела.

**9.34.** Визначити швидкість поздовжніх  $v_{\parallel}$  і поперечних  $v_{\perp}$  пружних хвиль в золоті. Для золота модуль Юнга  $E = 7,8 \cdot 10^{10}$  Па, модуль зсуву  $G = 2,7 \cdot 10^{10}$  Па.

**9.35.** В пружному середовищі, густина якого  $\rho$ , вздовж осі OX розповсюджується хвиля  $S = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ . Написати вираз для вектора Умова  $\vec{j}$  (вектора густини потоку енергії).

**9.36.** Знайти положення вузлів і пучностей й накреслити графік стоячої хвилі, якщо: а) хвиля відбивається від менш щільного середовища; б) хвиля відбивається від більш щільного середовища. Довжина біжучої хвилі  $\lambda = 12$  см.

**9.37.** Як зміниться інтенсивність хвилі, якщо її частота збільшиться в два рази при: а) постійній швидкості; б) постійній довжині хвилі?

### Акустичні хвилі

**9.38.** Визначити амплітуду  $\Delta p_0$  звукового тиску, якщо амплітуда коливань частинок повітря  $A = 1$  мкм. Частота звуку  $\nu = 600$  Гц. Вважати, що звук розповсюджується в повітрі при нормальних умовах.

**9.39.** Джерело звуку невеликих розмірів має потужність  $N = 1$  Вт. Знайти амплітуду звукового тиску на відстані  $r_1 = 10$  м і  $r_2 = 100$  м від джерела звуку. Вважати, що звук розповсюджується в повітрі при нормальних умовах. Згасанням звуку знехтувати.

**9.40.** Для нижньої межі слухового відчуття амплітуда звукового тиску  $\Delta p_{01} = 7 \cdot 10^{-4}$  Па при частоті  $\nu_1 = 256$  Гц і  $\Delta p_{02} = 4 \cdot 10^{-5}$  Па при частоті  $\nu_2 = 2048$  Гц. Знайти відповідні інтенсивності звуку  $I$  та рівні інтенсивності звуку  $L$ , вважаючи, що звук розповсюджується в повітрі при нормальних умовах.

**9.41.** На відстані  $r_1 = 24$  м від джерела звуку малих розмірів рівень інтенсивності звуку  $L_1 = 32$  дБ. Знайти рівень інтенсивності звуку  $L_2$  цього джерела на відстані  $r_2 = 16$  м.

**9.42.** Звукова хвиля пройшла через перегородку, внаслідок чого рівень інтенсивності  $L$  звуку зменшився на  $\Delta L = 30$  дБ. В скільки раз зменшилась інтенсивність  $I$  звуку?

**9.43.** Рівень інтенсивності шуму двигуна  $L = 60$  дБ. Яким буде рівень інтенсивності, якщо одночасно будуть працювати два таких двигуни; десять таких двигунів?

**9.44.** Три тони, частоти яких дорівнюють відповідно  $\nu_1 = 50$  Гц,  $\nu_2 = 200$  Гц і  $\nu_3 = 1000$  Гц, мають однаковий рівень інтенсивності  $L = 40$  дБ. Визначити рівень гучності  $L_N$  цих тонів.

**9.45.** Звук, частота якого  $\nu = 1000$  Гц, має рівень інтенсивності  $L = 50$  дБ. Знайти рівні інтенсивності рівногучних з ним звуків з частотами:  $\nu_1 = 10\,000$  Гц,  $\nu_2 = 5000$  Гц;  $\nu_3 = 2000$  Гц;  $\nu_4 = 300$  Гц,  $\nu_5 = 50$  Гц.

**9.46.** Рівень гучності тона з частотою  $\nu = 200$  Гц спочатку був  $L_{N1} = 20$  фон, а потім підвищився до  $L_{N2} = 60$  фон. В скільки раз збільшилась інтенсивність  $I$  тона?

**9.47.** Користуючись графіком рівнів гучності на рис.9.1 знайти рівень гучності звуку  $L_N$ , якщо частота звуку  $\nu = 5000$  Гц і

амплітуда звукового тиску  $\Delta p_0 = 928$  мкПа. Умови, при яких знаходиться повітря, нормальні.

**9.48.** Для звуку, частота якого  $\nu = 2000$  Гц, знайти інтенсивність  $I$ , рівень інтенсивності  $L$  і рівень гучності  $L_N$ , які відповідають: а) порогу чутності; б) порогу больового відчуття.

**9.49.** Потужність точкового джерела звуку  $N = 126$  мкВт. Знайти рівень гучності  $L_N$  при частоті  $\nu = 500$  Гц на відстані  $r = 10$  м від джерела звуку.

**9.50.** На відстані  $r = 500$  м від точкового джерела звуку рівень гучності  $L_N = 30$  фон при частоті  $\nu = 900$  Гц. Яка потужність  $N$  джерела звуку?

**9.51.** Визначити амплітуду зміщення молекул повітря при нормальних умовах для звукової хвилі з частотою  $\nu = 500$  Гц для двох випадків: а)  $I = I_{min} = 7 \cdot 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>; б)  $I = I_{max} = 2$  Вт/м<sup>2</sup> ( $I_{min}$  – поріг чутності,  $I_{max}$  – поріг больового відчуття).

**9.52.** Знайти відношення амплітуд тисків для двох звукових хвиль однакової інтенсивності, одна із яких розповсюджується у воді, а інша в повітрі при нормальних умовах.

**9.53.** Точка С знаходиться на відстані  $r = 1,5$  м від точкового ізотропного джерела звуку, частота якого  $\nu = 600$  Гц. Потужність звуку, що випромінюється джерелом,  $N = 0,80$  Вт. Нехтуючи загасанням хвиль і вважаючи, що повітря знаходиться при нормальних умовах, знайти для точки С: а) амплітуду коливань тиску  $\Delta p_0$  і її відношення до тиску повітря; б) амплітуду коливань  $A$  молекул повітря. Порівняти її з довжиною звукової хвилі  $\lambda$ .

### Електромагнітні хвилі

**9.54.** В однорідному і ізотропному середовищі з  $\varepsilon = 3$  і  $\mu = 1$  розповсюджується плоска електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі  $E_0 = 10$  В/м. Знайти: а) амплітуду напруженості магнітного поля хвилі  $H_0$  б) фазову швидкість хвилі  $v$ .

**9.55.** Плоска електромагнітна хвиля, яка розповсюджується у вакуумі і описується рівняннями

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx),$$

відбивається без втрат інтенсивності від площини, яка перпендикулярна осі  $OX$ . Написати рівняння, які описують відбиту хвилю.

**9.56.** В вакуумі розповсюджується плоска електромагнітна хвиля  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ , де  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{j}$  – орт осі  $OY$ . Знайти вектор  $\vec{H}$  в точці з координатою  $x$  в момент: а)  $t = 0$ ; б)  $t = t_0$ . Розглянути випадок, коли  $E_0 = 160 \text{ В/м}$ ,  $k = 0,51 \text{ м}^{-1}$ ,  $x = 7,7 \text{ м}$ ,  $t_0 = 33 \text{ нс}$ .

**9.57.** Електромагнітна хвиля, частота якої  $\nu = 3,0 \text{ МГц}$  переходить із вакууму в немагнітне середовище з діелектричною проникністю  $\epsilon = 4,0$ . Знайти приріст її довжини хвилі.

**9.58.** Плоска електромагнітна хвиля розповсюджується в повітрі вздовж осі  $OX$ . Амплітуда напруженості електричного поля  $E_0 = 2 \text{ мкВ/м}$ . Довжина хвилі  $\lambda = 60 \text{ м}$ . Визначити напруженість електричного та магнітного полів в момент часу  $t = 0$  в точках з  $x_1 = 0$  і  $x_2 = 6 \text{ м}$ .

**9.59.** В вакуумі розповсюджується вздовж осі  $X$  плоска електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості магнітного поля хвилі  $H_0 = 0,05 \text{ А/м}$ . Визначити: а) амплітуду напруженості електричного поля хвилі, б) середню за часом густину енергії хвилі; в) інтенсивність хвилі.

**9.60.** Плоска електромагнітна хвиля  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ , яка розповсюджується в вакуумі, наводить е.р.с. індукції  $\mathcal{E}_{ind}$  в квадратному контурі, сторона якого  $l$ . Розташування контуру показано на рис.9.6. Знайти  $\mathcal{E}_{ind}(t)$ , якщо  $E_0 = 50 \text{ мВ/м}$ ,  $\nu = 100 \text{ МГц}$ ,  $l = 50 \text{ см}$ .

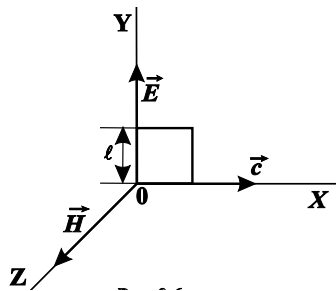


Рис.9.6.

**9.61.** Плоска електромагнітна хвиля, частота якої  $\nu = 10$  МГц, розповсюджується в слабо провідному середовищі з питомою провідністю  $\sigma = 0,01(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$  і діелектричною проникністю  $\epsilon = 9$ . Знайти відношення амплітуд густин струмів провідності і зміщення.

**9.62.** В деякому середовищі розповсюджується електромагнітна хвиля, частота якої  $\omega$ . Діелектрична проникність середовища при частоті  $\omega$  дорівнює  $\epsilon = 2,00$ , магнітна проникність практично дорівнює одиниці. Знайти вектор Пойнтинга  $\vec{P}$  в тій точці, в якій електричний вектор змінюється за законом  $\vec{E} = 10,0 \cos(\omega t + \alpha) \vec{k}$  (В/м), де  $\vec{k}$  – одиничний орт направлений вздовж осі Z. Вектор  $\vec{H}$  коливається вздовж осі X.

**9.63.** Два паралельних провідники занурені в гліцерин і індуктивно з'єднані з генератором електромагнітних коливань, частота якого  $\nu = 4,2 \cdot 10^8$  Гц. Відстані між пучностями стоячих хвиль на дротах  $\Delta x = 7$  см. Знайти діелектричну проникність  $\epsilon$  гліцерину. Магнітну проникність прийняти за одиницю.

**9.64.** Електромагнітна хвиля, яка випромінюється електричним диполем, розповсюджується у вакуумі. В хвильовій зоні на промені, який проведений із диполя і перпендикулярний до його осі, в точці на відстані  $r = 1,00$  м від диполя, амплітуда напруженості електричного поля  $E_0 = 1,00$  мВ/м. Вирахувати потужність випромінювання диполя (тобто енергію, яку випромінює диполь за одиницю часу у всіх напрямках).

**9.65.** Електрон рухається в однорідному магнітному полі в площині, яка перпендикулярна до вектора  $\vec{B}$ . Індукція поля  $B = 1,00$  Тл, швидкість електрона  $v = 1 \cdot 10^7$  м/с. Оцінити: а) яку частину своєї кінетичної енергії електрон втрачає на випромінювання за один оберт, б) за який час  $\tau$  кінетична енергія електрона зменшиться на 1%, в) число обертів, яке здійснить електрон за час  $\tau$ .

**9.66.** Знайти середню потужність випромінювання електрона, який здійснює гармонічні коливання з амплітудою  $a = 0,10$  нм і частотою  $\omega = 6,5 \cdot 10^{14}$  рад/с.

### Додаткові задачі

**9.67.** Яка амплітуда коливань звукової хвилі в повітрі при розмові середньої гучності (максимальний тиск  $\Delta p_0$  біля 1 Па) при частоті  $\nu = 400$  Гц ? Атмосферний тиск нормальний, температура повітря  $20^\circ\text{C}$ .

**9.68.** Два звуки відрізняються за рівнем інтенсивності на  $\Delta L = 1$  дБ. Визначити: а) відношення їхніх інтенсивностей;

б) відношення амплітуд тисків цих звуків.

**9.69.** На відстані  $r_1 = 15$  м від джерела звуку, розміри якого малі, рівень інтенсивності звуку дорівнює  $L_1 = 30$  дБ. Нехтуючи згасанням, розрахувати: а) рівень інтенсивності звуку  $L_2$  на відстані  $r_2 = 5$  м; б) на якій відстані  $r_3$  звук не чутний.

**9.70.** Потужність випромінювання антени радіостанції дорівнює 100 кВт. Обчислити на відстанях від радіостанції 1 км і 100 км: а) амплітуду вектора Пойнтинга та інтенсивність випромінювання; б) амплітуду напруженості електричного поля хвилі; в) тиск електромагнітних хвиль.

**9.71.** Електромагнітна хвиля поширюється в однорідному ізотропному діелектричному середовищі із проникностями  $\epsilon = 3,00$  та  $\mu = 1,00$ . Амплітуда напруженості електричного поля хвилі  $E_0 = 10,0$  В/м. Знайти: а) амплітуду напруженості магнітного поля хвилі  $H_0$ ; б) фазову швидкість хвилі  $v$ .

**9.72.** Амплітуда напруженості електричного поля плоскої синусоїдальної хвилі дорівнює  $E_0 = 5$  мВ/м. Який середній тиск чинить ця хвиля на плоску металічну стінку в повітрі при нормальному падінні на неї?



## 10. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

### 10.1. Питання теми

1. Явище інтерференції когерентних хвиль. Умови максимуму та мінімуму інтерференції.
2. Способи отримання когерентних хвиль.
3. Характеристики когерентних хвиль.
4. Застосування явища інтерференції.

### 10.2. Основні визначення та формули

1. Швидкість світла у середовищі з показником заломлення  $n$

$$v = c/n, \quad (10.1)$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

2. Оптична довжина шляху світлового променя

$$L = nl, \quad (10.2)$$

де  $l$  – геометрична довжина шляху променя в середовищі з показником заломлення  $n$ .

Якщо один промінь проходить шлях  $l_1$  в середовищі з показником заломлення  $n_1$ , а інший промінь – шлях  $l_2$  у середовищі з показником заломлення  $n_2$ , то оптична різниця ходу цих променів дорівнює

$$\Delta = n_1 l_1 - n_2 l_2. \quad (10.3)$$

3. Різниця фаз коливань  $\Delta\varphi$  зв'язана з оптичною різницею ходу  $\Delta$  хвиль, які інтерферують, співвідношенням

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}, \quad (10.4)$$

де  $\lambda$  – довжина світлової хвилі у вакуумі.

4. Умова максимального підсилення електромагнітних хвиль із-за інтерференції

$$\Delta = \pm k\lambda, (k = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (10.5)$$

де  $\lambda$  – довжина світлової хвилі у вакуумі.

**5.** Умова максимального послаблення електромагнітних хвиль внаслідок інтерференції

$$\Delta = \pm(2k + 1)\frac{\lambda}{2}, (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (10.5')$$

**6.** Відстань між інтерференційними смугами на екрані (ширина інтерференційної смуги), які одержані від двох когерентних джерел при умові, що  $l \gg d$ , дорівнює

$$\Delta x = \frac{l\lambda}{d}, \quad (10.6)$$

де  $l$  – відстань від екрана до когерентних джерел;  $d$  – відстань між когерентними джерелами;  $\lambda$  – довжина хвилі.

**7.** Відстань між уявними когерентними джерелами електромагнітних хвиль, які створені бідзеркалами Френеля,

$$d = 2r\alpha, \quad (10.7)$$

де  $\alpha$  – кут між дзеркалами Френеля;  $r$  – відстань від дійсного джерела електромагнітних хвиль до лінії перетину дзеркал.

**8.** Відстань між уявними когерентними джерелами електромагнітних хвиль, які створені біпризмою Френеля,

$$d = 2r(n - 1)\alpha, \quad (10.8)$$

де  $\alpha$  – заломний кут біпризми;  $n$  – показник заломлення речовини біпризми;  $r$  – відстань від джерела електромагнітних хвиль до біпризми.

**9.** Якщо інтерференційні смуги спостерігаються в плоско-паралельних пластинках або плівках, що знаходяться в повітрі, то оптична різниця ходу відбитих хвиль, які інтерферують, визначається за формулами:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda}{2} \quad (10.9)$$

або

$$\Delta = 2dncos\beta \pm \frac{\lambda}{2}, \quad (10.10)$$

де  $d$  – товщина плівки (пластинки);  $n$  – показник заломлення плівки (пластинки);  $\alpha$  – кут падіння;  $\beta$  – кут заломлення,  $\pm \lambda/2$  обумовлена зміною фази на  $\pi$  відбитих від пластинки променів.

**10.** Інтерференційні смуги у вигляді кілець Ньютона утворюються при відбиванні світла від поверхонь повітряного прошарку, який утворений між скляною пластинкою і випуклою поверхнею лінзи, яка дотикається до пластинки. Якщо радіус випуклої поверхні лінзи  $R$ , то радіуси темних інтерференційних кілець Ньютона у відбитому світлі

$$r_k = \sqrt{\lambda R k}, \text{ де } k = 1, 2, 3, \dots \quad (10.11)$$

Радіуси світлих інтерференційних кілець Ньютона у відбитому світлі

$$r_k = \sqrt{\frac{R\lambda(2k-1)}{2}}, \text{ де } k = 1, 2, 3, \dots \quad (10.12)$$

Для світла, яке проходить через лінзу і пластинку, розташування кілець Ньютона обернене до розташування кілець у відбитому світлі. Тобто, за формулою (10.11) визначають радіуси світлих кілець, а за формулою (10.12) – темних.

**11.** Для характеристики когерентних властивостей хвиль вводять поняття *часу когерентності*  $t_{ког}$ , який означається як час, за який випадкові зміни фази хвилі досягають значення порядку  $\pi$ . За час  $t_{ког}$  коливання як би забуває свою початкову фазу і стає некогерентним по відношенню до самого себе. Приблизне (оціночне) значення  $t_{ког}$  визначається за формулами:

$$t_{ког} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}, \quad (10.13)$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $\Delta\omega$ ,  $\Delta\nu$ ,  $\Delta\lambda$  – інтервал частот (довжин хвиль), в межах якого випромінює джерело,  $\lambda$  – середня довжина хвилі випромінювання.

Максимальна різниця ходу, при якій можлива інтерференція, називається *довжиною когерентності* випромінювання  $l_{\text{ког}}$ . Величина  $l_{\text{ког}}$  визначається за формулами:

$$l_{\text{ког}} = ct_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (10.14)$$

Радіус когерентності джерела випромінювання визначається як

$$\rho_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda}{\psi}, \quad (10.15)$$

де  $\psi$  – кут під яким видно джерело хвиль з точки спостереження.  $\rho_{\text{ког}}$  визначає відстань між двома точками джерела, хвилі від яких приходять в точку спостереження з різницею фаз, яка приблизно дорівнює  $\pi$ .

**12.** Весь простір, який займає хвиля, можна розбити на частини, в кожній із яких хвиля приблизно зберігає когерентність. Об'єм такої частини простору називається *об'ємом когерентності*:

$$V_{\text{ког}} \sim l_{\text{ког}} \cdot \rho_{\text{ког}}^2 = \frac{\lambda^4}{\Delta\lambda\psi^2}. \quad (10.16)$$

### 10.3. Питання на самопідготовку

**1.** Дати визначення оптичної довжини шляху та різниці ходу променів.

**2.** В чому суть явища інтерференції?

**3.** При яких умовах можливе явище інтерференції?

**4.** Які хвилі є когерентними?

**5.** Записати та пояснити умову максимального підсилення та послаблення електромагнітних хвиль внаслідок інтерференції.

**6.** Дати визначення ширини інтерференційної смуги. Від яких величин залежить ширина інтерференційної смуги?

**7.** Дати визначення когерентності хвиль. Які властивості когерентних хвиль?

**8.** Які відомі способи отримання когерентних хвиль оптичного діапазону? Пояснити їх суть.

**9.** Пояснити явище «втрати півхвилі» при відбиванні хвиль від перешкоди.

## 10.4. Методичні вказівки

1. Основна задача при вивченні інтерференції – це розрахунок інтерференційної картини. Розрахувати таку картину означає знайти розподіл інтенсивності електромагнітних хвиль в просторі. Так як інтенсивність пропорційна напруженості електричного поля електромагнітної хвилі, то основна задача інтерференції зводиться до знаходження амплітуди результуючого коливання в довільній точці середовища.

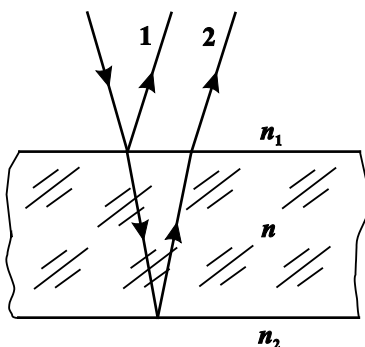
При розрахунку інтерференційної картини частіше всього необхідно визначити положення довільного  $k$ -го максимуму (або мінімуму) і відстань між двома сусідніми максимумами (або мінімумами). Метод розв'язку більшості задач на інтерференцію світла зводиться до двох основних етапів: знаходження оптичної різниці ходу  $\Delta$  і застосування умови максимуму (10.5), або мінімуму (10.5').

2. Інтерференція можлива тільки у випадку когерентних хвиль. Так як два незалежних джерела не являються когерентними, то інтерференція світла виникає тільки в тих випадках, коли світлова хвиля, яка випромінюється одним джерелом, розділяється деякою оптичною системою на дві частини. Ці дві хвилі, проходячи різні шляхи, зустрічаються на екрані (або на сітчатці ока), створюючи інтерференційну картину. Цю картину нерідко вдається пояснити, замінивши дану оптичну систему іншою, еквівалентною, вважаючи при цьому, що є не одне, а два когерентні джерела.

Задачі на інтерференцію світла поділяються в основному на *дві групи*: задачі на інтерференцію хвиль від двох когерентних джерел і задачі на інтерференцію в тонких пластинках (плівках). До задач *першої групи* відносяться випадки інтерференції, які отримуються за допомогою дзеркал Френеля, дзеркала Ллойда, білінзи Бійє, біпризми Френеля, схеми Юнга. Для розрахунку інтерференційної картини використовуються формули (10.5), (10.5'), (10.6), попередньо визначивши (якщо це необхідно) положення двох когерентних джерел. *Другу групу* складають задачі на інтерференцію як в плоско – паралельних, так і клиноподібних тонких шарах, а також задачі на

кільця Ньютона. В цих випадках співвідношення (10.9) і (10.10) дозволяють вирахувати оптичну різницю ходу  $\Delta$  двох променів, які інтерферують, відбитих від обох поверхонь шару. Потім згідно умови (10.5) і (10.5') визначають результат інтерференції.

**3.** Розв'язуючи задачі на інтерференцію в тонких пластинках (плівках), необхідно мати на увазі, що у формулі (10.9) для оптичної різниці ходу двох променів, які відбиваються від передньої і задньої поверхонь пластинки, отримані для випадку, коли пластинка оточена однаковими середовищами. При цьому один промінь відбивається від межі з оптично менш щільним середовищем.



**Рис.10.1.**

В останньому випадку фаза світлового коливання при відбиванні скачкоподібно змінюється на протилежну. Очевидно, таке явище можна трактувати і як зменшення, і як збільшення фази на  $\pi$ . Ця зміна фази відповідає зміні оптичної різниці ходу променів  $\Delta$  на  $\pm \lambda/2$ .

Таким чином в формулі (10.9) і (10.10) доданок  $\lambda/2$ , який відображає

“втрату” півхвилі при відбиванні, можна записувати з любим знаком.

Якщо тонка пластинка оточена різними середовищами, то в залежності від співвідношення між показниками заломлення середовищ  $n_1$ ,  $n_2$  і пластинки  $n$  можливі такі випадки:

а)  $n > n_1$ ,  $n > n_2$ , при цьому тільки промінь 1, який відбивається від межі з оптично більш щільним середовищем, “втрачає” півхвилі (**рис.10.1**):

б)  $n < n_1$ ,  $n < n_2$  “втрачає” півхвилі тільки промінь 2;

в)  $n_1 < n < n_2$  – обидва промені “втрачають” півхвилі;

г)  $n_1 > n > n_2$  – ні один з променів не “втрачає” півхвилі. Очевидно, для перших двох випадків співвідношення (10.9) і (10.10) залишаються в силі. В останніх двох випадках “втрата” півхвилі обома променями або ж відсутність “втрати” обома

променями не впливає на їхню різницю ходу і в цих випадках в формулах (10.9) і (10.10) величину  $\lambda/2$  необхідно відкинути.

4. При інтерференції світла, яка відома під назвою кілець Ньютона, роль тонкої плівки грає прошарок (як правило, повітряний) між пластинкою і випуклою поверхнею притиснутої до неї лінзи. При цьому вважається, що пластинка і лінза мають однакові показники заломлення.

5. В умовах задач приводяться значення довжин світлових хвиль, настільки заокруглені, що ними з однаковим успіхом можна користуватись як у випадку розповсюдження світла у повітрі, так і в вакуумі, оскільки  $\lambda_0 = 1,00029 \lambda$ , де  $\lambda_0$  – довжина хвилі у вакуумі,  $\lambda$  – довжина хвилі у повітрі.

6. Прийнято вважати, що протягне джерело світла (наприклад, щілина, позаді якої знаходиться джерело світла) дає на екрані інтерференційну картину, яку зручно спостерігати, якщо інтерференціальні картини, що утворюються крайніми точками джерела, зсунуті одна по відношенню до іншої не більше, ніж на  $\Delta x/2$ , де  $\Delta x$  – ширина інтерференційної смуги. На основі цього для спостереження інтерференційної картини необхідно виконання наступної умови: лінійні розміри джерела світла (наприклад, ширина щілини  $b$ ) повинні задовільняти співвідношенню:

$$b < \frac{\lambda}{4 \sin \varphi}. \quad (10.17)$$

Тут  $\varphi$  – половина кута між напрямками променів, які виходять із будь-якої точки джерела і котрі сходяться в деякій точці екрану (рис.10.2

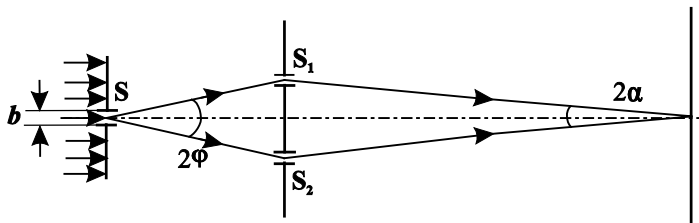


Рис.10.2.

для схеми Юнга). Кут  $2\varphi$  називається апертурою інтерференції. При великих апертурах спостерігати інтерференцію можна тільки від

джерел, розміри яких менші довжини світлової хвилі. Якщо  $\varphi = \pi/2$ , тобто промені, які інтерферують, виходять із джерела майже в протилежних напрямках, то із (10.17) витікає, що протяжність джерела повинна бути менша  $\lambda/4$ .

Для спостереження інтерференції з використанням джерел, розміри яких набагато більші довжини хвилі світла, геометрія досліду повинна бути такою, щоб промені, які інтерферують, виходили із джерела під малим кутом один до одного ( $\varphi \ll 1$ ). Тоді критерій (10.17) приймає вид:

$$b < \frac{\lambda}{4\varphi}. \quad (10.18)$$

7. При розрахунку інтерференційної картини дуже часто використовуються формули для наближених розрахунків (додатки 2).

## 10.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 10.1.** Приймач радіосигналів, який слідує за появою супутника Землі із-за горизонту, розташований на березі озера на висоті  $H = 3$  м над поверхнею води. В міру підняття супутника над горизонтом спостерігається періодична зміна інтенсивності сигналу, який приймається. Визначити частоту радіосигналу супутника, якщо максимуми інтенсивності спостерігались зокрема при кутах підняття супутника над горизонтом  $\alpha_1 = 3^\circ$  і  $\alpha_2 = 6^\circ$ . Поверхню озера можна вважати зеркалом, яке ідеально відбиває хвилі.

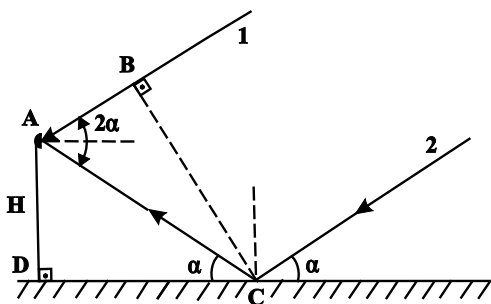


Рис.10.3.

**Розв'язок.** На рис.10.3 показаний хід променів радіосигналу від супутника. Промені 1 і 2 йдуть від супутника. Їх можна вважати паралельними променями. В точці А знаходиться



приймач радіосигналів. В точці С має місце відбивання променя 2 від поверхні озера. Промені 1 і 2 когерентні, попадають в приймач і інтерферують. В залежності від різниці ходу цих променів в точці А може бути або підсилення сигналу, або його послаблення. Значить задача зводиться до знаходження різниці ходу променів 1 і 2. Ця різниця ходу дорівнює  $\Delta = AC + \lambda/2 - AB$ . При цьому враховано, що промінь 2 змінює фазу в точці С на  $\pi$ , тобто проходить додаткову відстань  $\lambda/2$ . ("втрата півхвилі" при відбиванні від більш щільного середовища). Із  $\triangle ACD$  знаходимо, що  $AC = H / \sin \alpha$ , а із  $\triangle ABC - AB = H \cos 2\alpha / \sin \alpha$ . Так як кут  $\alpha$  малий, то  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \sqrt{1 - 4\alpha^2} \approx 1 - \frac{1}{2}4\alpha^2 = 1 - 2\alpha^2.$$

Тоді різниця ходу

$$\Delta = \frac{H}{\alpha} - \frac{H(1 - 2\alpha^2)}{\alpha} + \frac{\lambda}{2} = 2H\alpha + \frac{\lambda}{2}.$$

Умова максимуму інтерференції для двох кутів  $\alpha$  буде:

$$2H\alpha_1 + \frac{\lambda}{2} = 2k \frac{\lambda}{2},$$

$$2H\alpha_2 + \frac{\lambda}{2} = 2(k+1) \frac{\lambda}{2}.$$

Із цих співвідношень знаходимо, що

$$\lambda = 2H(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{57,3} = 0,31 \text{ м} = 31 \text{ см},$$

а частота радіосигналу

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,31} \approx 9,7 \cdot 10^8 \text{ Гц} \approx 970 \text{ МГц}.$$

**Задача 10.2.** В точку екрана А від джерела  $S_1$  монохроматичного світла з довжиною хвилі 0,5 мкм приходять два промені: безпосередньо від джерела промінь  $S_1A$ , який перпендикулярний до екрану, і промінь  $S_1BA$ , який відбивається у точці В від дзеркала, яке паралельне променеві  $S_1A$ . (рис.10.4). Відстань від екрана до джерела  $l_1 = 1 \text{ м}$ , відстань  $h$  від променя  $S_1A$

до площини дзеркала дорівнює 2 мм. Визначити: 1) що буде на екрані в точці А – максимум чи мінімум інтенсивності світла? 2) як зміниться інтенсивність світла в точці А, якщо на шляху променя  $S_1A$  перпендикулярно до нього розташувати плоско паралельну пластинку скла  $n = 1,5$ , товщина якої  $d = 6,5$  мкм.

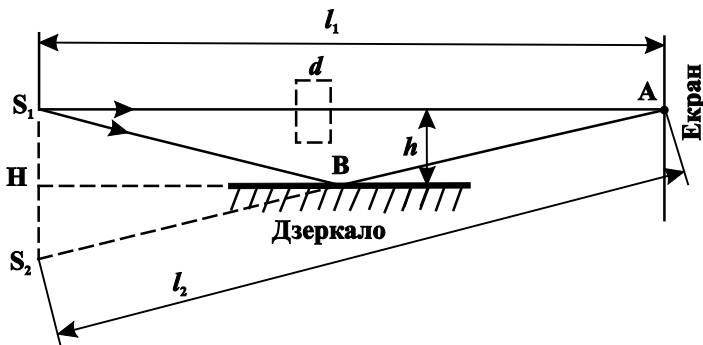


Рис.10.4.

**Розв’язок.** Побудуємо уявне зображення  $S_2$  джерела  $S_1$  у дзеркалі. Джерела  $S_1$  і  $S_2$  є когерентні, тому при накладанні хвиль, які приходять від цих джерел, на екрані буде інтерференційна картина. Підсилення чи послаблення світла в тій чи іншій точці екрану залежить від оптичної різниці ходу  $\Delta$  інтерферуючих променів.

За формулою (10.5), якщо в  $\Delta$  вміщується ціле число довжин хвиль  $\lambda$  (парне число півхвиль  $\lambda/2$ ), то в точці А екрану буде максимум. Згідно (10.5’), якщо в  $\Delta$  вміщується непарне число  $\lambda/2$ , то в точці А буде мінімум інтерференції. Тому будемо вважати, що  $\Delta = m(\lambda/2)$ , де  $m$  – число, яке може бути парним, непарним або дробовим.

I. Оптична різниця ходу променів  $S_1A$  і  $S_1BA$  буде дорівнювати

$$\Delta_1 = (l_2 - l_1) + \frac{\lambda}{2},$$

де  $l_2 = \sqrt{l_1^2 + H^2}$  ( $H = 2h$ ). При цьому враховано, що промінь  $S_1BA$  відбивається від середовища оптично більш щільного і має місце «втрати півхвилі». Тоді

$$l_2 - l_1 = l_1 \sqrt{1 + \left(\frac{H}{l_1}\right)^2} - l_1 = l_1 \left( \sqrt{1 + \left(\frac{H}{l_1}\right)^2} - 1 \right).$$

Так як

$$\frac{H}{l_1} \ll 1, \text{ то } \left(1 + \left(\frac{H}{l_1}\right)^2\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{l_1}\right)^2 \text{ і}$$

$$l_2 - l_1 = l_1 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{l_1}\right)^2 - 1\right) = \frac{H^2}{2l_1}.$$

Тоді різниця ходу

$$\Delta_1 = \frac{H^2}{2l_1} + \frac{\lambda}{2}.$$

Звідки знаходимо, що

$$m_1 = \Delta/(\lambda/2) = H^2/(l_1\lambda) + 1 = 4h^2/(l_1\lambda) + 1 = 1,33.$$

Значить в точці А, так як  $m_1$  непарне, буде спостерігатись мінімум інтенсивності світла.

П. Скляна пластинка на шляху променя  $S_1A$  змінить його оптичну довжину шляху. Тепер ця довжина шляху буде дорівнювати

$$L = (l_1 - d) + nd = l_1 + (n - 1)d.$$

Оптична різниця ходу променів  $S_1A$  і  $S_1BA$  тепер буде

$$\Delta_2 = l_2 - L + \frac{\lambda}{2} = l_2 - [l_1 + (n - 1)d] + \frac{\lambda}{2} = \Delta_1 - (n - 1)d.$$

Звідки знаходимо, що

$$m_2 = \frac{\Delta_2}{(\lambda/2)} = \frac{\Delta_1 - (n - 1)d}{(\lambda/2)} = m_1 - \frac{2d(n - 1)}{\lambda} = 20$$

Оскільки число півхвиль виявилось парним, то у точці А буде підсилення світла.

**Задача 103.** На біпризму Френеля, заломний кут якої  $\alpha = 0,01$  рад і ширина  $D = 6$  см, падає плоска хвиля, як показано на

рис.10.5. На якій відстані від біпризми можна спостерігати найбільшу кількість інтерференційних смуг? Скільки їх буде? Яка ширина смуги? Коефіцієнт заломлення скла  $n = 1,5$ , довжина хвилі світла  $\lambda = 0,5\mu\text{м}$ .

**Розв'язок.** Як видно із рис.10.5 максимальна кількість

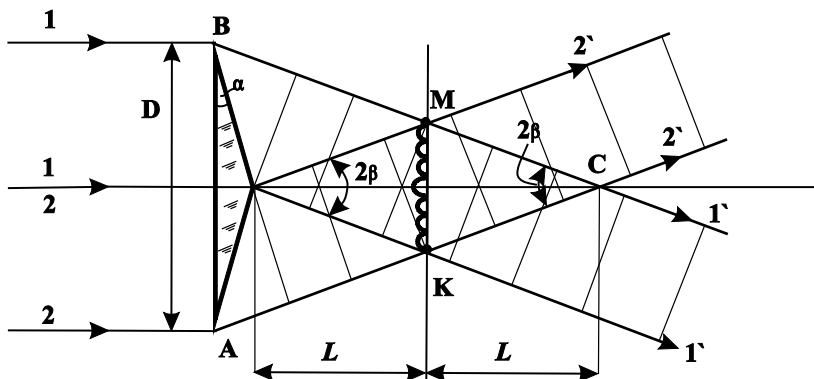


Рис.10.5.

інтерференційних смуг буде в площині, що містить лінію КМ. Так як біпризма тонка, то із трикутника АВС знаходимо, що висота  $2L = AB/(2\text{tg}\beta) = D/(2\beta)$ . Кут відхилення призмою променів  $\beta = \alpha(n - 1)$ .

$$\text{Тому} \quad L = \frac{D}{4\alpha(n-1)} = \frac{6}{4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} \text{ см} = 300 \text{ см} = 3 \text{ м}.$$

Загальна формула для визначення ширини інтерференційної смуги є (10.6). Якщо джерело світла знаходиться на відстані  $r$  від біпризми, а екран на відстані  $a$  від біпризми, то  $d = r \cdot 2\beta = 2\alpha(n - 1)r$  (формула 10.8), а  $l = a + r$ . Тоді ширина інтерференційної смуги

$$\Delta x = \frac{(a + r)\lambda}{2r\alpha(n - 1)}.$$

Звідки отримаємо, що для плоских хвиль ( $r \rightarrow \infty$ ),

$$\Delta x = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(a+r)\lambda}{2r\alpha(n-1)} = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)} = \frac{\lambda}{2\beta}. \quad (1)$$

Для нашої задачі

$$\Delta x = \frac{0,5}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5} = 50 \text{ мкм.}$$

Максимальне число інтерференційних смуг знайдемо із співвідношення:

$$N = \frac{KM}{\Delta x}.$$

Із  $\triangle ABC$  середня лінія  $KM = 0,5AB = 0,5D$ . Тоді

$$N = \frac{0,5D}{\Delta x} = \frac{0,5 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{50 \cdot 10^{-6}} = 600 \text{ смуг.}$$

**Задача 10.4.** На дзеркала Френеля, кут між якими  $\alpha = 10'$ , падає монохроматичне світло від вузької щілини  $S$ , яка знаходиться на відстані  $r = 0,1$  м від лінії їх перетину. Відбите світло створює

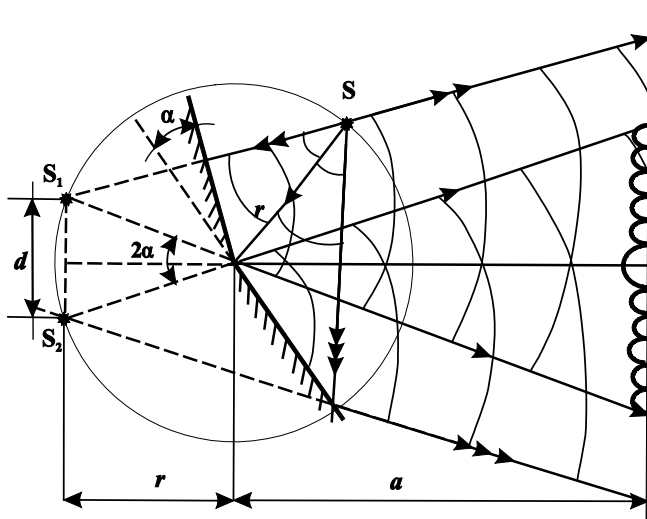


Рис.10.6.

інтерференційну картину на екрані, який знаходиться на відстані  $a=2,7$  м від лінії перетину дзеркал (рис.10.6). Відстань між інтерференційними смугами на екрані дорівнює  $\Delta x = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м. Визначити довжину хвилі  $\lambda$  світла.

**Розв'язок.** Через те, що кут  $\alpha$  малий, відстань між уявними джерелами, згідно (10.7)  $d = 2r\alpha$ . Величини  $\Delta x$ ,  $\lambda$ ,  $l$ ,  $a$  зв'язані співвідношенням (10.6). Тому

$$\lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{l}, \text{ де } l = r + a.$$

Звідки знаходимо, що

$$\lambda = \frac{2\alpha r \Delta x}{(r+a)} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,6 \text{ мкм}.$$

**Задача 10.5.** Для зменшення втрат інтенсивності світла при відбиванні від скла на поверхню об'єктива ( $n_3 = 1,7$ ) наноситься тонка прозора плівка ( $n_2 = 1,3$ ). При якій найменшій товщині плівки  $d$  відбувається максимальне послаблення світла ( $\lambda = 0,56$  мкм)? Вважати, що промені падають майже нормально до поверхні об'єктива.

**Розв'язок.** Світло, яке падає на об'єктив, відбивається як від передньої так і від задньої поверхонь тонкої плівки. Хід променів для похилого падіння показаний на рис.10.7. Відбиті промені 1 і 2 інтерферують. Умова мінімуму визначається за формулою (10.5'). Оскільки

$$n_1 < n_2 < n_3, \text{ то промені 1 та 2}$$

відбиваються від оптично більш щільного середовища, при цьому вони обидва «втрачають півхвилі» (див. методичні вказівки). Крім того, у даній задачі кути падіння і відбивання дорівнюють нулеві, тому геометрична різниця ходу

дорівнює  $2d$ , а оптична різниця ходу

$$\Delta = 2dn_2.$$

За формулою (10.5')

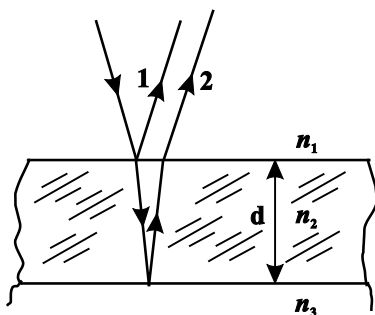
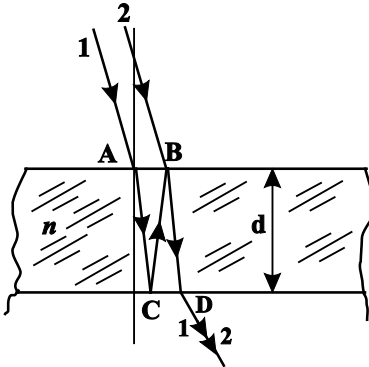


Рис.10.7.

$$2dn_2 = (2k + 1)\lambda/2.$$

При  $k = 0$   $d = \lambda/(4n_2) = 0,11$  мкм.



**Рис.10.8.**

одночасно для світла з довжинами хвиль  $\lambda_1 = 0,60$  мкм і  $\lambda_2 = 0,4$  мкм (синє світло)?

**Аналіз.** При попаданні на плівку світло частково проходить, частково відбивається від поверхні плівки. Спостереження ведеться за світлом, яке проходить. В цьому випадку інтерферують дві хвилі, одна із яких проходить через плівку без відбивання (промінь 2), інша – зазнає відбивання на обох поверхнях всередині плівки (промінь 1, рис.10.8). Результат інтерференції в точці D залежить від оптичної різниці ходу, яка у випадку нормального падіння променів буде:

$$\Delta = (AC + CB + BD)n - BD \cdot n = 2dn. \quad (1)$$

При відбиванні в точках B і C зміни фази на  $\pi$  («втрати» півхвилі) не відбувається, тому що середовище (повітря) поза плівкою має показник заломлення менший, ніж показник заломлення плівки.

Плівка найбільш прозора для світла з такою довжиною хвилі, для якої хвилі 1 і 2 будуть підсилюватись, тобто оптична різниця ходу (1) повинна бути кратна парному числу півхвиль (умова максимуму інтерференції (10.5)):

$$\Delta = 2k(\lambda/2). \quad (2)$$

**Розв’язок.**

**а)** Прирівнюючи (1) і (2) отримаємо, що для

**Задача 10.6.** На плоско-паралельну плівку з показником заломлення  $n = 1,33$  падає нормально паралельний пучок білого світла (рис.10.8). **а)** При якій найменшій товщині плівки вона буде найбільш прозора для світла з довжиною хвилі  $\lambda_1 = 0,60$  мкм (жовтий колір)? **б)** При якій найменшій товщині  $d$  плівка найбільш прозора

$\lambda_1 \quad 2dn = k\lambda_1$ . Звідки

$$d = k\lambda_1/(2n), \quad (3)$$

де  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

При такій товщині плівки вона буде мати найбільш інтенсивний жовтий колір. Очевидно, що цій умові буде відповідати найтонша плівка ( $k = 1$ ):

$$d_{1min} = \lambda_1/(2n) = 0,226 \text{ мкм.}$$

**б)** Одночасне максимальне проходження жовтого і синього світла означає, що товщина плівки задовільняє і умові (3), і умові (4)

$$d = m\lambda_2 / 2n, \quad (4)$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Із умов (3) і (4) отримаємо, що

$$\frac{m}{k} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1,5 = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} \text{ і т. д.}$$

Тобто  $m = 3$ ,  $k = 2$  – мінімальні можливі значення. Найменша товщина плівки відповідає цим значенням  $m$  і  $k$ .

Тоді

$$d_{2min} = 2\lambda_1/(2n) = \lambda_1/n = 0,45 \text{ мкм.}$$

Таким чином, при товщині плівки  $d = 0,45 Z$  мкм, де  $Z$  – будь-яке ціле число, плівка буде найбільш прозорою для жовтого і синього світла. Число  $Z$  не повинно бути особливо великим, так як плівка може стати прозорою і для інших довжин хвиль.

**Задача 10.7.** На рис.10.9 представлена інтерференційна схема досліду Юнга з монохроматичним неточковим джерелом  $S$ , ширина якого  $b$ . Якій нерівності повинні задовольняти параметри задачі, щоб на екрані  $E$  спостерігалась інтерференційна картина? Довжина хвилі випромінювання джерела дорівнює  $\lambda$ . Розрахунок виконати для таких даних:  $L = 0,5$  м,  $\lambda = 0,6$  мкм,  $d = 2$  мм.

**Розв'язок.** Просторова когерентність зв'язана з розрахунком напрямків хвильового вектора  $\vec{k}$ , якщо джерело світла  $S$  є неточковим. Окремі ділянки джерела світла збуджують хвилі, фази яких ніяк не зв'язані між собою. Тому інтерференційна картина, яка виникає на



екрані, буде накладанням картин, які створюються кожною ділянкою окремо.

Як видно із рис.10.9 джерело світла  $S$  збуджує хвилі в місцях щілин  $S_1$  і  $S_2$ , хвильові вектори яких знаходяться в межах кута  $\psi$ .

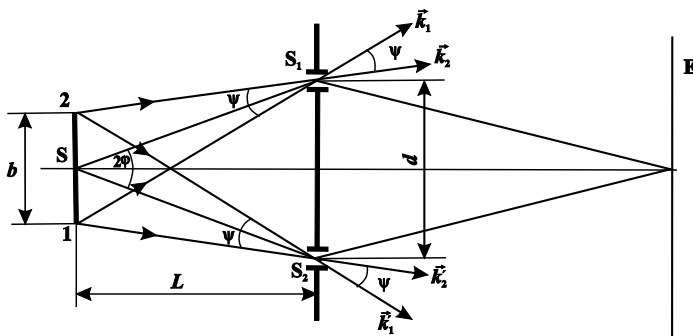


Рис.10.9.

Згідно умови (10.18) ширина джерела світла  $S$

$$b < \frac{\lambda}{4\phi},$$

де апертура інтерференції  $2\phi \approx d/L$ . При цьому враховано, що  $d \ll L$ . Тоді

$$b < \frac{\lambda L}{2d}, \text{ або } bd < \lambda L/2.$$

Цій нерівності повинні задовольняти параметри задачі, щоб на екрані спостерігалась інтерференція. Це означає, що хвилі, які проходять щілини  $S_1$  і  $S_2$  будуть когерентними. Для умови даної задачі розміри джерела повинні бути меншими  $b$ , а саме

$$b < \frac{\lambda L}{2d} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \text{ м} = 0,075 \text{ мм}.$$

Юнг в 1802 р. отримав інтерференцію від двох щілин  $S_1$  і  $S_2$ , збільшивши просторову когерентність світла, що падало на щілини. Для цього він пропустив світло від джерела  $S$  через ще одну щілину малих розмірів в непрозорому екрані.

**Задача 4.8.** Світло з довжиною хвилі  $\lambda = 0,55$  мкм від дуже віддаленого джерела падає нормально на поверхню скляного клина. У відбитому світлі спостерігається система інтерференційних смуг, відстань між сусідніми максимумами яких на поверхні клина

$AB = \Delta x = 0,21$  мм (рис.10.10). Знайти: **а)** кут між гранями клина; **б)** ступінь монохроматичності світла  $\lambda/\Delta\lambda$ , якщо зникнення інтерференційних смуг спостерігається на відстані  $l = 1,5$  см від вершини клина.

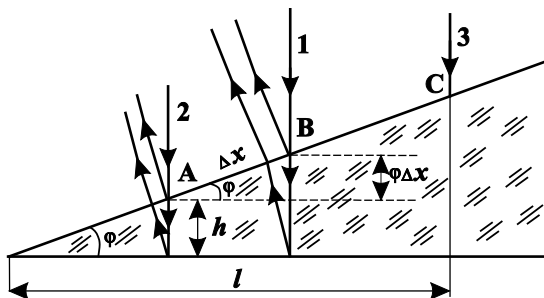


Рис.10.10.

**Розв'язок.** **а)** Як видно з рис.10.10, умова максимуму інтерференції точці А буде,  $2hn - \lambda/2 = k\lambda$ , а для наступного максимуму в точці В  $2hn + 2\phi\Delta xn - \lambda/2 = (k + 1)\lambda$  (формула (10.9) при умові  $\alpha = 0$ ). Із цих двох співвідношень знаходимо, що

$$2\phi\Delta xn = \lambda.$$

Звідки знаходимо:

$$\phi = \frac{\lambda}{2n\Delta x} \approx 3'.$$

**б)** Ступінь монохроматичності знайдемо з умови, що різниця ходу променів в точці С буде дорівнювати довжині когерентності (10.14). Тобто

$$\Delta = 2ln\phi - \frac{\lambda}{2} = l_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

Звідки знаходимо:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2\phi ln - \lambda/2}{\lambda} = \frac{l - \Delta x/2}{\Delta x} = \frac{l}{\Delta x} - \frac{1}{2} \approx 71.$$

**Задача 10.9.** Із тонкої лінзи, оптична сила якої  $\Phi = +2$  дптр, вирізана по діаметру смужка, ширина якої  $h = 1$  мм. Потім частини лінзи були складені щільно разом. У фокальній площині цієї білінзи

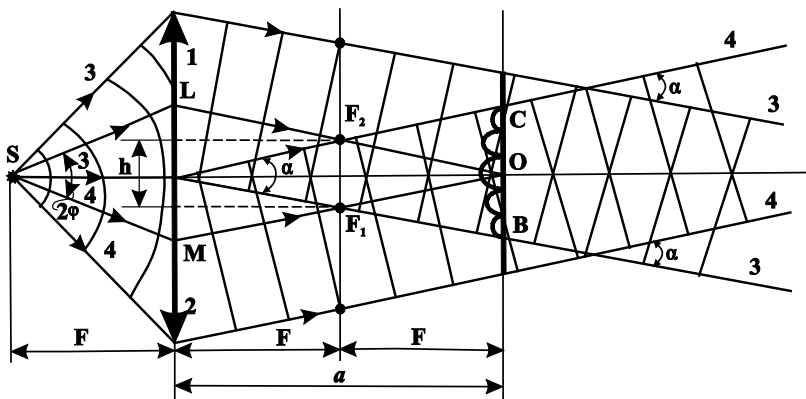


Рис.10.11.

паралельно розрізу розмістили джерело світла  $S$  у вигляді щілини, яка випромінює монохроматичне світло з  $\lambda = 0,5\text{мкм}$ . За білінзою на відстані  $a = 1\text{м}$  від неї розміщений екран. Визначити ширину інтерференційної смуги і кількість смуг, які можна спостерігати в даному випадку. Якою повинна бути ширина щілини, щоб при умовах задачі спостерігалась інтерференційна картина?

**Розв'язок.** Для розв'язку задачі необхідно зробити точний рис.10.11, врахувавши, що лінза з прорізью буде вже мати два фокуси  $F_1$  і  $F_2$ . На цьому рисунку такі позначення:  $F_1$  і  $F_2$  – фокуси половинок лінзи 1 і 2 відповідно. Половинки лінз діють таким же чином як і вся лінза. Білінза в нашій задачі представляє собою дві лінзи із зсунутими на величину  $h$  оптичними осями. Так як джерело світла  $S$  знаходиться у фокальних площинах лінз, то після білінзи буде розповсюджуватись під кутом один до одного два паралельних пучка променів 3 і 4.

Згідно задачі 10.3 (формула 1) ширина інтерференційної смуги

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{F_1 F_2 / F} = \frac{\lambda}{h \Phi}.$$

При цьому враховано, що  $F_1 F_2 = h$ , а  $\Phi = 1/F$ . Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\Delta x = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{10^{-3} \cdot 2} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{м} = 0,25 \text{мм}.$$

Як видно із рис.10.11 ширина інтерференційної картини на відстані  $a$  від білінзи буде дорівнювати основі трапеції  $F_1F_2CB$ . Тобто  $BC = a\alpha = ah/F = ah\Phi = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \text{ м} = 2 \text{ мм}$ . Таким чином на екрані могло би бути

$$N = \frac{BC}{\Delta x} = \frac{2}{0,25} = 8 \text{ смуг.}$$

Так як в центрі інтерференційної картини завжди максимум інтерференції, то симетрично може бути по 3 максимуми. Тому число смуг на екрані в даному випадку буде 7.

Для визначення максимальної ширини щілини, при якій ще можливо спостерігати інтерференційну картину, необхідно використати формулу (10.18). Для цього знайдемо апертуру інтерференції, тобто кут  $LSM = 2\varphi$ . Із трикутника  $LSM$  можемо записати, що

$$2\varphi = \frac{LM}{F} \cdot$$

Із подібності трикутників  $LMO$  і  $F_2F_1O$  легко показати, що  $LM = 2F_1F_2 = 2h$ . Тоді

$$2\varphi = 2h\Phi.$$

Скориставшись формулою (10.18) отримаємо, що максимальна ширина щілини, при якій ще спостерігається інтерференція, буде:

$$b_{max} = \frac{\lambda}{2 \cdot 2h\Phi} = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2} \text{ м} = 0,0625 \text{ мм.}$$

**Задача 10.10.** Кут між дзеркалами Френеля дорівнює  $\alpha = 10'$ . На дзеркала падає світло від щілини, яка знаходиться на відстані  $r = 10 \text{ см}$  від лінії перетину дзеркал (рис.10.12). Довжина світлових хвиль дорівнює  $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ . Світло, яке відбивається від дзеркал, створює інтерференційну картину на екрані, який знаходиться на відстані  $a = 2,7 \text{ м}$  від лінії перетину дзеркал. **а)** Яка відстань між інтерференційними смугами на екрані? **б)** Що відбудеться з інтерференційною картиною на екрані, якщо щілину  $S$  пересунути на відстань  $SS' = 2 \text{ мм}$  так, що її відстань до лінії перетину дзеркал не зменшилась? **в)** Що відбудеться з інтерференційною картиною на екрані, якщо відстань від щілини до лінії перетину дзеркал збільшити удвічі? **г)** Визначити найбільшу

ширину щілини, при якій інтерференційна картина ще може спостерігатись. д) Скільки інтерференційних смуг можна побачити на екрані при умовах задачі?

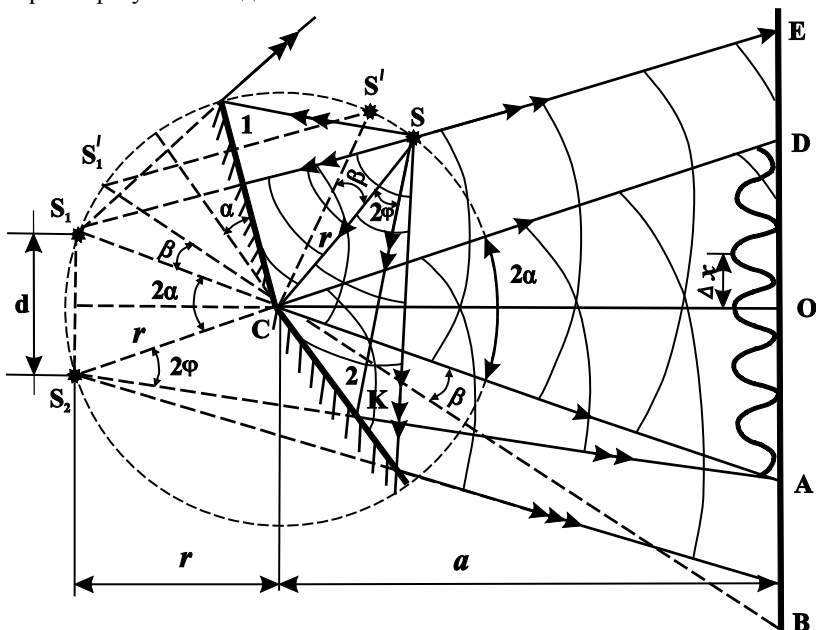


Рис.10.12.

**Розв'язок.** Для отримання інтерференційної картини необхідно накладання двох когерентних хвиль. Ці хвилі отримуються внаслідок відбивання світла щілини  $S$  від дзеркала 1 і дзеркала 2, які перетинаються під кутом  $\alpha$ . Ці хвилі начебто випромінюються двома когерентними джерелами, які є уявними зображеннями щілини  $S$  в дзеркалах 1 і 2. Відстань між джерелами  $S_1'$  і  $S_2'$  дорівнює згідно (10.7) (див. рис.10.12).

$$d = 2\alpha r. \quad (1)$$

При цьому враховано, що кут  $\alpha$  малий і дорівнює  $\pi/1080$  рад. Відстань цих джерел до екрана  $l = r + a$  (рис.4.12).

**а)** Скористаємось формулою для ширини інтерференційної смуги (10.6). Тоді відстань між інтерференційними смугами (рис.10.12)

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda(r+a)}{2\alpha r} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \cdot 2,8 \cdot 1080}{2\pi \cdot 0,1} \text{ м} = 2,89 \text{ мм.}$$

**б)** Якщо щілину  $S$  перемістити по колу, радіус якого  $CS = r$  на величину  $SS'$ , то зображення її в дзеркалах 1 і 2 теж перемістяться на таку ж відстань  $SS'_1 = 2 \text{ мм}$  по цьому ж колу. Це призведе до того, що інтерференційна картина переміститься на екрані на величину  $AB$ . Із трикутників  $S_1S'_1C$  і  $CAB$  отримаємо співвідношення, враховуючи, що кут  $\beta$  малий:

$$\frac{SS'}{r} = \frac{AB}{a}.$$

Звідки знаходимо, що зміщення картини

$$AB = a \frac{SS'}{r}. \quad (2)$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$AB = \frac{2,7 \cdot 2}{100} \text{ м} = 5,4 \text{ см.}$$

**в)** Якщо відстань щілини  $S$  до лінії перетину дзеркал  $C$  збільшиться удвічі, це означає, що відстань між джерелами теж збільшиться удвічі. Це означає, що згідно формули (10.6) відстань між інтерференційними смугами на екрані зменшиться приблизно удвічі без будь-якого зміщення картини. Збільшення відстані  $l = r + a$  незначне.

**г)** Якщо скористатись формулою (2), то отримаємо такий висновок: зміщення смуг інтерференції на екрані, які виникають від лівого краю щілини, по відношенню до смуг картини, які виникають від правого краю щілини, дорівнює

$$A'B' = a \frac{b}{r}, \quad (3)$$

де  $b$  – ширина щілини. Для того, щоб інтерференційна картина розрізнялась на екрані, необхідно, щоб

$$A'B' < \frac{\Delta x}{2}.$$

Тоді із урахуванням (3) отримаємо:

$$b_{\max} = \frac{\Delta x \cdot r}{2a} = \frac{2,89 \cdot 0,1}{2 \cdot 2,7} \text{ мм} = 0,0535 \text{ мм}.$$

Цей же результат можна отримати, якщо скористатись методичними вказівками і визначити апертуру інтерференції. На рис.10.12 апертура інтерференції це кути:  $\angle CSK = \angle CS_2A = 2\varphi$ . Так як кут  $2\alpha$  малий, то і кут  $2\varphi$  теж малий. Тому можемо записати із трикутника  $AS_2D$ , що

$$2\varphi \cong \frac{AD}{r+a} = \frac{2\alpha a}{r+a}.$$

Підставимо це значення апертури інтерференції у формулу (10.18) і отримаємо, що

$$b_{\max} = \frac{\lambda(r+a)}{4\alpha \cdot a} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} \cdot 2,8 \cdot 1080}{4\pi \cdot 2,7} \text{ м} = 0,0535 \text{ мм}.$$

д) Як видно із рис.10.12 ширина інтерференційної картини на екрані дорівнює:

$$2OA = 2\alpha a.$$

Точка О на рис.10.12 є центром інтерференційної картини. Тоді кількість інтерференційних смуг на екрані буде:

$$N = \frac{2\alpha a}{\Delta x} = \frac{2\pi \cdot 2,7 \cdot 10^3}{1080 \cdot 2,89} = 5,43 \text{ смуги}.$$

Це означає, що на екрані буде спостерігатись 5 смуг.

## 10.6.Задачі

**10.11.** Яка буде амплітуда  $A$  коливання, яке є суперпозицією  $N$  некогерентних коливань, які мають однаковий напрямок і однакові амплітуди  $a$ ?

**10.12.** Дві світлові хвилі створюють в деякій точці простору коливання однакового напрямку, які описуються функціями  $a \cos \omega t$  і  $a \cos(\omega t + \Delta\omega t)$ , де  $\Delta\omega = 0,628 \text{ с}^{-1}$ . Як поводить себе інтенсивність світла в цій точці?

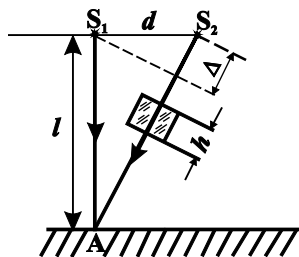
**10.13.** Дві електромагнітні хвилі однакової частоти додаються завжди (тобто при любых фазових співвідношеннях) так, що інтенсивність результуючого коливання дорівнює сумі інтенсивностей коливань, які додаються. В якому випадку це можливо?

**10.14.** Визначити довжину  $l_1$  відрізка, на якому вкладається стільки ж довжин хвиль у вакуумі, скільки їх вкладається на відрізку  $l_2 = 3$  мм у воді.

**10.15.** Який шлях  $l_2$  пройде фронт хвилі монохроматичного світла у вакуумі за той же самий час, за який він проходить шлях довжиною  $l_2 = 1$  м у воді?

**10.16.** На яку величину  $\Delta$  зміниться оптична різниця ходу променів, які інтерферують, при переході від середини однієї інтерференційної смуги до середини сусідньої.

**10.17.** Два когерентних джерела хвиль ( $\lambda = 0,5$  мкм)  $S_1$  та  $S_2$  знаходяться на відстані  $d = 2$  мм один від одного. За два метра від лінії, що з'єднує джерела, знаходиться екран ( $l = 2$  м). Точка А (рис.10.13) розташована так, що промінь  $S_1A$  перпендикулярний до площини екрана.



**Рис.10.13.**

Визначити: 1) що буде спостерігатись в точці А – підсилення чи послаблення хвиль? 2) що буде спостерігатись у точці А, якщо на шляху променя  $S_2A$  перпендикулярно до нього поставити скляну плоско – паралельну пластинку, товщина якої  $10,5$  мкм, а показник заломлення  $1,5$ ?

**10.18.** Антена з двох синфазних вібраторів, відстань між якими  $10$  м, випромінює радіохвилі, довжина хвилі яких  $1$  м. Яка відстань між максимумами напруженості електричного поля в площині, що розташована на відстані  $150$  м від антени?



**10.19.** Для здійснення протилокаційного маскування об'єктів на їх поверхню наносять тонке покриття з магнітодіелектриків, забезпечуючи тим самим інтерференційне послаблення відбитих радіохвиль. Визначити мінімальну товщину покриття спресованого карбонільного заліза ( $\mu = 8$ ;  $\epsilon = 4$ ), нанесеного на об'єкт, який опромінюється радіохвилями з довжиною хвилі 3,2 см.

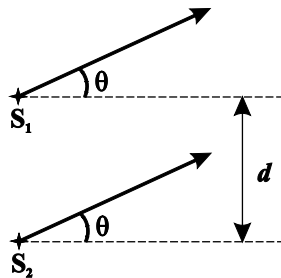
**10.20.** На якій відстані від радіолокаційної станції (РЛС) ціль, що летить на висоті 200 м, попадає в перший інтерференційний максимум поля? Висота антени РЛС 3 м, радіолокатор працює на хвилі, довжина якої 40 см. Яка відстань між першим та другим максимумами напруженості поля у площині, яка знаходиться від антени на тій самій відстані, що і ціль?

**10.21.** Дві однакові радіомачти, відстань між якими  $d = 400$  м, працюють синфазно на частоті  $\nu = 1,5$  МГц. В яких напрямках будуть спостерігатись максимуми випромінювання?

**10.22.** Два джерела, які знаходяться на відстані  $d$  одне від другого, випромінюють електромагнітні хвилі, довжина яких  $\lambda$ , в напрямку кута  $\theta$  до віддаленого приймача (рис.10.14).

1) Визначити різницю фаз коливань в місці розташування приймача. Розглянути два випадки: а) джерела коливаються синфазно? б) коливання джерел зміщені по фазі на  $\varphi_0$ .

2) Визначити залежність інтенсивності результуючого коливання в приймачі від кута  $\theta$  в загальному випадку і при умові, що: а)  $d = \lambda/2$ ,  $\varphi_0 = \pi$  і б)  $d = \lambda/4$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$ . Вважати, що джерела мають однакову потужність, і інтенсивність випромінювання  $I_0$ , яку сприймає приймач у випадку, коли працює тільки одне джерело, відома.



**Рис.10.14.**

3) Знайти приблизний вираз для сумарної інтенсивності коливань в точці знаходження приймача при умові, що відстань між джерелами  $d \ll \lambda$ . Розглянути два випадки: а)  $\varphi_0 = 0$  і б)  $\varphi_0 = \pi$ .

Побудувати відповідні полярні діаграми направленості випромінювання джерел.

**10.23.** У скільки раз збільшиться відстань між сусідніми інтерференційними смугами на екрані у досліді Юнга, якщо зелений світлофільтр ( $\lambda_1 = 500$  нм) замінити на червоний ( $\lambda_2 = 650$  нм).

**10.24.** У досліді Юнга отвори освітлювались монохроматичним світлом ( $\lambda = 600$  нм). Відстань між отворами  $d = 1$  мм, відстань від отворів до екрану  $l = 3$  м. Знайти розташування трьох перших світлих смуг відносно центру інтерференційної картини на екрані.

**10.25.** Яка товщина  $d$  мильної плівки, якщо при спостереженні її у відбитому світлі вона має жовтий колір ( $\lambda = 0,59$  мкм), коли кут між нормаллю до плівки і напрямком спостереження дорівнює  $40^\circ$ ? Показник заломлення мильної плівки 1,33.

**10.26.** Визначити тупий кут біпризми Френеля для схеми на рисунку 10.15, якщо  $r = 60$  см,  $a = 4$  м, довжина хвилі світла  $\lambda = 0,55$  мкм, ширина інтерференційної смуги  $\Delta x = 0,9$  мм.

**10.27.** В досліді Юнга на шляху одного із інтерферуючих променів знаходилась тонка скляна пластинка внаслідок чого центральна світла смуга змістилась у положення, попередньо зайняте п'ятою світлою смугою (не рахуючи центральної). Показник заломлення пластинки 1,5, довжина хвилі  $6 \cdot 10^{-7}$  м. Визначити товщину пластинки.

**10.28.** Пучок лазерного випромінювання з  $\lambda_0 = 632,8$  нм падає нормально на перешкоду з двома вузькими паралельними щілинами. На екрані, який встановлений за перешкодою, спостерігається система інтерференційних смуг. В яку сторону і на яке число смуг зміститься інтерференційна картина, якщо одну із щілин перекрити прозорою пластинкою, товщина якої  $a = 10,0$  мкм і виготовлена вона з матеріалу, який має показник заломлення  $n = 1,633$ ?

**10.29.** Відстань від біпризми Френеля до вузької щілини та екрана відповідно дорівнює  $r = 25$  см і  $a = 100$  см. Біпризма скляна із заломним кутом  $\alpha = 20'$ . Знайти довжину хвилі світла, якщо ширина інтерференційної смуги на екрані  $\Delta x = 0,55$  мм.

**10.30.** На рис.10.15. зображена інтерференційна схема з біпризмою Френеля.

Відстань від джерела світла  $S$  до біпризми  $r = 0,3$  м, відстань від біпризми до екрана  $a = 0,7$  м. Показник заломлення біпризми  $n = 1,5$ . Довжини

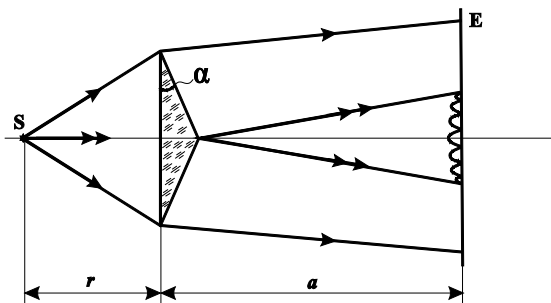


Рис.10.15.

хвилі світла  $\lambda_0 = 500$  нм. Визначити: а) при якому значенні заломного кута призма  $\alpha$  ширина  $\Delta x$  інтерференційних смуг, які спостерігаються на екрані, буде дорівнювати 0,4мм; б) максимальне число смуг, яке можна спостерігати в даному випадку.

**10.31.** Заломний кут біпризми Френеля  $\alpha = 3'26''$ . Між точковим джерелом монохроматичного світла ( $\lambda = 0,500$  мкм) і біпризмою розміщена лінза таким чином, що ширина інтерференційних смуг не залежить від відстані екрана до біпризми. Знайти відстань між сусідніми темними смугами, якщо показник заломлення скла біпризми  $n = 1,5$ . Знайти максимальне число смуг інтерференції  $N$ , яке може спостерігатись в цій установці, якщо екран віддалений від біпризми на відстань  $L = 5$  м.

**10.32.** При якому положенні екрана в установці, що описана в задачі 10.31, буде спостерігатись максимальне число інтерференційних смуг, якщо відстань між вершинами заломних кутів біпризми складає  $l = 4$  см? Визначити це число смуг  $N$ . При якому положенні екрану інтерференційні смуги щезнуть?

**10.33.** На рис.10.16 зображена установка з бідзеркалами Френеля.  $S$  – джерело світла, що представляє собою перпендикулярну до площини рисунка щілину,  $E$  – екран. Відстані  $r = 0,100$  м,  $a = 1,00$  м. Визначити: а) значення кута  $\alpha$  між дзеркалами  $D_1$  і  $D_2$ , при якому для довжини хвилі  $\lambda = 0,500$  мкм ширина інтерференційних смуг на екрані  $\Delta x = 1,00$  мм; б) максимальне число смуг  $N$ , яке можна спостерігати в цьому випадку.

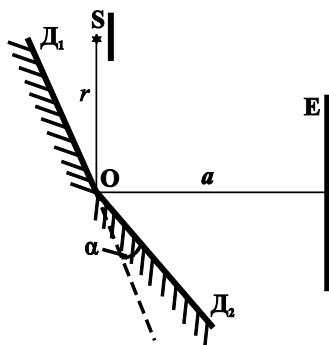


Рис.10.16.

**10.34.** Визначити відстань  $x$  між центром картини і п'ятою світлою смугою в установці із дзеркалами Френеля (рис.10.17). ( $\alpha = 20'$ ,  $r = 10$  см,  $a = 1$  м для  $\lambda = 5890$  Å). Промені, які інтерферують, падають на екран приблизно перпендикулярно.

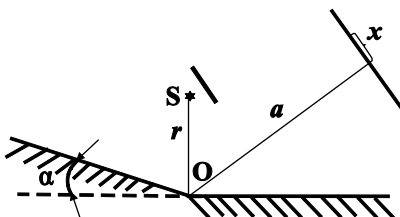


Рис.10.17.

**10.35.** Плоска світлова хвиля падає на бідзеркала Френеля, кут між якими  $\alpha = 2'$ . Визначити довжину хвилі світла, якщо ширина інтерференційної смуги на екрані  $\Delta x = 0,55$  мм.

**10.36.** Із тонкої лінзи, фокусна відстань якої  $F = 50$  см, вирізана центральна частина, ширина якої  $h$ , так, як показано на рис.10.18. Обидві половини лінзи зсунуті до дотику. З однієї сторони лінзи розміщене точкове джерело монохроматичного світла

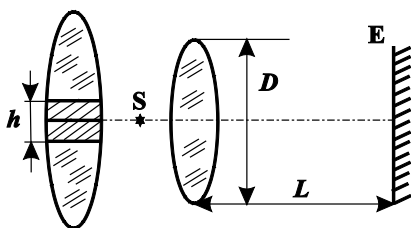


Рис.10.18.

( $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ ) **S** (рис.10.18). З протилежної сторони лінзи розміщений екран, на якому спостерігаються смуги інтерференції. Відстань між сусідніми світлими смугами  $\Delta x = 0,5 \text{ мм}$  і вона не змінюється при переміщенні екрана вздовж оптичної осі. Визначити  $h$ .

**10.37.** При якому положенні екрана в установці, яка описана в задачі 10.36, інтерференційні смуги зникнуть, якщо діаметр лінзи  $D = 6 \text{ см}$ . При якому положенні екрану число інтерференційних смуг буде максимальним і чому буде дорівнювати це число смуг?

**10.38.** Темною чи світлою буде у відбитому світлі мильна плівка, товщина якої  $d = \lambda/10$  ? Плівка знаходиться у повітрі.

**10.39.** При яких товщинах  $d$  плівки зникнуть інтерференційні смуги при освітленні її світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 0,600 \text{ мкм}$ ? Показник заломлення плівки  $n = 1,5$ .

**10.40.** Зимою на склі вікон міського транспорту утворюється плівка льоду, яка надає зеленого відтінку всьому, що видно через вікна. Оцінити, яка найменша товщина цих плівок (показник заломлення льоду прийняти за  $n = 1,33$ ).

**10.41.** На тонку плівку ( $n = 1,33$ ) в повітрі падає нормально паралельний пучок білого світла. При якій товщині плівки відбите світло буде мати найбільше жовтий колір ( $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ )?

**10.42.** Знайти мінімальну товщину плівки з показником заломлення 1,33 у повітрі, при якій світло з довжиною хвилі  $0,64 \text{ мкм}$ , що падає нормально на плівку, зазнає максимального підсилення при відбиванні, а світло з довжиною хвилі  $0,4 \text{ мкм}$  – максимального ослаблення при відбиванні.

**10.43.** Для зменшення втрат світла із-за відбивання від поверхні скла його покривають тонким шаром речовини з показником заломлення  $n' = \sqrt{n}$ , де  $n$  – показник заломлення скла. В цьому випадку амплітуда світлових коливань, які відбиті від обох поверхонь такого шару, будуть однаковими. При якій товщині цього шару в напрямку нормалі до нього відбиття світла не буде? Довжина хвилі світла  $\lambda$ .

**10.43.** На поверхню скляного об'єктива ( $n_1 = 1,5$ ) нанесена тонка плівка, показник заломлення якої  $n_2 = 1,2$  („просвітлююча” плівка). При якій найменшій товщині цієї плівки буде максимальне ослаблення відбитого світла в середній частині видимого спектру?

**10.44.** Плоска світлова хвиля, довжина якої  $\lambda_0 = 0,6$  мкм у вакуумі, падає нормально на прозору плівку з показником заломлення  $n = 1,33$ . При якій товщині  $d$  плівки відбита хвиля буде мати а) максимальну, б) мінімальну інтенсивність?

**10.45.** Плоскопаралельна пластинка з показником заломлення  $n = 1,50$  освітлюється паралельним пучком монохроматичного світла ( $\lambda = 0,59$  мкм). При поступовому збільшенні кута падіння променів  $\alpha$  інтерференційна картина у відбитому світлі змінюється. Відомо, що при зміні кута  $\alpha$  в деякому інтервалі є тільки два значення  $\alpha_1 = 30^\circ$  і  $\alpha_2 = 34^\circ$ , які відповідають максимальній інтенсивності відбитого світла. Визначити товщину пластинки.

**10.46.** Світло, довжина хвилі якого  $\lambda = 0,6$  мкм, падає на тонку мильну плівку під кутом  $\alpha = 30^\circ$ . У відбитому світлі на плівці спостерігаються інтерференційні смуги. Відстань між сусідніми смугами дорівнює  $\Delta x = 4$  мм. Показник заломлення мильної плівки  $n = 1,33$ . Вирахувати кут  $\varphi$  між поверхнями плівки.

**10.48.** На дуже тонку скляну пластинку ( $n = 1,5$ ) нормально падає світло, довжина хвилі якого  $\lambda = 0,58$  мкм. У відбитому світлі спостерігаються інтерференційні смуги. Відстань між сусідніми темними смугами  $\Delta x = 5$  мм. Знайти кут між гранями пластинки.

**10.49.** Поверхні скляного клина ( $n = 1,5$ ) створюють між собою кут  $\varphi = 0,1'$ . На клин нормально до його поверхні падає пучок монохроматичних променів з довжиною хвилі  $0,5$  мкм. Знайти лінійну відстань між смугами інтерференції.

**10.50.** На плоскій скляній поверхні  $BB'$  лежить плоско опукла лінза  $AA'$ , радіус кривизни опуклої поверхні якої  $R$ . Між лінзою та площиною створюється повітряний проміжок  $t$  (рис.10.19). На лінзу нормально падає світло з довжиною хвилі  $\lambda$ . Знайти радіуси кілець (кілець Ньютона) інтерференційної картини, яка виникає.

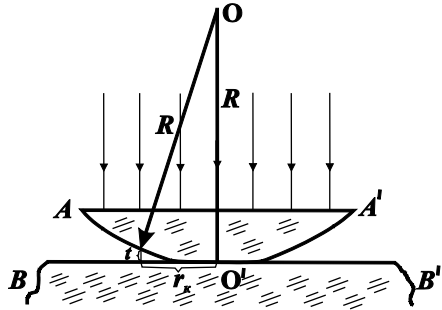


Рис.10.19.

**10.51.** На скляну пластину покладена випуклою стороною плоско-випукла лінза. При нормальному падінні на плоску сторону лінзи червоного світла  $\lambda = 610$  нм) радіус 5-го світлого кільця Ньютона дорівнює  $r_5 = 5$  мм. Визначити: а) радіус кривизни випуклої сторони лінзи; б) радіус  $r_3$  третього світлого кільця.

**10.52.** Відстань між п'ятим і двадцять п'ятим світлим кільцями Ньютона дорівнює  $\Delta l = 9$  мм. Радіус кривизни лінзи  $R = 15$  м. Знайти довжину хвилі монохроматичного світла, що падає нормально на установку. Спостереження ведеться у відбитому світлі.

**10.53.** Чому центр кілець Ньютона, що спостерігаються у відбитому світлі, як правило темний?

**10.54.** Знайти відстань  $\Delta l$  між двадцятим і двадцять першим світлим кільцями Ньютона, якщо відстань між другим і третім кільцем дорівнює 1 мм, а кільця спостерігаються у відбитому світлі.

**10.55.** При спостереженні кілець Ньютона у відбитому синьому світлі ( $\lambda_c = 0,45$  мкм) за допомогою плоско-опуклої лінзи, яка лежить на плоскій пластинці, радіус третього світлого кільця  $r_3 = 1,06$  мм. Після заміни синього світлофільтра на червоний радіус п'ятого світлого кільця  $r_5 = 1,77$  мм. Знайти радіус кривизни лінзи і довжину хвилі червоного світла.

**10.56.** Знайти радіус  $r$  центральної темної плями кілець Ньютона, якщо між лінзою і пластинкою налито бензол ( $n = 1,5$ ). Радіус кривизни лінзи  $R = 1$  м. Показники заломлення лінзи і пластинки однакові. Спостереження ведеться у відбитому жовтому світлі ( $\lambda = 0,589$  мкм).

**10.57.** Кільця Ньютона отримуються між двома плоскоопуклими лінзами, які притиснуті одна до одної своїми опуклими поверхнями. Знайти радіус  $r_k$  ( $k = 5$ -го темного кільця), якщо довжина світлової хвилі дорівнює  $\lambda = 0,589$  мкм, а радіуси кривизни опуклих поверхонь лінз  $R_1 = 1$  м і  $R_2 = 1,2$  м. Спостереження ведеться у відбитому світлі.

**10.58.** Кільця Ньютона отримуються за допомогою плоскоопуклої лінзи, радіус кривизни якої  $R_1 = 1$  м, що покладена на вгнуту сферичну поверхню з радіусом кривизни  $R_2 = 1,2$  м. Кільця спостерігаються у відбитому світлі. Довжина хвилі світла  $\lambda = 0,589$  мкм. Визначити радіус  $r_k$  ( $k = 5$ -го темного кільця).

**10.59.** В деякій інтерференційній установці на шляху білого світла був один раз встановлений червоний, другий раз зелений світлофільтри. Смуга пропускання  $\Delta\lambda$  в обох світлофільтрів однакова. В якому світлі – червоному чи зеленому – число чітких інтерференційних смуг буде більшим?

**10.60.** Показати, що в дослідах Френеля апертура променів, які інтерферують, для точки спостереження  $P$ , що лежить на краю інтерференційного поля, дорівнює  $2\varphi \approx 2\alpha a / (r + a)$ , де  $\alpha$  – кут між дзеркалами,  $r$  – відстань від джерела світла  $S$  до лінії перетину дзеркал,  $a$  – відстань від лінії перетину дзеркал до екрану. Якщо  $a \gg r$ , то  $2\varphi \approx 2\alpha$ , тобто практично апертура інтерференції така ж, як і для центральної області інтерференційного поля.

**10.61.** Знайти апертуру інтерференції для дослідів з біпризмою Френеля.

**10.62.** Джерело світла, діаметр якого  $d = 30$  см, знаходиться від місця спостереження на відстані  $l = 200$  м. У випромінюванні



джерела містяться довжини хвиль в інтервалі від 490 до 510 нм. Оцінити для цього випромінювання: а) час когерентності  $t_{\text{ког}}$ , б) довжину когерентності  $l_{\text{ког}}$ , в) радіус когерентності  $\rho_{\text{ког}}$ , г) об'єм когерентності  $V_{\text{ког}}$ .

**10.63.** Оцінити радіус когерентності  $\rho_{\text{ког}}$  світла, яке приходить від Сонця на Землю. Довжина світлової хвилі  $\lambda = 500$  нм.

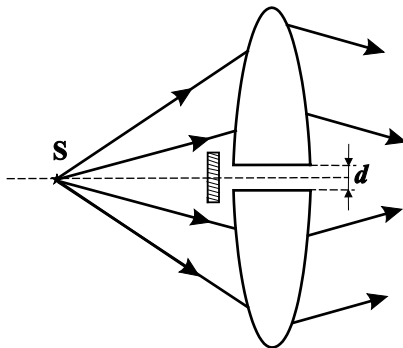
**10.64.** Дротяна рамка, яка розташована вертикально, затянута мильною плівкою. При освітленні плівки зеленим світлом з  $\lambda = 530$  нм і ступенем монохроматичності  $\lambda/(\Delta\lambda) = 1000$  на верхній частині плівки спостерігались інтерференційні смуги однакової товщини. Оцінити товщину плівки.

**10.65.** При освітленні клиноподібної прозорої пластинки зеленим світлом ( $\lambda = 550$  нм) на частині пластинки спостерігається 36 інтерференційних смуг (остання частина пластинки освітлена рівномірно). Яке число смуг буде спостерігатись, якщо освітити пластинку замість зеленого червоним світлом ( $\lambda = 660$  нм), ступінь монохроматичності якого  $\lambda/\Delta\lambda$  в 1,20 раз менша, ніж у зеленого світла?

**10.66.** Плоскопаралельна пластинка з показником заломлення  $n \geq 1$  освітлюється лампою розжарення через червоний фільтр, смуга пропускання якого  $\Delta\lambda \approx 0,2$  нм. Оцінити максимальну товщину пластинки, при якій відбиті промені ще будуть інтерферувати.

**10.67.** Інтерференційні смуги однакової товщини спостерігаються на повітряному клині між двома скляними пластинками з кутом при вершині  $\varphi = 2'$ . Смуги отримуються для світла зеленої лінії ртуті з довжиною хвилі  $\lambda = 546,1$  нм, ширина якої  $\Delta\lambda = 0,5$  Å. Визначити: 1) відстань  $\Delta x$  між двома сусідніми смугами; 2) відстань  $L$  від вершини клина до останньої смуги, яка спостерігалась би, якщо б розміри клина не були обмежені; 3) максимальну кількість смуг  $N$ , яку можна було би побачити при виконанні умови, що приведена в другому завданні.

**10.68.** Промені від джерела світла  $S$  (нитка розжарення) проходять через дві половинки збиральної тонкої лінзи, яку розрізали пополювині і половинки розсунули на відстань  $d$  (рис.10.20.) При цьому на екрані отримуються інтерференційні смуги.



**Рис.10.20.**

а) Пояснити їх походження.

б) Визначити відстань на екрані між темними смугами інтерференції при таких даних: нитка знаходиться на відстані

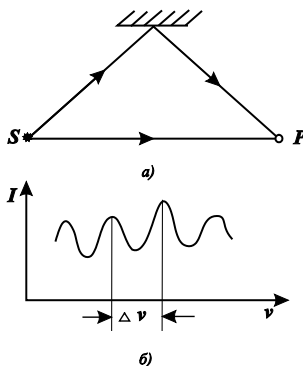
$a = 20$  см від розрізаної лінзи; фокусна відстань лінзи  $F = 10$  см; половинки лінзи розсунуті на відстань  $d = 1$  мм; екран знаходиться на відстані  $l = 450$  см від лінзи; довжина хвилі світла  $\lambda = 0,5$  мкм.

в) Який повинен бути діаметр нитки, щоб на екрані отримувалась інтерференційна картина?

г) Скільки інтерференційних смуг видно на екрані?

**10.69.** Два пучки білого світла від одного джерела приходять в точку  $P$  (рис.10.21, а) з різницею ходу  $\Delta$ . За допомогою спеціального приладу досліджується розподіл енергії в спектрі коливань, які виникають в точці  $P$  при

накладанні двох пучків. Результати досліджень показали, що в точці  $P$  спостерігається по чергово то максимуми, то мінімуми спектральної інтенсивності  $I(\nu)$ . Причому частотна відстань між сусідніми максимумами  $\Delta\nu = 10$  МГц (рис.10.21,б). Визначити різницю ходу  $\Delta$ .



**Рис.10.21.**

**10.70.** Задачу 10.3 розв'язати для випадку, коли біпризма склеїна із двох однакових призм з показниками заломлення  $n_1 = 1,550$  і  $n_2 = 1,568$ .

### Додаткові задачі

**10.71.**

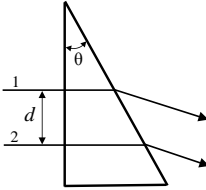


Рис.10.22.

Два паралельні промені 1 і 2, відстань між якими  $d$ , падають на скляну призму, як показано на рис.10.22. Визначити оптичну різницю ходу  $\Delta$  цих променів після заломлення у призмі, якщо її заломлюючий кут  $\theta$ .

**10.72.** На поверхню скляної пластинки ( $n_c = 1,5$ ) нанесли прозору плівку із показником заломлення  $n_{пл} = 1,4$ . При якій найменшій товщині плівки її коефіцієнт відбивання при нормальному падінні зеленого світла ( $\lambda = 560$  нм) буде мінімальним?

**10.73.** На тонкий клин нормально падає світло із ступенем монохроматичності  $\lambda/\Delta\lambda = 100$ . При цьому кількість інтерференційних смуг на поверхні клина, що припадає на одиницю довжини,  $N_1 = 40$  см<sup>-1</sup>. На якій відстані  $l$  від вершини клина зникають інтерференційні смуги?

**10.74.** Тонкий скляний ( $n = 1,5$ ) клин з кутом  $\theta = 15'$  і довжиною  $l = 5$  см опромінують по нормалі через червоний світлофільтр  $\lambda = 650$  нм і спостерігають інтерференційні смуги у відбитих променях. Знайти ширину смуги пропускання фільтра  $\Delta\lambda$ , якщо смуги займають половину поверхні клина.

**10.75.** Ширина смуги частот випромінювання гелій-неонового лазера становить  $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-10}$ , довжина хвилі випромінювання 632,8 нм. Оцінити час та довжину когерентності лазера.

**10.76.** У випромінюванні криптонової лампи, що використовується в еталоні одиниці довжини, оранжева лінія  $\lambda = 605,78$  нм має довжину когерентності  $l_{\text{ког}} = 0,8$  м. Оцінити для цієї лінії час когерентності та її спектральну ширину  $\Delta\lambda$  – інтервал довжин хвиль, що випромінюється.

## 11. ДИФРАКЦІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

### 11.1. Питання теми

1. Дифракція розбіжних променів. Метод зон Френеля. Дифракція від круглого отвору та круглого диска.
2. Дифракція паралельних променів. Дифракція від щілини.
3. Дифракційна решітка та її основні характеристики. Дифракційні спектри.

### 11.2. Основні визначення та формули

1. Радіус зовнішньої границі  $k$ -ої зони Френеля для сферичної хвилі:

$$r_k = \sqrt{k\lambda \frac{ab}{a+b}}, \quad k=0,1,2,3,\dots, \quad (11.1)$$

де  $a$  – відстань від точкового джерела електромагнітної хвилі до діафрагми з круглим отвором,  $b$  – відстань від екрана до діафрагми,  $\lambda$  – довжина хвилі.

2. Радіус зовнішньої границі  $k$ -ої зони Френеля для плоскої хвилі ( $a \rightarrow \infty$ ):

$$r_k = \sqrt{k\lambda b}. \quad (11.2)$$

3. Дифракція Фраунгофера від щілини (світло падає нормально). Умова мінімумів інтенсивності:

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad k = 1,2,3,\dots, \quad (11.3)$$

де  $b$  – ширина щілини,  $\varphi$  – кут дифракції,  $k$  – порядок мінімумів,  $\lambda$  – довжина хвилі світла.

4. Дифракційна решітка, світло падає нормально. Умова головних фраунгоферових максимумів:

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad k = 0,1,2,3,\dots, \quad (11.4)$$

де  $d$  – стала (період) дифракційної решітки,  $\varphi$  – кут дифракції,  $k$  – порядок основного максимуму,  $\lambda$  – довжина хвилі світла,  $d = a + b$ ,  $a$  – непрозора,  $b$  – прозора частини періоду решітки.

**5. Кутова дисперсія дифракційної решітки.**

$$D_{\varphi} = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi}. \quad (11.5)$$

Лінійна дисперсія дифракційної решітки

$$D_l = D_{\varphi} \cdot F, \quad (11.6)$$

де  $F$  – фокусна відстань лінзи, яка проектує спектр на екран.

**6. Роздільна здатність дифракційної решітки**

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = k \cdot N, \quad (11.7)$$

де  $\delta\lambda$  – найменша різниця довжин хвиль двох сусідніх спектральних ліній, які ще розрізняються окремо,  $\lambda$  – середнє значення довжини хвилі цих ліній,  $N$  – загальне число штрихів решітки,  $k$  – порядок спектру.

### **11. 3. Питання на самопідготовку**

1. В чому суть явища дифракції?
2. Сформулювати і пояснити принцип Гюйгенса – Френеля.
3. Пояснити суть методу зон Френеля.
4. Пояснити утворення дифракційної картини від круглого отвору та круглого диску.
5. Застосування методу графічного складання амплітуд для якісного пояснення дифракційної картини.
6. Пояснити явище дифракції Фраунгофера на одній щілині.
7. Що представляє собою дифракційна решітка?
8. Пояснити умову головних фраунгоферових максимумів при дифракції світла на дифракційній решітці.
9. Як визначити максимальний порядок спектру, який може дати решітка?
10. Дати визначення кутової та лінійної дисперсії дифракційної решітки.
11. Як визначається роздільна здатність дифракційної решітки? Чим визначається її величина?

## 11.4. Методичні вказівки

1. Дифракція – це сукупність явищ, які обумовлені хвильовою природою світла та спостерігаються при його поширенні у середовищі з різкими неоднорідностями. У більш вузькому значенні під дифракцією розуміють явище огинання хвилями перешкод, розміри яких порівняльні з довжиною хвилі.

2. Математичне точне розв’язання дифракційних задач на основі хвильового рівняння з граничними умовами, що залежать від характеру перешкод, як правило, складне. Тому застосовують приблизні методи розв’язання таких задач.

3. Розв’язати дифракційну задачу – це знайти відносний розподіл освітленості на екрані в залежності від розмірів та форм перешкод, що спричиняють дифракцію.

4. У випадку дифракції паралельних променів на одній щілині для максимумів не існує такого ж простого співвідношення, як для мінімумів (11.3). Іноді пишуть:

$$b \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}; k = 1, 2, 3, \dots,$$

але це формула неточна, вона дає завищене значення для кута  $\varphi$ . При  $k = 1$  похибка буде біля 5%, при збільшенні  $k$  похибка зменшується.

## 11.5. Приклади розв’язування задач

**Задача 11.1.** На діафрагму з круглим отвором, радіус якого  $r = 1$  мм, падає нормально пучок світла з довжиною хвилі  $\lambda = 0,5$  мкм. На шляху променів, які пройшли через отвір, розташовують екран. Визначити максимальну відстань  $b$  від центра отвору до екрана, при якій у центрі дифракційної картини ще спостерігається темна пляма.

**Розв’язок.** Відстань, при якій буде видно темну пляму, визначається числом зон Френеля, які вміщуються в отвір. Якщо число зон Френеля парне, то в центрі дифракційної картини буде темна пляма. Кількість зон Френеля, що вкладається в отворі

зменшується з віддаленням екрана від отвору. Найменша парна кількість зон дорівнює двом.

Згідно (11.2)

$$r_2 = \sqrt{2b\lambda} = r.$$

звідки

$$b = r^2/(2\lambda) = 1\text{м}.$$

**Задача 11.2.** Плоска монохроматична світлова хвиля, інтенсивність якої  $I_0$ , падає нормально на непрозорий екран з круглим отвором. Яка інтенсивність світла  $I$  за екраном в центрі дифракційної картини, для якого отвір: **а)** дорівнює першій зоні Френеля; **б)** дорівнює внутрішній половині за площею першої зони; **в)** дорівнює першій зоні Френеля, яка закрита наполовину (по діаметру)?

**Розв'язок.** Задачу можна розв'язати якісно, використавши графічний метод додавання амплітуд (спіраль Архімеда, див.рис.11.1). Дія всього хвильового фронту (всіх зон Френеля) визначається модулем вектора  $\overrightarrow{AO}$ , тобто  $|\overrightarrow{AO}| = E_1/2$ , а це означає, що

$$I_0 = AO^2 = E_1^2/4.$$

**а)** Якщо отвір відкриває тільки першу зону Френеля, то дія хвильового фронту в точці спостереження визначається модулем вектора  $\overrightarrow{AB}$ , тобто  $|\overrightarrow{AB}| = E_1$ . Це означає, що інтенсивність в центральній точці на екрані буде:

$$I = AB^2 = E_1^2 = 4I_0,$$

тобто збільшиться в 4 рази.

**б)** В цьому випадку дія хвильового фронту визначається модулем вектора  $\overrightarrow{AC}$ . Із трикутника АОС знаходимо, що

$$AC = \sqrt{2} AO = \frac{\sqrt{2}}{2} E_1.$$

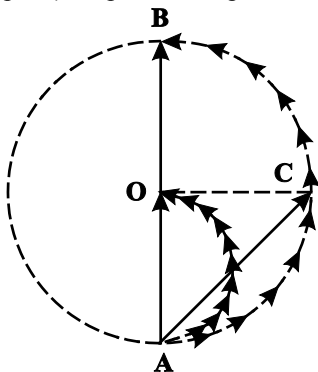


Рис.11.1.



Тоді інтенсивність в центральній точці на екрані буде:

$$I = |\overline{AC}|^2 = \frac{E_1^2}{2} = 2I_0,$$

тобто збільшиться у два рази.

в) Якщо першу зону Френеля закрити по діаметру, то дія в точці на екрані від кожної підзони Френеля зменшиться удвічі, а це означає, що дія хвильового фронту в точці на екрані буде визначатись модулем вектора  $\overline{AO}$ . Тоді інтенсивність в центральній точці на екрані буде

$$I = AO^2 = \left(\frac{E_1}{2}\right)^2 = I_0,$$

тобто буде дорівнювати інтенсивності падаючої хвилі.

**Задача 5.3.** На круглу діафрагму нормально падає паралельний пучок монохроматичного світла, інтенсивність якого  $I_0$  (рис.11.2). За діафрагмою знаходиться екран, на якому спостерігається дифракційна картина. Визначити інтенсивність світла в центрі дифракційної картини (точка Р), якщо: а) радіус діафрагми  $r$  зменшити до  $2/3$  радіуса першої зони Френеля; б) радіус діафрагми  $r$  дорівнює  $0,8536 r_2$ , де  $r_2$  – радіус другої зони Френеля.

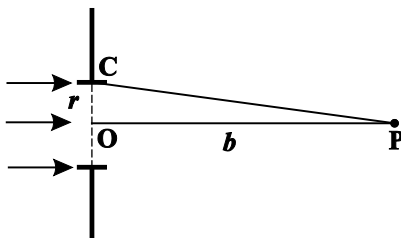


Рис.11.2

**Розв'язок.** Для розв'язання задачі скористаємось векторною діаграмою додавання амплітуд. Для цього необхідно визначити відповідні різниці фаз між коливаннями в центрі дифракційної картини (точка Р, рис.11.2), які збуджуються хвилями, що приходять з центру діафрагми О і її краю С. Різниця ходу між цими хвилями  $\Delta = CP - OP$  (рис.11.2), або

$$\Delta = \sqrt{r^2 + b^2} - b.$$

Якщо врахувати, що  $r \ll b$ , то



$$I_P = 4 I_0.$$

б) Для цього випадку радіус діафрагми повинен дорівнювати

$$r = r_1 + (r_2 - r_1)\alpha, \text{ де } \alpha \in [0,1].$$

Згідно формули (5.2)  $r_2 = \sqrt{2}r_1$  і тоді

$$r = r_1(1 + (\sqrt{2} - 1)\alpha). \quad (4)$$

За формулою (1) різниця ходу в точці  $P$  відповідних хвиль буде:

$$\Delta = \frac{r_1^2}{2b}(1 + (\sqrt{2} - 1)\alpha)^2,$$

а відповідна різниця фаз коливань

$$\Delta\varphi = (1 + (\sqrt{2} - 1)\alpha)^2 \pi. \quad (5)$$

Згідно умови задачі  $r = 0,8536 r_2$  і з формули (4) отримаємо, що  $\alpha = 0,5$ . Тоді  $\Delta\varphi = 1,457\pi = 262,3^\circ$ . В цьому випадку амплітуда коливань в точці  $P$  визначається величиною вектора  $\overrightarrow{AB}$ , який є стороною рівнобедреного трикутника  $ABO$  (рис.11.3). В цьому трикутнику кут  $BOA = 2\pi - \Delta\varphi$ , а  $BO = OA$ . За теоремою косинусів

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos(2\pi - \Delta\varphi),$$

або

$$AB^2 = 2AO^2(1 - \cos \Delta\varphi) = 4AO^2 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Врахувавши, що  $AO^2 = I_0$  і формулу (5), отримаємо:

$$I_P = 4 I_0 \sin^2 \left( (1 + (\sqrt{2} - 1)\alpha)^2 \frac{\pi}{2} \right). \quad (6)$$

Підставимо у формулу (6)  $\alpha = 0,5$  і отримаємо, що

$$I_P = 2,27 I_0.$$

Якщо діафрагма відкриває перші дві зони Френеля ( $\alpha = 1$ ), то за формулою (6)

$$I_P = 4 I_0 \sin^2 \pi = 0.$$

**Задача 11.4.** Лінза, фокусна відстань якої  $F = 50$  см і діаметр  $D = 5$  мм, освітлюється паралельним монохроматичним пучком світла, довжина хвилі якого  $\lambda = 630$  нм (рис.11.4). Знайти, в скільки раз інтенсивність світла  $I$  у фокусі лінзи більша від інтенсивності світла  $I_0$ , що падає на лінзу. Оцінити розмір плями у фокальній площині лінзи.

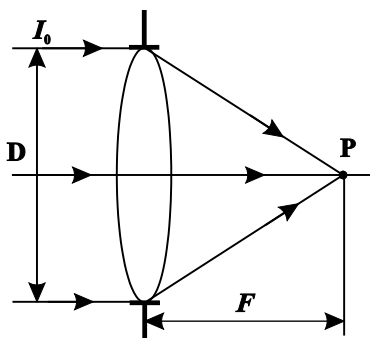


Рис.11.4.

**Розв'язок.** Знайдемо число зон Френеля, яке вміщується в діаметрі лінзи, якщо точка спостереження  $P$  знаходиться у фокусі лінзи. За формулою (11.2) знаходимо, що

$$r_k = \frac{D}{2} = \sqrt{k\lambda F},$$

звідки

$$k = \frac{D^2}{4F\lambda} \approx 1984.$$

Якщо вважати, що лінза працює як фазова зонна пластинка, то амплітуда коливання в точці  $P$  буде:

$$E_P = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_k \approx kE_1$$

де  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ) – амплітуди коливань в точці  $P$ , що створюються хвилями від кожної зони Френеля. Так як

$$I_0 = (E_1/2)^2,$$

то інтенсивність світла в точці  $P$  буде:

$$I = (E_P)^2 = (kE_1)^2 = 4k^2 \cdot I_0 = 1,57 \cdot 10^7 I_0.$$

Тому відношення:

$$\frac{I}{I_0} = 1,57 \cdot 10^7 \text{ раз.}$$

Згідно закону збереження енергії

$$I_0 \cdot \frac{\pi D^2}{4} = I \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$

Звідки знайдемо, що

$$d = D \sqrt{I_0/I} = \frac{2F\lambda}{D} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 6,3 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-2}} = \\ = 1,26 \cdot 10^{-5} \approx 0,013 \text{ мм}$$

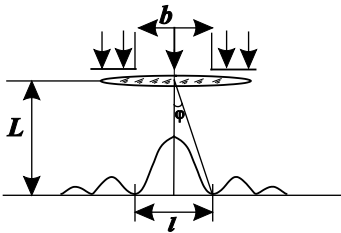
**Висновки.** Треба мати на увазі, що приведені розрахунки носять оціночний характер, так як зроблено ряд припущень:

- 1) лінза представляє собою ідеальну зонну пластинку;
- 2) амплітуди коливань в точці **P**, які збурюються хвилями від кожної зони Френеля однакові, тобто

$$E_1 \approx E_2 \approx E_3 \approx \dots \approx E_{1984}.$$

Це твердження справедливе для малого значення  $k$  ( $k = 1,2,3$ ), а для  $k = 1984$  досить приблизне;

3) не враховується ще ряд особливостей процесу фокусування світла лінзою, розгляд яких виходить за рамки задачі. Проте досвід показує, що хороша лінза добре фокусує сонячне проміння в маленьку пляму, що дає можливість навіть випалювати візерунки по дереву.



**Рис.11.5.**

знаходиться відразу за щілиною. Відстань від екрана до щілини  $L = 1 \text{ м}$ .

**Розв'язок.** Центральний максимум інтенсивності світла займає область між найближчими до нього праворуч та ліворуч мінімумами інтенсивності. Тому прийемо, що ширина центрального максимуму інтенсивності дорівнює відстані між двома мінімумами інтенсивності (рис.11.5). Відстань між двома мінімумами на екрані визначимо безпосередньо із рис.11.5:

#### **Задача 11.5.**

На щілину, ширина якої  $b = 0,1 \text{ мм}$ , нормально падає паралельний пучок світла від монохроматичного джерела ( $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$ ). Визначити ширину центрального максимуму в дифракційній картині, спроектованій на екран за допомогою лінзи, яка

$$l = 2L \operatorname{tg} \varphi.$$

При малих кутах  $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$ , тоді

$$l = 2L \sin \varphi.$$

З урахуванням (11.3)

$$l = \frac{2Lk\lambda}{b}.$$

Для  $k = 1$ ,  $l = 1,2$  см.

**Задача 11.6.** На дифракційну решітку, період якої  $d = a + b = 5$  мкм ( $a$  і  $b$  – непрозора і прозора частини періоду решітки відповідно), нормально падає плоска монохроматична хвиля з довжиною  $\lambda = 0,6$  мкм (у вакуумі). Визначити максимально можливий порядок дифракційного спектру решітки та кількість головних максимумів, що можна спостерігати для випадку, коли  $a + b$ .

**Розв'язок.** Максимальний порядок дифракційного спектру визначається із умови максимуму (11.4). Значення  $\sin \varphi$  не може за модулем перевищувати одиницю, значить

$$d = a + b = k_{\max} \cdot \lambda. \quad (1)$$

Звідки

$$k_{\max} = \frac{a+b}{\lambda}, \quad k_{\max} \approx 8.$$

Однак, такий розв'язок не є точним. Він отриманий для випадку, коли інтенсивність освітленості  $I_\varphi$ , що створюється однією щілиною є постійна і не залежить від кута  $\varphi$ . Але це не так. При деяких кутах  $\varphi$ , які визначаються умовою (11.3),  $I_\varphi$  дорівнює нулю. Значить, знайдене значення  $k_{\max}$  визначає лише максимально можливий порядок спектру, бо не всі головні максимуми (11.4) реалізуються: ті із них, положення яких співпадає з мінімумом дифракційної картини від однієї щілини (11.3), зникають; реалізуються тільки ті головні максимуми, які попадають в центральні та інші максимуми дифракційної картини від однієї щілини. Значить, максимальний порядок головних максимумів визначається із співвідношення (11.3) і (11.4). Тобто

$$d \sin \varphi = (a + b) \sin \varphi = k \lambda, \quad (k=0,1,2,3,\dots)$$

i

$$b \sin \varphi = n\lambda, (n = 1, 2, 3, \dots).$$

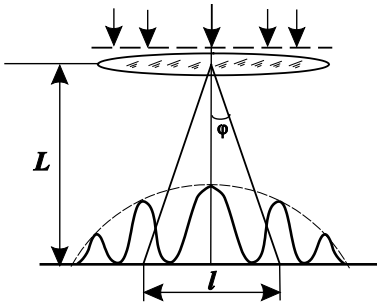
Звідки отримаємо, що

$$\frac{a+b}{b} = \frac{k}{n},$$

або

$$k = 2n.$$

Таким чином мінімуми від дифракції на одній щілині будуть попадати на головні максимуми дифракційної ґратки і останні будуть відсутні в спектрі. Таким чином будуть відсутні 2 – ий, 4 – ий, 6 – ий та 8–ий головні максимуми. Можливо спостерігати 1 – ий, 3 – ий, 5–ий, 7 – мий головні максимуми з однієї сторони спектру від головного максимуму і таку ж кількість максимумів з іншої сторони від центрального максимуму. Значить можна спостерігати 9 головних максимумів. Проте на практиці використовуються тільки головні максимуми дифракційної решітки, які попадають в центральний максимум дифракційної картини від дифракції на одній щілині. Ті головні максимуми, які попадають в область нецентральных максимумів дифракційної картини від однієї щілини, значно поступаються за інтенсивністю від головних максимумів, що попадають в область центрального максимуму дифракції від однієї щілини. Таким чином число  $k$  може дорівнювати  $-1, 0, +1$ . Тобто реально можна спостерігати три головних максимуми дифракційної решітки.



**Рис.11.6.**

**Задача 11.7.** На дифракційну решітку нормально до її поверхні падає паралельний пучок світла з довжиною хвилі  $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ . Розташована біля ґратки лінза проектує дифракційну картину на плоский екран, який віддалений від лінзи на відстань  $L = 1 \text{ м}$ . Відстань між двома

максимумами інтенсивності першого порядку, що спостерігаються на

екрані, дорівнює  $l = 20,2 \text{ см}$  (рис.11.6). Визначити:

- 1) сталу дифракційної решітки;
- 2) число штрихів на 1 см;
- 3) кількість максимумів, яку при цьому дає дифракційна решітка (вважати, що прозора частина періоду  $b = d/3$ );
- 4) максимальний кут відхилення променів, який відповідає останньому дифракційному максимуму.

**Розв'язок. 1)** Згідно (11.4)  $d \sin \varphi = k \lambda$ . В нашому випадку  $k = 1$ . Оскільки

$$\frac{l}{2} \ll L, \text{ то } \sin \varphi \approx \tan \varphi = \frac{l}{2L}.$$

Отже

$$d \cdot l / (2L) = \lambda.$$

Звідки

$$d = 2L\lambda / l = 4,95 \text{ мкм}.$$

2) Число штрихів на 1 см знайдемо за формулою:

$$n = \frac{1}{d} = \frac{1}{4,95 \cdot 10^{-4}} = 2020 \text{ штрихів/см}.$$

3) Згідно формул (11.4) та розв'язку задачі 11.6 максимальний порядок спектру може бути таким:

$$k_{\max} = \frac{d \sin(\pi/2)}{\lambda} = 9,9.$$



Проте будуть відсутні головні максимуми з такими числами  $k$  (див. розв'язок задачі 5.6)

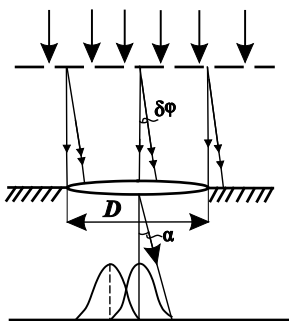
$$k = \frac{d}{b}n = 3n, \text{ де } n=1,2,3,\dots$$

Тобто не спостерігатимуться головні максимуми з числами  $k = 3, 6, 9, 12, \dots$ . Таким чином максимальне значення  $k_{\max} = 8$ . Якщо врахувати ще і центральний максимум, то загальна кількість головних максимумів ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \pm 8$ ) буде:

$$N = 2 \cdot 6 + 1 = 13.$$

4) Для визначення максимального кута відхилення променів використаємо формулу (11.4) і значення  $k = 8$ . Тоді

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{8\lambda}{d}\right) = \arcsin\frac{8 \cdot 0,5}{4,95} = 54^\circ.$$



**Задача 11.8.** Для дифракційної решітки, яка має  $N = 500$  штрихів на 1 мм, межа розрізнення в спектрі першого порядку дорівнює  $\delta\lambda = 0,1$  нм при середній довжині хвилі  $\lambda = 600$  нм. Зображення спектру отримується на екрані за допомогою лінзи (рис.11.7). Визначити мінімальний допустимий діаметр  $D_{\min}$  лінзи, при якому зображення спектру може бути розрізнене.

**Рис.11.7.** **Розв'язок.** Якщо розглядати лінзу як круглу діафрагму, то при дифракції світла на отворі умова мінімуму згідно (11.3) запишеться так:

$$D \sin \alpha = \lambda.$$

Дві спектральні лінії будуть розрізнені, якщо максимум однієї співпадає з мінімумом іншої. Тобто будемо вважати, що  $\delta\varphi = \alpha$ , де  $\delta\varphi$  – кутове розходження ліній після ґратки.

За формулою (11.5)

$$\delta\varphi = \delta\lambda / (d \cos \varphi),$$

а із урахуванням (11.4) при  $k = 1$

$$\delta\varphi = \frac{\delta\lambda}{d\sqrt{1-\lambda^2/d^2}} = \frac{N\delta\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2\cdot N^2}}, \text{ де } d = 1/N.$$

Для малих кутів  $\sin(\delta\varphi) \approx \delta\varphi$ , а тому

$$\sin\alpha = \sin(\delta\varphi) = \lambda/D_{min} = \delta\varphi = N\delta\lambda/\sqrt{1-\lambda^2\cdot N^2}.$$

Звідки отримаємо:

$$D_{min} = \frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2\cdot N^2}}{\delta\lambda\cdot N} = \frac{6\cdot 10^{-7}\cdot\sqrt{1-36\cdot 10^{-14}\cdot 25\cdot 10^{10}}}{10^{-10}\cdot 5\cdot 10^5} = 1,14 \text{ см.}$$

**Задача 11.9.** При якому мініальному числі штрихів дифракційної решітки, період якої  $d = 2,7$  мкм, можна розрізнити компоненти дублету жовтої лінії натрію ( $\lambda_1 = 589,0$  нм і  $\lambda_2 = 589,6$  нм.)? Прозора частина періоду решітки  $b = d/2$ .

**Розв'язок.** Число штрихів  $N$  решітки зв'язано з її роздільною здатністю  $R$  і порядком спектру  $k$  співвідношенням (11.7). Звідки знаходимо, що  $N = R/k$ . Мініальному значенню  $N_{min}$  відповідає мінімальне значення  $R_{min}$  і максимальне число  $k$ , тобто

$$N_{min} = R_{min}/k_{max}. \quad (1)$$

Мінімальна роздільна здатність решітки  $R_{min}$ , яка необхідна для розділення дублету (двох складових) жовтої лінії натрію, виражається через величини  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  за формулою (11.7):

$$R_{min} = \lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (2)$$

Максимально можливе число  $k$  знайдемо із формули (11.4), прийнявши, що  $\sin \varphi = 1$ , а  $\lambda = \lambda_2$ . Тоді

$$k = d/\lambda_2 = 4,58.$$

Так як  $k$  – ціле число, то  $k_{max} = 4$ . Проте, як витікає із розв'язку задачі 11.6, не всі головні максимуми дифракційної ґратки спостерігаються. Якщо  $b = d/2$ , то будуть відсутні максимуми з номерами  $k = 2n$ , де  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Тобто будуть відсутні головні максимуми з номерами,  $k = 2, 4, 6$  і т. д. Таким чином можливий максимальний порядок спектру із числом  $k_{max} = 3$ . Тоді із формули (1) отримаємо, що  $N_{min} = \lambda_1/(3(\lambda_2 - \lambda_1)) = 327$  штрихів.

## 11.6. Задачі

**11.10.** Світло від монохроматичного джерела ( $\lambda = 0,6$  мкм) падає нормально на діафрагму з круглим отвором. Діаметр отвору 6 мм. За діафрагмою на відстані 3 м від неї знаходиться екран.

- 1) Скільки зон Френеля вміщується в отворі діафрагми?
- 2) Яким буде центр дифракційної картини, темним чи світлим?

**11.11.** Вирахувати радіус п'ятої зони Френеля для плоского хвильового фронту ( $\lambda = 0,5$  мкм), якщо побудова робиться для точки спостереження, яка знаходиться на відстані  $b = 1$  м від фронту хвилі.

**11.12.** Між точковим джерелом світла ( $\lambda = 0,5$  мкм) та екраном розміщена діафрагма з круглим отвором, радіус якого  $r = 1$  мм. Відстані від діафрагми до джерела та екрана дорівнюють  $a = 1$  м та  $b = 2$  м відповідно. Як зміниться освітленість екрана у точці, яка лежить проти центра отвору, якщо діафрагму прибрати?

**11.13.** Радіус четвертої зони Френеля для плоского хвильового фронту  $r_4 = 3$  мм. Визначити радіус двадцять п'ятої зони Френеля.

**11.14.** Між точковим джерелом світла та екраном розміщена діафрагма з круглим отвором, радіус якої  $r$  може змінюватись в процесі досліду. Відстані від діафрагми до джерела та екрану дорівнюють:  $a = 100$  см і  $b = 125$  см. Визначити довжину хвилі світла, якщо максимум освітленості у центрі дифракційної картини на екрані спостерігається при  $r_1 = 1$  мм. Наступний максимум спостерігається при  $r_2 = 1,25$  мм.

**11.15.** Точкове джерело світла  $S$ , яке випромінює світло з довжиною хвилі  $\lambda = 0,539$  мкм, розташоване на відстані  $l = 11$  м від екрана, що освітлюється. Між джерелом світла  $S$  і екраном на відстані  $b = 5$  м від екрана розміщена ширма з круглим отвором, діаметр якого дорівнює  $d = 4,2$  мм. Чи є освітленість в центрі дифракційної картини на екрані більшою чи меншою, ніж та, яка буде мати місце, якщо ширму прибрати?

**11.16.** Плоска монохроматична світлова хвиля з інтенсивністю  $I_0$  падає нормально на непрозорий екран з круглим отвором. Яка інтенсивність світла  $I$  за екраном у точці для якої отвір: а) дорівнює першій зоні Френеля; внутрішній половині її площі? б) зробили рівним першій зоні Френеля, а потім закрили його половину (по діаметру)?

**11.17.** Інтенсивність, яка створюється на екрані деякою монохроматичною світловою хвилею при відсутності перешкоди, дорівнює  $I_0$ . Яка буде інтенсивність  $I$  в центрі дифракційної картини, якщо на шляху хвилі поставити перешкоду з круглим отвором, площа якого відкриває: а) півтори центральних зон Френеля; б) третину центральної зони Френеля?

**11.18.** Як зміниться при умові попередньої задачі інтенсивність в точці навпроти центра отвору, якщо половину отвору закрити напівплощиною?

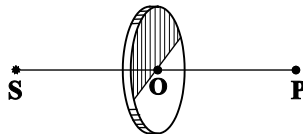
**11.19.** Точкове джерело світла з  $\lambda = 550$  нм розташоване на відстані  $a = 1$  м перед непрозорою перешкодою з отвором, радіус якого  $r = 2,0$  мм. а) Яке мінімальне число  $k_{min}$  відкритих зон Френеля може спостерігатись при цих умовах? б) При якому значенні відстані  $b$  від перешкоди до точки спостереження отримується мінімально можливе число відкритих зон? в) При якому радіусі  $r$  отвору при умовах даної задачі може бути відкритою тільки одна центральна зона Френеля?

**11.20.** Дифракційна картина спостерігається на відстані  $l = 4$  м від точкового джерела монохроматичного світла ( $\lambda = 500$  нм). Посередині між екраном та джерелом світла розміщена діафрагма з круглим отвором. При якому радіусі  $r$  отвору центр дифракційних кілець, що спостерігаються на екрані, буде найбільш темним?

**11.21.** Дифракційна картина спостерігається на відстані  $l$  від точкового джерела монохроматичного світла ( $\lambda = 600$  нм). На відстані  $a = 0,5l$  від джерела розміщена кругла непрозора перешкода, діаметр якої  $D = 1$  см. Знайти відстань  $l$ , якщо перешкода закриває тільки центральну зону Френеля.

**11.22.** Плоска світлова хвиля ( $\lambda = 0,75$  мкм) нормально падає на круглу діафрагму. На відстані  $b = 1$  м від діафрагми паралельно їй знаходиться екран. Яким повинен бути радіус діафрагми, щоб інтенсивність світла в центрі дифракційної картини на екрані дорівнювала інтенсивності світла, яке падає на діафрагму?

**11.23.** Непрозорий екран, який має форму напівдиска, розміщений між точковим джерелом **S** і точкою спостереження **P** таким чином, що точка **O** знаходиться на одній прямій з точками **S** і **P** (рис.11.8). Екран закриває невелике непарне число напівзон Френеля (наприклад три). Яка буде освітленість в точці **P**?



**Рис.11.8.**

**11.24.** Паралельний пучок монохроматичного світла, довжина хвилі якого  $\lambda = 0,6$  мкм, нормально падає на непрозорий екран з круглим отвором, діаметр якого  $D = 1,2$  мм. На відстані  $b_1 = 15$  см за екраном на осі отвору спостерігається темна пляма. На яку мінімальну відстань  $\Delta l$  потрібно зміститись від цієї точки вздовж осі отвору, віддаляючись від нього, щоб в центрі дифракційної картини знову спостерігалась темна пляма?

**11.25.** На щілину, ширина якої  $b = 0,05$  мкм, падає нормально монохроматичне світло ( $\lambda = 0,6$  мкм). Визначити кут  $\phi$  між початковим напрямком пучка світла та напрямком на четверту темну дифракційну смугу.

**11.26.** На вузьку щілину нормально падає монохроматичне світло. Кут  $\phi$ , який відповідає відхиленню пучків світла від початкового напрямку і показує напрямок на другий дифракційний максимум дорівнює  $1^\circ$ . Скільком довжинам хвиль падаючого світла дорівнює ширина щілини?

**11.27.** На щілину, ширина якої  $b = 0,1$  мм, падає нормально монохроматичне світло ( $\lambda = 0,5$  мкм). За щілиною розміщена збиральна лінза, у фокальній площині якої знаходиться екран. Що буде спостерігатись на екрані, якщо кут  $\phi$  дифракції дорівнює 1)  $17'$ ; 2)  $43'$  ?

**11.28.** На щілину, ширина якої  $b = 2$  мм, падає нормально паралельний пучок монохромного світла ( $\lambda = 589$  мкм). Під якими кутами  $\varphi$  будуть спостерігатись дифракційні мінімуми ?

**11.29.** Світло, довжина хвилі якого  $\lambda = 0,5$  мкм, падає на щілину завширшки  $b = 10$  мкм під кутом  $\theta = 30^\circ$  до нормалі. Знайти кутове положення перших двох мінімумів, які розташовані по обидві сторони центрального максимуму.

**11.30.** На щілину падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі  $\lambda$ . Ширина щілини дорівнює  $6\lambda$ . Під яким кутом буде спостерігатись третій дифракційний мінімум?

**11.31.** Оцінити кутову і лінійну ширину центрального максимуму у випадку дифракції Фраунгофера на щілині, ширина якої  $b = 0,1$  мм. Довжина хвилі світла, яке падає на щілину,  $\lambda = 0,50$  мкм, фокусна відстань лінзи, яка дає зображення на екрані, що знаходиться у фокальній площині,  $F = 0,2$  м.

**11.32.** Плоска світлова хвиля (з довжиною хвилі  $\lambda = 0,5$  мкм) падає по нормально на щілину, ширина якої  $b = 0,5$  мкм. На відстані  $a = 1,0$  м паралельно щілині розташований екран. Знайти ширину зображення щілини  $L$  на екрані, розуміючи під цим відстань між першими дифракційними мінімумами, які симетричні відносно головного максимуму.

**11.33.** На щілину, ширина якої  $b = 3,0$  мкм, нормально падає полоска світлова хвиля (з довжиною хвилі  $\lambda = 0,5$  мкм). Визначити кількість максимумів інтенсивності, які спостерігаються у фокальній площині лінзи.

**11.34.** Скільки штрихів на кожен міліметр містить дифракційна решітка, якщо в монохроматичному світлі ( $\lambda = 0,6$  мкм) максимум п'ятого порядку спостерігається під кутом  $\varphi = 18^\circ$ .

**11.35.** На дифракційну решітку, яка містить  $n = 100$  штрихів на 1 мм, падає нормально монохроматичне світло. Зорова труба спектрометра наведена на максимум третього порядку, щоб навести трубу на симетричний максимум того ж порядку її треба повернути на кут  $\Delta\varphi = 20^\circ$ . Визначити довжину хвилі світла.

**11.36.** На дифракційну решітку, період якої  $d = 0,006$  мм, нормально падає монохроматичне світло. Кут між спектрами 1-го і 2-го порядків дорівнює  $\Delta\varphi = 4^\circ 36'$ . Визначити довжину хвилі світла.

**11.37.** Визначити найбільший порядок спектру, який може дати дифракційна решітка, що має 500 штрихів на 1 мм, а довжина хвилі дорівнює 0,59 мкм. Розглянути два випадки: а) світло падає на решітку нормально; б) світло на решітку падає під кутом  $30^\circ$ .

**11.38.** Визначити порядки головних максимумів, які не можуть спостерігатись на дифракційній решітці з періодом  $d = 90$  мкм і шириною однієї щілини  $b = 30$  мкм.

**11.39.** Визначити можливе число головних максимумів, які можуть бути при дифракції плоскої монохроматичної хвилі (з довжиною хвилі  $\lambda$ ) на решітці з періодом  $d = 4,5\lambda$ .

**11.40.** Дифракційна картина монохроматичного світла, що дає дифракційна решітка з періодом  $d = 2,3$  мкм, має три головних максимуми (враховуючи і центральний максимум). Яка ширина щілин цієї решітки?

**11.41.** Чи можуть перекриватись спектри першого і другого порядків дифракційної решітки при освітленні її видимим світлом ( $0,7 \div 0,4$  мкм)?

**11.42.** При якій умові інтенсивність  $k$ -го максимуму для дифракційної ґратки з періодом  $d$  дорівнює нулю, якщо ширина щілини решітки  $b$ .

**11.43.** Визначити довжину хвилі спектральної лінії, зображення якої дає дифракційна решітка в спектрі третього порядку, якщо воно співпадає із зображенням лінії  $\lambda = 486,1$  нм в спектрі четвертого порядку.

**11.44.** На дифракційну решітку падає нормальний пучок світла. Для того, щоб побачити червону лінію ( $\lambda = 700$  нм) в спектрі другого порядку, зорову трубу довелося поставити під кутом  $\varphi = 30^\circ$  до осі коліматора лінзи. Знайти сталу  $d$  дифракційної решітки. Скільки штрихів нанесено на один сантиметр ширини решітки.

**11.45.** На дифракційну решітку нормально падає пучок білого світла. При повороті гоніометра на кут  $\varphi$  у полі зору буде видно лінію з довжиною хвилі  $\lambda = 400$  нм в спектрі третього порядку. Чи будуть спостерігатися під цим же кутом  $\varphi$  інші спектральні лінії видимого світла (від  $\lambda = 400$  нм до  $\lambda = 700$  нм)?

**11.46.** На дифракційну решітку нормально падає монохроматичне світло. Максимум третього порядку спостерігається під кутом  $\varphi = 36^\circ 48'$  до нормалі. Знайти сталу решітки, виразивши її через довжину хвилі падаючого світла.

**11.47.** На дифракційну решітку нормально падає світло з довжиною хвилі  $\lambda_1 = 0,589$  мкм. При цьому спектру третього порядку відповідає кут дифракції  $\varphi_1 = 10^\circ 11'$ . Якій довжині хвилі світла відповідає у другому порядку кут дифракції  $\varphi_2 = 6^\circ 16'$ .

**11.48.** а) На дифракційну решітку, яка має 50 штрихів на 1 мм падає нормально пучок білого світла. Яка різниця кутів відхилення кінця першого і початку другого порядків спектру? Довжини крайніх червоних і крайніх синіх хвиль є 0,76 мкм і 0,40 мкм. б) Яка різниця кутів відхилення кінця другого і початку третього порядків спектру?

**11.49.** Визначити довжину хвилі монохроматичного світла, що падає нормально на дифракційну решітку з періодом  $d = 2,2$  мкм, якщо кут між максимумами першого та другого порядку спектра  $\Delta\varphi = 15^\circ$ .

**11.50.** На плоску дифракційну решітку нормально падає світло жовтої лінії натрію ( $\lambda = 0,589$  мкм). Спектр другого порядку у відбитому світлі спостерігається під кутом  $45^\circ$  до нормалі. Визначити число штрихів решітки на 1 мм.



**11.51.** Визначити кутову дисперсію дифракційної решітки, період якої  $d = 5$  мкм, довжина хвилі  $\lambda = 500$  нм, порядок спектру  $k = 3$ .

**11.52.** Кутова дисперсія дифракційної решітки для довжини хвилі  $6680\text{\AA}$  у спектрі першого порядку дорівнює  $22,2 \cdot 10^5$  рад/м. Знайти період (сталу) дифракційної решітки.

**11.53.** Для якої довжини хвилі дифракційна решітка з періодом  $d = 5$  мкм має кутову дисперсію  $6,3 \cdot 10^5$  рад/м у спектрі третього порядку?

**11.54.** Стала дифракційної решітки дорівнює  $2,5$  мкм. Знайти кутову дисперсію для  $\lambda = 589$  нм у спектрі першого порядку.

**11.55.** 1. Розрахувати кутову дисперсію у кутових секундах/нм в спектрі першого порядку для решітки, що має 3937 штрихів на 1 см.

2. Підрахувати лінійну дисперсію спектрографа з такою решіткою, якщо фокусна відстань об'єктива  $F = 0,5$  м.

3. Підрахувати величину, яка обернена до величини лінійної дисперсії (число нм на 1 мм). При розрахунках вважати, що кути дифракції малі ( $\cos\varphi \approx 1$ ).

**11.56.** Яка відстань між компонентами жовтої лінії натрію ( $\lambda_1 = 5890\text{\AA}$ ,  $\lambda_2 = 5896\text{\AA}$ ) буде на екрані, який знаходиться у фокальній площині об'єктива задачі 11.55.

**11.57.** Чи будуть розрізнені дифракційною решіткою з  $N = 100$  штрихів спектральні лінії з  $\lambda_1 = 598$  нм і  $\lambda_2 = 602$  нм в спектрі а) 1-го; б) 2-го порядку?

**11.58.** 1. Вважаючи, що світло падає на дифракційну решітку нормально, отримати точний вираз для кутової дисперсії  $D_\varphi$  ґратки в залежності від  $\lambda$ .

2. Приймаючи період решітки  $d = 1000$  нм, вирахувати за знайденою формулою кутову дисперсію в спектрі першого порядку біля довжин хвиль: а) 400 нм, б) 480 нм, в) 760 нм.

3. Порівняти отримані результати із значенням  $D_\phi$ , яке розраховується за наближеною формулою  $D_\phi \approx k/d$  ( $k$  – порядок спектру).

**11.59.** 1. Для випадку, коли світло падає на дифракційну решітку нормально, отримати точний вираз для лінійної дисперсії  $D_l$  ґратки в залежності від  $\lambda$ .

2. Приймаючи період решітки  $d = 1000$  нм, а фокусну відстань лінзи  $F = 1,000$  м, вирахувати за знайденою формулою лінійну дисперсію в спектрі першого порядку біля довжини хвиль:

а) 400 нм, б) 580 нм, в) 769 нм.

3. Порівняти отримані результати із значенням  $D_l$  розрахованими за наближеною формулою  $D_l = kF/d$  ( $k$  – порядок спектру).

**11.60.** В спектрографі перпендикулярно до падаючого світлового пучка встановлена дифракційна решітка, період якої  $d = 1$  мкм, а ширина її робочої частини  $l = 100$  мм. Фокусна відстань об'єктива спектрографа  $F = 1$  м. Для першого порядку спектру:

1. Визначити довжину  $\Delta\lambda$  видимого спектру ( $\lambda = 0,4 \div 0,76$  мкм), який отримується на фотопластинці, яка встановлена у фокальній площині об'єктива.

2. Оцінити: а) лінійну дисперсію  $D_l$ , б) роздільну силу  $R$  приладу.

**11.61.** Монохроматичне світло з довжиною хвилі  $\lambda = 0,585$  мкм падає нормально на дифракційну решітку з періодом  $d = 2,5$  мкм, яка містить  $N = 10^4$  штрихів. Визначити кутову ширину дифракційного максимуму другого порядку.

**11.62.** Мінімальне значення кутової дисперсії деякої дифракційної решітки  $D_\phi = 1,266 \cdot 10^{-3}$  рад/нм. Знайти кутову відстань  $\Delta\phi$  між лініями з  $\lambda_1 = 480$  нм і  $\lambda_2 = 680$  нм в спектрі, що дає ця ґратка. Вважати, що світло падає на решітку нормально.

**11.63.** Світло, яке падає на дифракційну решітку нормально, складається із двох різних спектральних ліній, довжини хвиль яких  $\lambda_1 = 490$  нм (голубе світло) і  $\lambda_2 = 600$  нм (рожеве світло). Перший

дифракційний максимум для лінії з довжиною хвилі  $\lambda_1$  спостерігається під кутом  $\varphi_1 = 10^\circ$  відносно нормалі до решітки. Знайти кутову відстань  $\Delta\varphi$  між лініями в спектрі другого порядку.

**11.64.** На якій відстані одна від одної будуть знаходитись на екрані дві лінії ртуті ( $\lambda_1 = 577$  нм та  $\lambda_2 = 579,1$  нм) у спектрі першого порядку, що отриманий за допомогою дифракційної решітки. Фокусна відстань лінзи, яка проектує спектр на екран, дорівнює 0,6 м. Стала решітки 2 мкм.

**11.65.** Яка вийде мінімальна ширина спектральної лінії водню ( $\lambda = 6563$  Å) на екрані спектрографа, якщо в ньому використовується решітка, ширина якої  $l = 3$  см і об'єктив, фокусна відстань якого  $F = 15$  см.

**11.66.** Підрахувати роздільну здатність дифракційної решітки з періодом  $d = 2,5$  мкм і шириною 30 мм в спектрах першого і четвертого порядків.

**11.67.** Чи зміниться роздільна здатність дифракційної решітки при зміні нахилу первинного пучка світла, який падає на неї?

**11.68.** При якій мінімальній кількості штрихів дифракційної решітки з періодом 2,1 мкм можливо розрізнити компоненти дублету жовтої лінії натрію (5890 Å та 5896 Å). Прозора частина періоду решітки дорівнює 0,7 мкм.

**11.69.** Чому дорівнює стала дифракційної ґратки, якщо ця ґратка може розрізняти у першому порядку лінії спектру калію  $\lambda_1 = 4044$  Å та  $\lambda_2 = 4047$  Å. Ширина решітки 3 см.

**11.70.** Дифракційну картину отримали за допомогою дифракційної решітки, ширина якої 1,5 см, а період 5 мкм. Визначити у спектрі якого найменшого порядку цієї картини будуть отримані розрізнені зображення двох спектральних ліній з різницею довжини хвиль 0,1 нм, якщо лінії знаходяться у крайній червоній частині спектру ( $\lambda = 760$  нм)?

**11.71.** Стала дифракційної решітки, ширина якої 2,5 см, дорівнює 2 мкм. Яку різницю довжин хвиль може розрізнити ця

решітка в області жовтих променів ( $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  см) у спектрі другого порядку?

**11.72.** Якою повинна бути мінімальна довжина  $L_{min}$  дифракційної решітки, період якої  $d = 2,0$  мкм, щоб з її допомогою можна було у другому порядку розрізнити дві близькі спектральні лінії  $\lambda_1 = 500,00$  нм і  $\lambda_2 = 500,05$  нм?

### Додаткові задачі

**11.73.** На круглий отвір у непрозорому екрані нормально падає плоска монохроматична хвиля  $\lambda = 600$  нм. Обчислити площу перших трьох зон Френеля в отворі для точки спостереження, яка розташована навпроти центра отвору на відстані  $b = 5$  м від нього.

**11.74.** Паралельний пучок світлових променів із довжиною хвилі 625 нм нормально падає на круглий отвір, діаметр якого 5 мм у непрозорій площині. Яка кількість зон Френеля буде повністю відкритою при спостереженні дифракції пучка з точки, що на відстані 2,5 м від отвору в напрямку падаючих променів? Максимум чи мінімум освітленості спостерігатиметься в цій точці?

**11.75.** На екрані спостерігається дифракційна картина від круглого отвору в непрозорій пластині, що освітлюється монохроматичним точковим джерелом. В отворі вміщується одна зона Френеля. Як зміниться освітленість у центрі картини, якщо пластину прибрати?

**11.76.** На круглий отвір у непрозорій площині, радіус якої  $r = 1$  мм, падає нормально паралельний пучок світла із довжиною хвилі  $\lambda = 500$  нм. На якій максимальній відстані  $b_{max}$  від отвору в центрі дифракційної картини на екрані спостерігатиметься темна пляма?

**11.77.** Точкове джерело світла з довжиною хвилі  $\lambda = 500$  нм розміщено на відстані  $a = 2$  м перед діафрагмою з отвором радіуса  $r = 1$  мм. Що спостерігається в центрі дифракційної картини на екрані, розміщеному від діафрагми на відстані: а)  $b = \infty$ ; б)  $b = 0,5$  м; в)  $b = 0,22$  м?

**11.78.** Токове джерело світла  $S$ , яке випромінює світло з довжиною хвилі  $\lambda = 0,55$  мкм, освітлює екран, що розташований на відстані  $l = 11$  м від джерела  $S$ . Між джерелом світла  $S$  і екраном на відстані  $a = 5$  м від екрана розміщена ширма з круглим отвором, діаметр якого  $d = 4,2$  мм. Як зміниться освітленість в центрі дифракційної картини, якщо ширму прибрати?

**11.79.** Визначити найбільший порядок спектру, який може давати дифракційна решітка, яка має 500 штрихів на 1 мм, якщо довжина хвилі світла дорівнює 0,59 мкм. Розглянути два випадки: а) світло падає на решітку нормально; б) світло падає на решітку під кутом  $30^\circ$ .

**11.80.** Паралельний пучок променів із довжиною хвилі  $\lambda$  падає нормально на щілину, ширина якої  $b = 4\lambda$ . Під яким кутом дифракції  $\varphi$  спостерігається мінімум другого порядку? Яким буде кут дифракції, якщо спостереження проводити в середовищі з показником заломлення  $n = 1,33$ ?

**11.81.** Довжину хвилі  $\lambda$  випромінювання лазера визначають за допомогою дифракції на щілині, ширина якої  $b = 20$  мкм. Дифракційні смуги спостерігаються на екрані, який розміщений у фокальній площині лінзи з фокусною відстанню  $F = 10$  см. Визначити  $\lambda$ , якщо відстань між першими темними дифракційними смугами складає  $\Delta x = 6,3$  мм.

**11.82.** а) На дифракційну решітку, яка має 50 штрихів на 1 мм, падає нормально паралельний пучок білого світла. Яка різниця кутів відхилення кінця першого і початку другого спектрів? Довжини крайніх червоних і крайніх фіолетових світлових хвиль прийняти за 760 мкм і 400 мкм відповідно.

б) Яка різниця кутів відхилення кінця другого і початку третього спектрів?

**11.83.** На дифракційну решітку з постійною  $d = 7$  мкм нормально падає монохроматичне світло. Кут між спектрами 1-го і 2-го порядків складає  $\Delta\varphi = 3^\circ 36'$ . Визначити довжину світлової хвилі.

**11.84.** На щілину, ширина якої  $b = 40$  мкм, падає нормально плоска світлова хвиля з довжиною хвилі  $\lambda = 0,5$  мкм.

Визначити ширину  $\Delta x$  центрального дифракційного максимуму на екрані, що розміщений за щілиною на відстані  $L = 0,8$  м від неї.

**11.85.** Визначити довжину хвилі  $\lambda$  світла, що падає нормально на дифракційну решітку з періодом  $d = 20$  мкм, якщо кутова відстань між головними фраунгоферовими максимумами першого  $m_1 = 1$  і третього  $m_2 = 3$  порядку складає  $\theta = 3^\circ$ .

**11.86.** На дифракційну решітку, що має  $N = 500$  штрихів на міліметр, падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі  $\lambda = 500$  нм. Скільки головних максимумів дифракції можна отримати на екрані за допомогою цієї решітки?

**11.87.** На дифракційну решітку з періодом  $d = 4$  мкм падає нормально випромінювання від водневої газорозрядної трубки. За решіткою розташована лінза з фокусною відстанню  $F = 0,4$  м, у фокальній площині якої розміщений екран. Знайти, на якій відстані  $\Delta x$  одна від одної розташовані на екрані спектральні лінії з  $\lambda_1 = 656$  нм і  $\lambda_2 = 486$  нм у спектрі третього порядку?

**11.88.** Визначити кутову дисперсію  $D_\phi$  дифракційної решітки у спектрі першого порядку для довжини хвилі  $\lambda = 589$  нм, якщо кут дифракції  $\phi = 10^\circ$ .

**11.89.** Період дифракційної решітки  $d = 2,5$  мкм. Визначити кутову дисперсію  $D_\phi$  (рад/мкм) решітки для довжини хвилі  $\lambda = 461$  нм у спектрі першого порядку. Обчислити також лінійну дисперсію  $D_l$  (мм/мкм), якщо спектр проектується на екран лінзою з фокусною відстанню  $F = 1,6$  м.

**11.90.** Період дифракційної решітки  $d = 10$  мкм. Яку найменшу кількість штрихів  $N$  та робочу довжину  $l$  вона повинна мати, щоби розділяти компоненти жовтого дублета натрію з  $\lambda_1 = 589,0$  нм і  $\lambda_2 = 589,6$  нм у спектрі: а) першого; б) другого порядку?

**11.91.** Довжина робочої частини дифракційної решітки  $l = 2$  см, період решітки  $d = 2,5$  мкм. Визначити роздільну здатність  $R$  решітки в спектрі третього порядку. Яка найменша різниця довжин хвиль  $\delta\lambda$  двох ліній, які розділяються у зеленій ділянці спектру ( $\lambda = 550$  нм)?

## 12. ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ТА ЗОВНІШНІЙ ФОТОЕФЕКТ

### 12.1. Питання теми

1. Теплове випромінювання та його закони.
2. Зовнішній фотоэффект. Квантова природа електромагнітного випромінювання. Тиск світла.

### 12.2. Основні визначення та формули

1. Інтегральна характеристика рівноважного випромінювання – об’ємна густина енергії

$$U(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega \quad (12.1)$$

або

$$U(T) = \int_0^{\infty} u(\lambda, T) d\lambda, \quad (12.2)$$

де  $u(\omega, T)$   $u(\lambda, T)$  – диференціальна характеристика випромінювання: спектральна густина променистої енергії – кількість енергії випромінювання в одиниці об’єму, яка приходить на одиничний інтервал частот (довжин хвиль), для частоти  $\omega$  (довжини хвилі  $\lambda$ ) при даній температурі  $T$ . Перехід від функції  $u(\omega, T)$  до функції  $u(\lambda, T)$  здійснюється за допомогою співвідношень:

$$u(\omega, T) d\omega = u(\lambda, T) d\lambda, \\ \omega = 2\pi c / \lambda,$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

2. Інтегральна характеристика випромінювальної здатності тіла (поверхні) – енергетична світність: потік енергії за одиницю часу, яку випромінює одиниця поверхні у всіх напрямках (в межах тілесного кута  $2\pi$ ) для всього інтервалу частот (довжин хвиль)

$$R(T) = \int_0^{\infty} r(\omega, T) d\omega \quad (12.3)$$

або

$$R(T) = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda, \quad (12.4)$$

де  $r(\omega, T)$  ( $r(\lambda, T)$ ) – диференційна характеристика випромінювальної здатності тіла (поверхні) – спектральна густина енергетичної світності, яка характеризує розподіл енергії в спектрі випромінювання за частотами (довжинами хвиль) при даній температурі  $T$ . Між цими функціями існує такий зв'язок:

$$r(\omega, T)d\omega = r(\lambda, T)d\lambda.$$

**3.** Зв'язок між характеристиками випромінювальної здатності тіла та рівноважного випромінювання, які знаходяться в стані термодинамічної рівноваги:

$$R(T) = \frac{c}{4} U(T) \quad (12.5)$$

і

$$r(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T). \quad (12.6)$$

**4.** Закон Кірхгофа:

$$\frac{r'(\omega, T)}{\alpha(\omega, T)} = r(\omega, T), \quad (12.7)$$

де  $r'(\omega, T)$  – спектральна густина енергетичної світності будь якого тіла,  $\alpha(\omega, T)$  – монохроматичний коефіцієнт поглинання даного тіла, тобто правильний дріб, який показує, яка частина випромінювання з частотою  $\omega$ , що падає на поверхню даного тіла, поглинається останнім,  $r(\omega, T)$  – спектральна густина енергетичної світності абсолютно чорного тіла (АЧТ), при температурі, що дорівнює температурі даного тіла.  $r(\omega, T)$  часто позначають як  $f(\omega, T)$ , або  $f(\lambda, T)$  і називають універсальною функцією Кірхгофа.

**5.** Закон Стефана – Больцмана для АЧТ

$$R(T) = \sigma T^4, \quad (12.8)$$

де  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – стала Стефана – Больцмана,  $T$  – температура АЧТ.

Для любого тіла, яке не є АЧТ

$$R'(T) = a(T) \cdot \sigma T^4, \quad (12.9)$$

де  $a(T)$  – коефіцієнт випромінювання, який завжди менший одиниці.

**6.** Формула Віна і закон зміщення Віна:



$$u(\omega, T) = \omega^3 F(\omega/T), \quad (12.10)$$

$$\lambda_m \cdot T = b, \quad (12.11)$$

де  $F(\omega/T)$  – деяка функція відношення частоти до температури,  $\lambda_m$  – довжина хвилі, яка відповідає максимуму функції  $u(\lambda, T)$  або  $r(\lambda, T)$  для АЧТ,  $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м·К – стала величина.

7. Формула Релея – Джінса:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT, \quad (12.12)$$

де  $k$  – стала Больцмана.

8. Формула Планка:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar \omega}{\exp\left\{\frac{\hbar \omega}{kT}\right\} - 1} \quad (12.13)$$

для спектральної густини енергії випромінювання тіла, яке знаходиться в стані термодинамічної рівноваги з АЧТ при температурі  $T$ .

Формула Планка для спектральної густини енергетичної світності АЧТ при температурі  $T$ :

$$r(\lambda, T) = \frac{2\pi \hbar c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left\{\frac{\hbar c}{\lambda kT}\right\} - 1}, \quad (12.14)$$

де  $\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка,  $\hbar = h/(2\pi)$ . Для  $\lambda_m = b/T$  **випромінювальна здатність**  $r(\lambda_m, T) = C'T^5$ , де  $C' = 1,287 \cdot 10^{-5}$  Вт/(м·К<sup>5</sup>).

9. Енергія фотона (кванта світла):

$$W = \hbar \omega = h\nu = hc/\lambda, \quad (12.15)$$

де  $\nu = \omega/(2\pi)$  – лінійна частота світла.

10. Імпульс фотона

$$p = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (12.16)$$

11. Формула Ейнштейна для фотоефекту:

$$h\nu = A + \frac{m_e v_{max}^2}{2}, \quad (12.17)$$

де  $A$  – робота виходу електрона із металу,  $m_e$  – маса спокою електрона,  $v_{max}$  – максимальна швидкість фотоелектронів. Якщо  $v_{max} = 0$ , то  $h\nu_0 = hc/\lambda_0 = A$ , де  $\nu_0$  або  $\lambda_0$  – червона межа фотоефекту.

## 12. Тиск теплового випромінювання

$$p = U(T)/3, \quad (12.18)$$

де  $U(T)$  – об'ємна густина енергії випромінювання.

**13.** Тиск світла, яке падає нормально на поверхню з коефіцієнтом відбивання  $\rho$ , дорівнює

$$p = \frac{I}{c}(1 + \rho) \quad (12.19)$$

або

$$p = U(1 + \rho), \quad (12.20)$$

де  $I$  – енергетична освітленість поверхні (інтенсивність світла), яка вимірюється енергією світла, що падає на одиницю поверхні за одиницю часу,  $U$  – об'ємна густина енергії випромінювання.

У випадку поверхні, яка ідеально (дзеркально) відбиває світло, коефіцієнт відбивання  $\rho = 1$ .

У випадку поверхні, яка ідеально поглинає випромінювання (поверхня абсолютно чорного тіла) коефіцієнт відбивання  $\rho = 0$ .

## 12.3. Питання на самопідготовку

1. Чим відрізняється теплове випромінювання від інших видів випромінювання?

2. Які є характеристики теплового випромінювання?

3. Які є характеристики випромінювальної здатності поверхні тіла?

4. Яке тіло вважається абсолютно чорним (АЧТ).

5. Закон Кірхгофа.

6. Закони випромінювання АЧТ.

7. Формула Релея-Джинса та її практичне застосування.

8. Формула Планка та квантування енергії.

9. Корпускулярна природа світла: енергія та імпульс фотона.
10. Зовнішній фотоефект. Рівняння Ейнштейна для фотоефекту.
11. Яка природа тиску теплового випромінювання.
12. Тиск світла на поверхню.

## 12.4. Методичні вказівки

1. Формули (12.8;12.11;12.12;12.13;12.14) справедливі тільки для АЧТ. Для нечорних тіл замість (12.8) пишуть (12.9)

$$R' = a(T)R = a(T)\sigma T^4,$$

де  $a(T)$  – коефіцієнт випромінювання, який показує, яку частину складає енергетична світність  $R'$  даного тіла від енергетичної світності  $R$  АЧТ при тій же температурі. Коефіцієнт  $a(T)$  залежить від природи тіла і його температури.

Часто коефіцієнт  $a(T)$  замінюють коефіцієнтом поглинання  $\alpha(T)$ , тобто правильним дробом, який показує, яка частина енергії, що випромінюється АЧТ і падає на поверхню даного тіла, поглинається ним. При цьому треба мати на увазі, що рівність  $a(T) = \alpha(T)$  має місце тільки для сірого тіла. Для сірого тіла коефіцієнт поглинання  $\alpha(T)$  не залежить від частоти (довжини хвилі).

2. У фізичній літературі не існує єдиної термінології відносно величин, які характеризують теплове випромінювання. Так, енергетичну світність  $R$  називають ще інтегральною світністю або інтегральною випромінювальною здатністю, або сумарною потужністю випромінювання. Спектральну густину енергетичної світності часто називають випромінювальною здатністю, а монохроматичний коефіцієнт поглинання – поглинальною здатністю.

## 12.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 12.1.** Вивчення спектру випромінювання Сонця показало, що максимум спектральної густини енергетичної світності відповідає довжині хвилі  $\lambda = 5000\text{\AA}$ . Приймавши Сонце за АЧТ, визначити : **а)** енергетичну світність Сонця; **б)** потік енергії, що випромінюється Сонцем; **в)** масу електромагнітних хвиль (всіх довжин), які випромінюються Сонцем за одну секунду.

**Розв'язок.** а) Згідно закону зміщення Віна (12.11) температура поверхні Сонця

$$T = b/\lambda_m,$$

де  $\lambda_m = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . Підставивши це значення температури у закон (12.8), отримаємо енергетичну світність Сонця:

$$R = \sigma(b/\lambda_m)^4 = 6,4 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2.$$

б) Потік енергії  $\Phi$ , який випромінює Сонце, дорівнює добутку енергетичної світності на площу поверхні Сонця  $4\pi R_c^2$ , де  $R_c$  – радіус Сонця (див. додатки 11). Тобто

$$\Phi = 4\pi R_c^2 R = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт};$$

в) Використавши закон пропорційності маси і енергії  $W = mc^2$ , знайдемо, що за одну секунду Сонце випромінює енергію, яка відповідає масі:

$$m = \frac{\Phi \cdot t}{c^2} = \frac{3,9 \cdot 10^{26}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4 \cdot 10^9 \text{ кг}.$$

**Задача 12.2.** Вольфрамова нитка розжарення в радіолампі нагрівається струмом  $I_1 = 1,0 \text{ А}$  до температури  $T_1 = 3000 \text{ К}$ . При якій силі струму нитка нагріється до температури  $T_2 = 3000 \text{ К}$ ? Коефіцієнти випромінювання вольфраму та його питомі опори, що відповідають температурам  $T_1$  і  $T_2$ , дорівнюють:  $a(T_1) = 0,115$ ;  $a(T_2) = 0,334$ ;  $\rho_1 = 25,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ ;  $\rho_2 = 96,2 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ .

**Розв'язок.** При даному тепловому режимі  $P = R'S$ , де  $P$  – потужність, що споживається від джерела енергії;  $S$  – площа поверхні нитки,  $R'$  – енергетична світність вольфраму (формула (12.9)).

За законом Ленца-Джоуля

$$P = I^2 R = I^2 \rho l / S_1,$$

де  $R$  – опір,  $l$  – довжина,  $S_1$  – площа перерізу нитки. За формулою (12.9)

$$R' = a(T)\sigma T^4.$$

Складемо відповідні співвідношення для даних теплових режимів:

$$\frac{I_1^2 \rho_1 l}{S_1} = a(T_1) \sigma T_1^4 S, \quad \frac{I_2^2 \rho_2 l}{S_1} = a(T_2) \sigma T_2^4 S.$$

Із них знаходимо, що

$$I_2 = I_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 \sqrt{\frac{a(T_2) \rho_1}{a(T_1) \rho_2}} = 7,9 \text{ А.}$$

**Задача 12.3.** Коли напруга на кенотроні (електронна лампа) дорівнює  $U_1 = 500 \text{ В}$ , температура аноду досягає  $t_1 = 800^\circ \text{С}$ . Якої величини досягає температура аноду при підвищенні анодної напруги до  $U_2 = 1000 \text{ В}$ . Розглянути два випадки: а) при  $500 \text{ В}$  анодний струм досягає насичення; б) при  $1000 \text{ В}$  ще не настає насичення анодного струму.

**Примітка.** Прийняти до уваги, що при відсутності насичення анодного струму, струм залежить від анодної напруги за законом  $I_a \sim U_a^{3/2}$ .

**Розв'язок. а)** Будемо вважати, що потужність струму, яка виділяється на аноді, витрачається в основному на випромінювання. Тоді буде пропорція:

$$P = I_a U_a \sim \sigma T^4.$$

Так як анодний струм досягає насичення, то можемо записати, що

$$U_1 \sim T_1^4, \quad U_2 \sim T_2^4.$$

Звідки знаходимо, що  $T_2 = T_1 \sqrt[4]{U_2/U_1} = 1288 \text{ К} = 1015^\circ \text{С}$ .

**б)** Для цього випадку складемо наступні співвідношення:

$$I_a U_a \sim U_a^{5/2} \sim \sigma T^4$$

і

$$U_1^{5/2} \sim T_1^4, \quad U_2^{5/2} \sim T_2^4.$$

Звідси знаходимо, що

$$T_2 = T_1 \left( \frac{U_2}{U_1} \right)^{5/8} = 1083 \cdot 2^{5/8} = 1670 \text{ К} = 1397^\circ \text{С}.$$

**Задача 12.5.** В електричній лампі вольфрамовий волосок, діаметр якого  $D = 0,05 \text{ мм}$ , при роботі лампи розжарюється до

$T_1 = 2700\text{K}$ . Через який час після виключення струму температура волоска спаде до  $T_2 = 600\text{K}$ ? Вважати, що волосок випромінює як сіре тіло, коефіцієнт поглинання якого  $a = 0,3$ . Знехтувати всіма іншими причинами втрати тепла. Питома теплоємність вольфраму  $155 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ .

**Розв'язок.** Кількість теплоти, яку випромінює волосок при зміні температури на величину  $dT$ , визначимо як

$$dQ = mcdT = \frac{\pi D^2 l}{4} \rho c dT,$$

де  $l$  – довжина волоска,  $\rho$  – густина вольфраму,  $c$  – його питома теплоємність.

З другої сторони енергетичну світність волоска представимо згідно (12.9) як

$$R' = \frac{dQ}{Sdt} = \alpha \sigma T^4,$$

де  $S = \pi D l$  – площа бічної поверхні волоска. Підставивши вираз для  $dQ$ , отримаємо:

$$\frac{D\rho c dT}{4dt} = \alpha \sigma T^4.$$

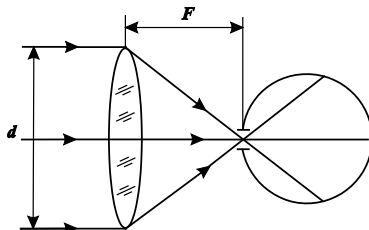
Звідки знайдемо, що

$$dt = \frac{D\rho c}{4\alpha\sigma} \cdot \frac{dT}{T^4}.$$

Цей вираз проінтегруємо і отримаємо, що

$$\begin{aligned} t &= \frac{D\rho c}{4\alpha\sigma} \cdot \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T^4} = \frac{D\rho c}{12\alpha\sigma} \left( \frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3} \right) = \\ &= \frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot 19 \cdot 10^3 \cdot 155}{12 \cdot 0,3 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} \left( \frac{1}{600^3} - \frac{1}{2700^3} \right) = 3,3 \text{ с.} \end{aligned}$$

**Задача 12.6.** Промені Сонця збираються за допомогою лінзи, світлосила якої  $d/F = 0,5$  ( $d$ – діаметр лінзи,  $F$ – її фокусна відстань), на маленький отвір оболонки, стінки якої всередині чорні, а зовні блискучі (дзеркальні) (рис.12.1). Діаметр отвору оболонки менший діаметру зображення Сонця. Визначити температуру  $T$  всередині оболонки. При цьому знехтувати втратами енергії при проходженні променів Сонця через атмосферу і лінзу, а також кількістю тепла, яке проходить через стінки оболонки. Температура поверхні Сонця  $T_c = 6000$  К.



**Розв'язок.** Будемо вважати, що

**Рис.12.1.**

Сонце випромінює як абсолютно чорне тіло. Тоді кількість енергії, що випромінює Сонце у всіх напрямках простору за одиницю часу з урахуванням (12.8) буде:

$$P = \sigma T_c^4 4\pi R_c^2, \quad (1)$$

де  $R_c$ – радіус Сонця.

Якщо нехтувати втратами енергії при проходженні променів Сонця через атмосферу, то кількість енергії, що приходить на одиницю поверхні Землі за одиницю часу дорівнює:

$$R_3 = \frac{P}{4\pi l^2} = \frac{\sigma T_c^4 R_c^2}{l^2}, \quad (2)$$

де  $l$ – середня відстань від Сонця до Землі. Тоді через лінзу проходить енергетичний потік:

$$P_1 = R_3 \frac{\pi d^2}{4}. \quad (3)$$

Згідно формули лінзи зображення Сонця буде мати радіус, який визначається збільшенням лінзи:

$$\Gamma = \frac{F}{l} = \frac{r}{R_c},$$

де  $r$  – радіус зображення Сонця.

Тоді площа зображення Сонця буде:

$$S = \pi r^2 = \pi \left( \frac{R_c F}{l} \right)^2. \quad (4)$$

В оболонку через отвір з площею  $S_1$  попадає потік, менший потоку, що проходить через лінзу, а саме:

$$P_2 = \frac{P_1}{S} S_1. \quad (5)$$

Коли температура оболонки установиться, то отвір оболонки буде випромінювати потік

$$P_3 = \sigma T^4 S_1. \quad (6)$$

де  $T$  – температура всередині оболонки.

Прирівняємо формули (5) і (6) і використаємо формули (2), (3) і (4). Тоді

$$\sigma T^4 S_1 = \frac{\sigma T_c^4 R_c^2 \pi d^2 l^2}{4 l^2 \pi R_c^2 F^2} S_1.$$

Звідки отримаємо, що

$$T = T_c \sqrt{\frac{d}{2F}} = 3000 \text{ K}.$$

**Задача 12.7.** Знайти середню енергію електромагнітного коливання  $\langle W \rangle$  при  $T = 3000 \text{ K}$  (температура нитки лампи розжарювання) для довжин хвиль: 500 мкм, 50 мкм, 5 мкм і 0,5 мкм. Порівняйти знайдене значення  $\langle W \rangle$  із значенням  $W_T = kT$  (енергія теплового руху).

**Розв’язок.** У формулі Релея-Джінса (12.12) середнє значення енергії електромагнітного коливання

$$\langle W \rangle_{P-D} = kT = 8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 3000 \text{ eB} = 0,259 \text{ eB}.$$

У формулі Планка (6.13) середнє значення енергії електромагнітного коливання

$$\langle W \rangle = \frac{\hbar \omega}{\exp\left\{\frac{\hbar \omega}{kT}\right\} - 1} = \frac{hc/\lambda}{\exp\left\{\frac{hc}{kT\lambda}\right\} - 1}.$$

Підставивши числові значення сталих величин, отримаємо робочу формулу:

$$\langle W \rangle = \frac{1,24/\lambda}{\exp\left\{\frac{4,8}{\lambda}\right\} - 1} \text{ eB},$$

де довжина хвилі  $\lambda$  визначається в мкм. Розрахунки приведені в таблиці нижче.

Як видно із таблиці для області великих довжин хвиль  $W_T = kT$  практично співпадає із значенням  $\langle W \rangle$ , розрахованим за квантовою формулою.



$\lambda_{\text{,мкм}}$	500	50	5	0,5
$\langle W \rangle, \text{eB}$	0,257	0,246	0,154	$1,7 \cdot 10^{-4}$
$\langle W \rangle / (kT)$	0,99	0,95	0,60	$6,5 \cdot 10^{-4}$

**Задача 12.8.** Джерелом випромінювання Сонця у метровому діапазоні довжин хвиль є корона. Визначити потік радіовипромінювання від Сонця на Землю в смузі частот, ширина якої 1 МГц, вважаючи, що це випромінювання є тепловим. Ефективна температура випромінювання корони  $T \cong 10^6$  К.

**Розв'язок.** Випромінювання розглядається в метровому діапазоні довжин хвиль, тому використовуємо формулу Релея - Джинса (12.12), з допомогою якої і (12.6) знайдемо, що

$$r(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT.$$

Енергетична світність в смузі частот  $d\omega$  буде:

$$dR = \frac{\omega^2 kT}{4\pi^2 c^2} d\omega.$$

В цій смузі частот Сонце випромінює енергію

$$d\Phi = dR \cdot 4\pi R_c^2,$$

а на одиницю поверхні Землі припадає потік енергії:

$$d\Phi_1 = \frac{d\Phi}{4\pi l^2},$$

де  $R_c$  – радіус Сонця,  $l$  – середня відстань від Сонця до Землі (додатки 11). Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} d\Phi_1 &= \frac{\omega^2 kT d\omega}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{4\pi R_c^2}{4\pi l^2} = \frac{4\pi kTR_c^2}{4\pi^2 c^2 \lambda^2} \left(\frac{R_c}{l}\right)^2 2\pi d\nu = \\ &= \frac{2\pi kT}{\lambda^2} \left(\frac{R_c}{l}\right)^2 d\nu = \frac{2\pi \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^6}{1^2} \left(\frac{6,95 \cdot 10^8}{1,495 \cdot 10^{11}}\right)^2 \cdot 10^6 = \\ &= 1,87 \cdot 10^{-15} \text{ Вт/м}^2. \end{aligned}$$

**Задача 12.9.** На екрані отриманий спектр випромінювання від позитивного кратера вольтової дуги, температура якого 4000 К. Визначити відношення між потужностями випромінювання, які

падають на ділянки екрану, що відповідають довжинам хвиль від 0,695 мкм до 0,705 мкм (ділянка червоного світла) і від 0,395 до 0,405 мкм (ділянка фіолетового світла). Вважати, що кратер випромінює як АЧТ. Поглинання в склі і в повітрі однакове як для червоних так і для фіолетових променів.

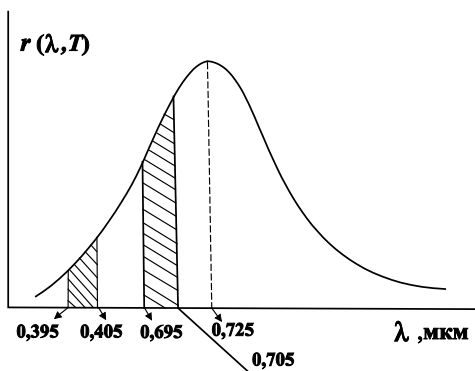


Рис.12.2.

**Розв’язок.** Максимум випромінювання кратера приходить на довжину хвилі, яку знайдемо за допомогою закону Віна (12.11):

$$\lambda_m = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^3} \text{ м} = 0,725 \text{ мкм.}$$

Схематичний графік випромінювальної здатності кратера приведений на рис.12.2. Із графіка видно, що відношення потужностей випромінювання:  $\frac{\Delta R_1}{\Delta R_2} = \frac{r(\lambda_1, T) \Delta \lambda_1}{r(\lambda_2, T) \Delta \lambda_2}$ , де

$$\lambda_1 = (0,705 + 0,695)/2 = 0,7 \text{ мкм}, \Delta \lambda_1 = 0,705 - 0,695 = 0,01 \text{ мкм},$$

$$\lambda_2 = (0,405 + 0,395)/2 = 0,4 \text{ мкм}, \Delta \lambda_2 = 0,405 - 0,395 = 0,01 \text{ мкм}.$$

Так як  $\Delta \lambda_1 = \Delta \lambda_2$ , то

$$\frac{\Delta R_1}{\Delta R_2} = \frac{r(\lambda_1, T)}{r(\lambda_2, T)}.$$

Скориставшись формулою (12.14), знаходимо, що

$$\frac{\Delta R_1}{\Delta R_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 \cdot \frac{\exp\left\{\frac{hc}{kT\lambda_2}\right\} - 1}{\exp\left\{\frac{hc}{kT\lambda_1}\right\} - 1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 \cdot \frac{\exp\left\{\frac{3,6}{\lambda_2}\right\} - 1}{\exp\left\{\frac{3,6}{\lambda_1}\right\} - 1} = 2,9.$$

**Задача 12.10.** Всередині сонячної системи на такій же відстані  $l$  від Сонця, як і Земля, знаходиться частинка сферичної форми. Вважаючи, що Сонце випромінює, як абсолютно чорне тіло з температурою  $T_c = 6000$  К і, що температура частинки у всіх її точках однакова, визначити її температуру виходячи із наступних припущень: **а)** частинка має властивості сірого тіла; **б)** частинка поглинає і випромінює тільки промені з довжинами хвиль, які близькі до  $\lambda = 0,5$  мкм (зелена область спектру); **в)** частинка поглинає і випромінює тільки промені з довжинами хвиль, які близькі до  $\lambda = 5$  мкм (інфрачервона область спектру)

**Аналіз.** Якщо частинка має властивості сірого тіла, то її поглинальна здатність  $\alpha(\lambda, T) = a = \text{const} < 1$ . Згідно закону Кірхгофа (6.7) її випромінювальна здатність  $r'(\lambda, T) = ar(\lambda, T)$ , де  $r(\lambda, T)$  – випромінювальна здатність (спектральна густина енергетичної світності) абсолютно чорного тіла, що визначається формулою Планка (12.14). Для інтегральної енергетичної світності сірого тіла має місце співвідношення:

$$R'(T) = aR(T),$$

де  $R(T)$  визначається за формулою (12.8).

**Розв'язок.** **а)** Скориставшись формулою (2) задачі 12.6, можемо записати, що потужність випромінювання Сонця, яка поглинається частинкою, дорівнює:

$$P_1 = a \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\sigma T_c^4 R_c^2}{l^2}, \quad (1)$$

де  $d$  – діаметр частинки,  $R_c$  – радіус Сонця,  $l$  – середня відстань від Сонця до Землі (додатки 11),  $a$  – коефіцієнт поглинання.

Потужність випромінювання частинки у всіх напрямках дорівнює згідно (12.9):

$$P_2 = \pi d^2 \cdot \sigma T^4, \quad (2)$$

де  $\pi d^2$  – площа поверхні частинки.

При рівновазі:

$$P_1 = P_2$$

$$i \quad T = T_c \sqrt{\frac{R_c}{2l}} = 290 \text{ K} = 17^\circ \text{C}.$$

**б)** Потужність випромінювання Сонця, яка поглинається частинкою для фіксованої довжини хвилі, з урахуванням формули (2) задачі 12.6 дорівнює:

$$P_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot r(\lambda, T_c) \cdot \Delta\lambda \cdot \frac{R_c^2}{l^2}, \quad (3)$$

де  $r(\lambda, T_c)$  – визначається формулою (12.14),  $\Delta\lambda$  – вузький спектральний інтервал біля довжини хвилі  $\lambda$ . Потужність, яку випромінює частинка, дорівнює:

$$P_2 = \pi d^2 \cdot r(\lambda, T) \cdot \Delta\lambda. \quad (4)$$

При рівновазі

$$P_1 = P_2$$

$$i \quad r(\lambda, T_c) \cdot \frac{R_c^2}{4l^2} = r(\lambda, T). \quad (5)$$

Підставимо формулу (12.14) в рівність (5) і отримаємо :

$$\left( \exp\left\{ \frac{hc}{kT_c\lambda} \right\} - 1 \right) \frac{4l^2}{R_c^2} = \exp\left\{ \frac{hc}{kT\lambda} \right\} - 1. \quad (6)$$

Врахуємо, що  $\exp\left\{ \frac{hc}{kT_c\lambda} \right\} = \exp\{4,8\} = 121 \gg 1$  і тим більше

$\exp\left\{ \frac{hc}{kT\lambda} \right\} \gg 1$ , так як  $T < T_c$ .

Це означає, що рівність (6) можемо переписати так:

$$\exp\left\{ \frac{hc}{kT\lambda} \right\} = \frac{4l^2}{R_c^2} \exp\left\{ \frac{hc}{kT_c\lambda} \right\}. \quad (7)$$

Звідки після логарифмування лівої і правої частин рівності (7) знаходимо, що

$$T = \left( \frac{1}{T_c} + \frac{2k\lambda}{hc} \ln \frac{2l}{R_c} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Підставимо в формулу (8) числові значення фізичних констант, величин  $l$ ,  $R_c$ ,  $\lambda = 0,5$  мкм і тоді отримаємо, що

$$T \approx 1700 \text{ K} = 1427^\circ \text{C}.$$

**в)** Якщо у формулу (8) підставити значення  $\lambda = 5$  мкм, то

$$T = 228 \text{ K} = -45^\circ \text{C}.$$

Така різка відмінність результатів у пунктах б) і в) частково можна пояснити тим, що енергія кванта випромінювання для  $\lambda = 0,5$  мкм дорівнює  $\varepsilon_1 = 2,48$  еВ, а для  $\lambda = 5$  мкм  $\varepsilon_2 = 0,248$  еВ. Тобто у випадку б) частинка отримує більше енергії від Сонця, ніж у випадку в).

**Задача 12.11.** Знайти частоту  $\nu$  світла, яке вириває з металу електрони, що повністю затримуються різницею потенціалів  $U = 3$  В. Фотоефект починається при частоті світла  $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$  Гц. Визначити роботу виходу  $A$  електрона з металу.

**Розв'язок.** Оскільки фотоефект починається при частоті  $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$  Гц, то згідно (12.17) робота виходу електрона  $A = h\nu_0 = 2,4$  еВ.

Для того, щоб затримати електрони, які вилітають із металу, необхідно прикласти різницю потенціалів  $U$  таку, щоб

$$eU = \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

З урахуванням формули (12.17) отримаємо, що

$$\nu = \frac{A + eU}{h} = 13,2 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

**Задача 12.12.** В1916 р. Р. Міллікеном при дослідженні фотоефекту з поверхні натрію були отримані такі дані (див.табл.):

$\nu \cdot 10^{-14}, \text{ Гц}$	5,49	6,92	7,41	8,22	9,60	11,83
$U, \text{ В}$	0,47	1,02	1,20	1,60	2,13	3,02

Тут  $\nu$  – частота світла,  $U$  – напруга затримки. Використовуючи ці дані, визначити: а) значення сталої Планка  $h$ ; б) роботу виходу  $A$  електрона із натрію.

**Розв'язок.** Перепишемо рівняння Ейнштейна для фотоэффекту (12.17) в такому вигляді:

$$h\nu = A + |e|U,$$

де  $|e|U = \frac{mv_{\max}^2}{2}$ , а  $U$  – напруга затримки, це така напруга між анодом і катодом, яка затримує і перешкоджає долітати до анода електронам

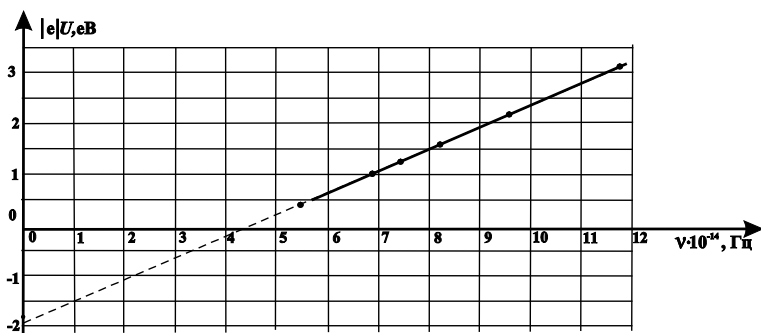


Рис.12.3.

із максимальними швидкостями. З цього рівняння видно, що залежність між  $U$  і  $\nu$  є лінійна. А тому  $h = |e| \cdot \Delta U / \Delta \nu$  і  $A = |e|U$  при  $\nu = 0$ .

Для знаходження невідомих величин необхідно побудувати графік  $|e|U = f(\nu)$ , який представлений на рисунку 12.3. Із графіка знаходимо нахил прямої лінії:

$$h = \frac{\Delta(|e|U)}{\Delta \nu} = \frac{2,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6 \cdot 10^{14}} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 6,67 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

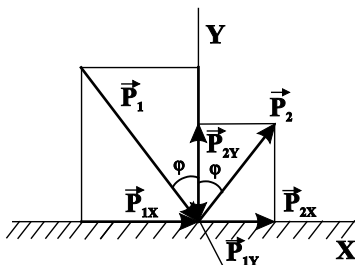
і точку перетину прямої лінії з віссю ординат ( $eU$ ) при  $\nu = 0$ , ордината якої дорівнює роботі виходу  $A$ :

$$A = |-1,8| \text{ eВ} = 1,8 \text{ eВ}.$$

**Задача 12.13.** Короткий імпульс світла з енергією  $W = 7,5$  Дж, що має вид майже паралельного пучка, падає на

дзеркальну пластину з коефіцієнтом відбивання  $\rho = 0,60$ . Кут падіння  $\varphi = 30^\circ$ . Визначити за допомогою корпускулярних уявлень імпульс, який передається пластинці.

**Розв'язок.** Імпульс світла  $\vec{p}_1$ , який падає на поверхню, за величиною згідно (12.16) дорівнює  $W/c$ . Розкладемо його на дві складові (рис.12.4): нормальну  $p_{1Y} = -p_1 \cos \varphi$  і дотичну



(тангенційну) до поверхні  $p_{1X} = p_1 \sin \varphi$ . В результаті відбивання нормальна складова відбитого імпульсу  $\vec{p}_2$  буде:

$$p_{2Y} = \rho |p_{1Y}| = \rho p_1 \cos \varphi,$$

а тангенційна складова –

$$p_{2X} = \rho |p_{1X}| = \rho p_1 \sin \varphi.$$

Рис.12.4.

Зміна складових імпульсу при

відбиванні буде:

$$\Delta p_Y = p_{2Y} - p_{1Y} = \rho p_1 \cos \varphi + p_1 \cos \varphi = p_1 (1 + \rho) \cos \varphi.$$

$$\Delta p_X = p_{2X} - p_{1X} = \rho p_1 \sin \varphi - p_1 \sin \varphi = p_1 (\rho - 1) \sin \varphi.$$

Тоді зміна імпульсу світла при його відбиванні від пластинки визначиться як:

$$\Delta p = \sqrt{\Delta p_X^2 + \Delta p_Y^2} = \sqrt{p_1^2 (\rho - 1)^2 \sin^2 \varphi + p_1^2 (1 + \rho)^2 \cos^2 \varphi}.$$

Після нескладних перетворень, отримаємо, що

$$\Delta p = \frac{W}{c} \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos 2\varphi} = 35 \text{ нН} \cdot \text{с}.$$

Так як система імпульс світла і пластинка є замкнутою, то сумарний імпульс такої системи зберігається. Це означає, що

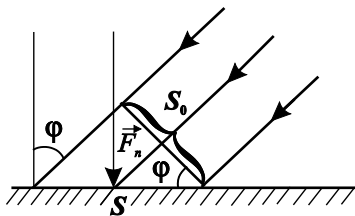
$$\vec{\Delta p} + \vec{\Delta p}' = 0,$$

де  $\vec{\Delta p}'$  імпульс який отримала пластинка. За величиною  $|\vec{\Delta p}| = |\vec{\Delta p}'|$ .

Тому імпульс, який переданий світлом пластинці, дорівнює

$$\Delta p' = 35 \text{ нН} \cdot \text{с}.$$

**Задача 12.14.** Паралельний пучок світла, інтенсивність якого  $I = 0,5 \text{ Вт/см}^2$ , падає під кутом  $\varphi = 60^\circ$  на плоске дзеркало, коефіцієнт відбивання якого  $\rho = 0,90$ . Визначити за допомогою корпускулярних уявлень значення нормального тиску, яке здійснює світло на поверхню дзеркала.



**Рис.12.5.** де  $F_n$  – нормальна складова сили, яка діє на поверхню  $S$  дзеркала (рис.12.5). За другим законом Ньютона

$$\Delta p_n = F_n \cdot \Delta t, \quad (2)$$

де  $\Delta p_n$  нормальна складова імпульсу, який надається дзеркалу фотонами світла при відбиванні за час  $\Delta t$ . Згідно розв'язку попередньої задачі 12.13

$$\Delta p_n = \Delta p_y = \frac{W}{c} (1 + \rho) \cos \varphi. \quad (3)$$

Інтенсивність світла – це кількість енергії, що приходить на одиничну площадку, яка нормальна до напрямку розповсюдження світла, за одиницю часу. Тобто

$$I = \frac{W}{S_0 \Delta t}. \quad (4)$$

Із формул (1), (2), (3) отримаємо, що

$$p = \frac{W}{S c \Delta t} (1 + \rho) \cos \varphi.$$

Так як  $S = S_0 / \cos \varphi$  (див. рис. 12.5), то

$$\begin{aligned} p &= \frac{I}{c} (1 + \rho) \cos^2 \varphi = \frac{0,5 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^8} 1,9 \cdot \frac{1}{4} \text{ Па} = \\ &= 8 \cdot 10^{-6} \text{ Па} = 8 \text{ мкПа} = 8 \cdot 10^{-11} \text{ атм.} \end{aligned}$$



**Задача 12.15.** Визначити діаметр сферичної космічної частинки, якщо сили світлового тиску і притягання до Сонця, які діють на неї, взаємно врівноважуються. Частинка складається із заліза. Температура поверхні Сонця  $T_c = 6000$  К.

**Розв'язок** На частинку діють дві сили:

1) сила гравітаційного притягання до Сонця, яка дорівнює:

$$F_1 = G \frac{\pi d^3}{6} \cdot \frac{\rho M_c}{l^2}, \quad (1)$$

де  $M_c$  – маса Сонця,  $l$  – відстань від частинки до центру Сонця,  $\rho$  – густина заліза,  $d$  – діаметр частинки;  $G$  – гравітаційна стала.

2) сила світлового тиску зі сторони Сонця визначається формулою (12.19) і площею перерізу частинки по діаметру -  $\pi d^2/4$ . Енергетична світність на відстані  $l$  від Сонця визначається формулою (2) із задачі 12.6. Тоді сила світлового тиску на частинку, якщо вважати її абсолютно чорною, буде:

$$F_2 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\sigma T_c^4 R_c^2}{cl^2}. \quad (2)$$

При рівновазі  $F_1 = F_2$ . Використавши табличні дані, знаходимо діаметр частинки:

$$d = \frac{3\sigma R_c^2 T_c^4}{2GcM_c\rho} \approx 1,74 \cdot 10^{-4} \text{ мм} = 0,174 \text{ мкм}.$$

## 12.6 Задачі

**12.16.** Випромінювальна здатність гіпотетичного тіла задається функцією

$$r(\omega, T) = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_1, \\ b, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \omega > \omega_2, \end{cases}$$

де  $b$  стала величина. Знайти енергетичну світність  $R$  тіла.

**12.17.** Випромінювальна здатність деякого тіла описується законом  $r(\omega, T) = r_0 \exp\{-\alpha\omega\}$ , де  $r_0$  і  $\alpha$  – постійні. Визначити енергетичну світність  $R$  тіла.

**12.18.** Чому дорівнює поглинальна і випромінювальна здатність в стані теплової рівноваги з випромінюванням: а) поверхні, яка ідеально відбиває випромінювання; б) абсолютно чорного тіла.

**12.19.** Два тіла однакової форми і розмірів нагріті до початкової температури  $T_0$ , ізолювані одне від одного і поміщені у вакуум. Одне із тіл виготовлене із скла, інше – із графіту. На рис.12.6 представлені залежності температури цих тіл, які остигають, в залежності від часу. Яка із кривих належить склу, а яка – графіту? Відповідь пояснити.

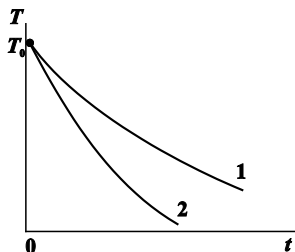


Рис.12.6.

**12.20.** Яку кількість енергії випромінює Сонце за 1 хв? Випромінювання Сонця вважати близьким до випромінювання АЧТ. Температура поверхні Сонця дорівнює 6000 К.

**12.21.** На  $1 \text{ см}^2$  земної поверхні падає в середньому біля 2 кал променистої енергії за 1 хв. Температура поверхні Сонця 6000 К. Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом, знайти постійну  $\sigma$  в законі Стефана – Больцмана.

**12.22.** Яка температура поверхні Сонця, якщо в його спектрі випромінювання максимальна інтенсивність припадає на довжину хвилі 480 нм.

**12.23.** Як змінилась би загальна кількість енергії, що випромінює Сонце, якщо б одна половина поверхні Сонця трохи остила, а друга половина поверхні Сонця на стільки ж нагрілась?

**12.24.** Випромінювання Сонця за своїм спектральним складом є близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла, для якого максимум випромінювальної здатності приходить на довжину хвилі 0,48 мкм. Оцінити час, за який маса Сонця зменшиться на 1%.

**12.25.** Оцінити температуру чорної поверхні сонячних батарей штучного супутника Землі, яка розташована перпендикулярно до

сонячних променів за межами земної атмосфери на середній відстані Землі від Сонця. Температура сонячної поверхні 5785 К.

**12.26.** Проходячи афелій, Земля знаходиться на 3,3% даліше від Сонця, ніж коли вона проходить перигелій. Приймаючи Землю як сире тіло з середньою температурою  $T = 288$  К, визначити різницю температур, які Земля має в афелії і перигелії.

**12.27.** Знайти температуру печі, якщо відомо, що випромінювання з отвору, площа якого  $6,1 \text{ см}^2$ , має потужність 34,6 Вт. Випромінювання вважати близьким до випромінювання АЧТ.

**12.28.** Площа поверхні вольфрамової нитки розжарення в 25 – ватній лампі  $0,403 \text{ см}^2$ , а її температура  $2177^\circ\text{C}$ . У скільки раз менше енергії випромінює лампа, ніж АЧТ при тій же поверхні і температурі? Коефіцієнт випромінювання вольфраму  $a = 0,3$ .

**12.29.** Діаметр вольфрамової спіралі в електричній лампочці  $d = 0,3 \text{ мм}$ , довжина спіралі  $l = 5 \text{ см}$ . При включенні лампочки в коло з напругою  $U = 127 \text{ В}$  через лампочку протікає струм  $I = 0,31 \text{ А}$ . Знайти температуру спіралі. Вважати, що в стані рівноваги все тепло, що виділяється в нитці, витрачається на випромінювання. Коефіцієнт випромінювання для даної температури  $a = 0,3$ .

**12.30.** Температура вольфрамової спіралі в 25-ватній електричній лампочці  $T = 2450 \text{ К}$ . Відношення її енергетичної світності до енергетичної світності абсолютно чорного тіла при даній температурі  $a = 0,3$ . Знайти площу поверхні спіралі, яка світиться.

**12.31.** Поверхня тіла нагріта до температури  $1000 \text{ К}$ . Потім одна половина цієї поверхні нагрівається на  $\Delta T = 100 \text{ К}$ , а друга – охолоджується на  $\Delta T = 100 \text{ К}$ . Як зміниться енергетична світність поверхні цього тіла?

**12.32.** Нехтуючи втратами тепла на теплопровідність, підрахувати потужність електричного струму, яка необхідна для розжарення нитки, діаметр якої  $1 \text{ мм}$ , а довжина  $20 \text{ см}$ , до

температури 3500 К. Вважати, що нитка випромінює як абсолютно чорне тіло.

**12.33.** Розв'язати попередню задачу, вважаючи, що при  $T = 3500$  К коефіцієнт випромінювання  $a \approx 0,35$ .

**12.34.** Муфельна піч споживає потужність  $N_0 = 0,5$  кВт. Температура її внутрішньої поверхні при відкритому отворі, діаметр якого  $d = 5$  см, дорівнює  $t = 700^\circ\text{C}$ . Яка частина потужності, що споживається, розсіюється стінками?

**12.35.** При роботі радіолампи відбувається розігрів аноду внаслідок бомбардування його електронами. Розсіювання енергії відбувається в основному у вигляді випромінювання, розсіювання енергії із-за теплопровідності підвідних частин лампи незначне. Визначити допустиму силу анодного струму в лампі, яка працює при анодній напрузі  $U = 400$  В. Нікелевий анод має форму циліндра, довжина якого  $l = 4$  см, діаметр  $d = 1$  см. Вважати, що нагрівання анода до температури  $T = 1000$  К є допустимим. Відомо, що при цій температурі нікель випромінює  $a = 0,2$  потужності випромінювання абсолютно чорного тіла.

**12.36.** Вольфрамова нитка, діаметр якої  $d_1 = 0,10$  мм, з'єднана послідовно з вольфрамовою ниткою невідомого діаметру  $d_2$ . Нитки розжарюються у вакуумі струмом і при цьому їхні температури  $T_1 = 2000$  К і  $T_2 = 3000$  К вважаються такими, що встановились. Знайти діаметр  $d_2$  другої нитки. Коефіцієнти випромінювання вольфраму і його питомий опір, які відповідають даним температурам, дорівнюють відповідно  $a_1 = 0,260$ ,  $\rho_1 = 5,9 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ,  $a_2 = 0,334$ ,  $\rho_2 = 9,62 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

**12.37.** Мідну кульку, діаметр якої  $d = 1,2$  см, розмістили у відкачану посудину, температура стінок якої підтримується близькою до абсолютного нуля. Початкова температура кульки  $T_0 = 300$  К. Вважаючи поверхню кульки абсолютно чорною, знайти через який час її температура зменшиться у  $\eta = 2$  рази. Питома теплоємність міді –  $390 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ .

**12.38.** Енергетична світність абсолютно чорного тіла  $R = 3,0 \text{ Вт/см}^2$ . Визначити довжину хвилі, яка відповідає максимуму випромінювальної здатності цього тіла.

**12.39.** Яку енергетичну світність має абсолютно чорне тіло, якщо максимум спектральної густини його енергетичної світності припадає на довжину хвилі  $\lambda = 484 \text{ нм}$ ?

**12.40.** Потужність випромінювання абсолютно чорного тіла  $10 \text{ кВт}$ . Знайти площу поверхні тіла, яка випромінює, якщо максимум спектральної густини його енергетичної світності припадає на довжину хвилі  $700 \text{ нм}$ .

**12.41.** Температура АЧТ змінилась при нагріванні від  $1000$  до  $3000 \text{ К}$ . У скільки разів збільшилась при цьому його енергетична світність  $R$ ? Як змінилась довжина хвилі  $\lambda$ , на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності? У скільки разів збільшилась його максимальна спектральна густина енергетичної світності  $r(\lambda, T)$ ?

**12.42.** АЧТ має температуру  $2900 \text{ К}$ . В результаті його охолодження довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, змінилась на  $\Delta\lambda = 9 \text{ мкм}$ . До якої температури охолоджене тіло?

**12.43.** Кулька з чорною поверхнею охолоджується від температури  $T_1 = 300 \text{ К}$  до  $T_2 = 293 \text{ К}$ . Як змінилась довжина хвилі  $\lambda$ , що відповідає максимуму спектральної густини його енергетичної світності?

**12.44.** При переході від температури  $T_1$  до температури  $T_2$  площа, яка обмежена графіком функції розподілу густини енергії рівноважного випромінювання за довжинами хвиль, збільшилась в  $16$  раз. Як зміниться при цьому довжина хвилі, на яку приходить максимум випромінювальної здатності АЧТ?

**12.45.** Є два абсолютно чорних джерела теплового випромінювання. Температура одного з них  $T = 2300 \text{ К}$ . Знайти температуру другого джерела, якщо довжина хвилі, що відповідає максимуму його випромінювальної здатності на  $\Delta\lambda = 0,5 \text{ мкм}$  більша

довжини хвилі, яка відповідає максимуму випромінювальної здатності першого джерела.

**12.46.** В яких областях спектру лежать довжини хвиль, які відповідають максимуму спектральної густини енергетичної світності, якщо джерелом світла є: а) спіраль лампи розжарювання ( $T = 3000 \text{ K}$ ); б) поверхня Сонця ( $T = 5800 \text{ K}$ ); в) атомна бомба, в якій на момент вибуху температура досягає  $10^6 \text{ K}$ .

**12.47.** В результаті розширення Всесвіту після Гігантського Вибуху виникло електромагнітне випромінювання, яке почало остигати. В наш час це випромінювання (його називають реліктовим) має вид теплового випромінювання з максимумом випромінювальної здатності, який приходить на довжину хвилі  $\lambda_m = 1,07 \text{ мм}$ . Яка температура цього випромінювання?

**12.48.** При переході від однієї температури до другої площа під кривою функції Кірхгофа  $f(\lambda, T)$  зменшилась в  $\eta = 13$  раз. Як і в скільки раз змінилась при цьому довжина хвилі, яка відповідає максимуму функції  $f(\lambda, T)$ ?

**12.49.** Показати за допомогою формули Віна, що в спектрі розподілу теплового випромінювання за довжинами хвиль: а) найбільш ймовірна довжина хвилі (хвиля, на яку приходить максимум випромінювання)  $\lambda_m \sim 1/T$ , де  $T$  – температура випромінювання; б) максимальна спектральна густина енергії пропорційна  $T^5$ .

**12.50.** Показати, що максимум об'ємної густини енергії  $u(\lambda, T)$  рівноважного випромінювання, а також максимум випромінювальної здатності  $r(\lambda, T)$  абсолютно чорного тіла зростають пропорційно  $T^5$ .

**12.51.** На рис.12.7 приведений графік функції  $u(x)$ , яка характеризує відносну долю загальної потужності теплового випромінювання, що приходить на спектральний інтервал від 0 до  $x$ . Тут  $x = \lambda/\lambda_m$  ( $\lambda_m$  – довжина хвилі, яка відповідає максимальній спектральній густині випромінювання.)

Знайти за допомогою цього графіка: а) довжину хвилі, яка

ділить спектр випромінювання на дві енергетично однакові частини при температурі 3700K; **б)** долю загальної потужності випромінювання, яка приходить на видиму частину спектру (0,40 – 0,76 мкм) при температурі 5000K; **в)** в скільки раз збільшиться потужність випромінювання в області довжин хвиль  $\lambda > 0,76$  мкм при зростанні температури від 3000 до 5000K.

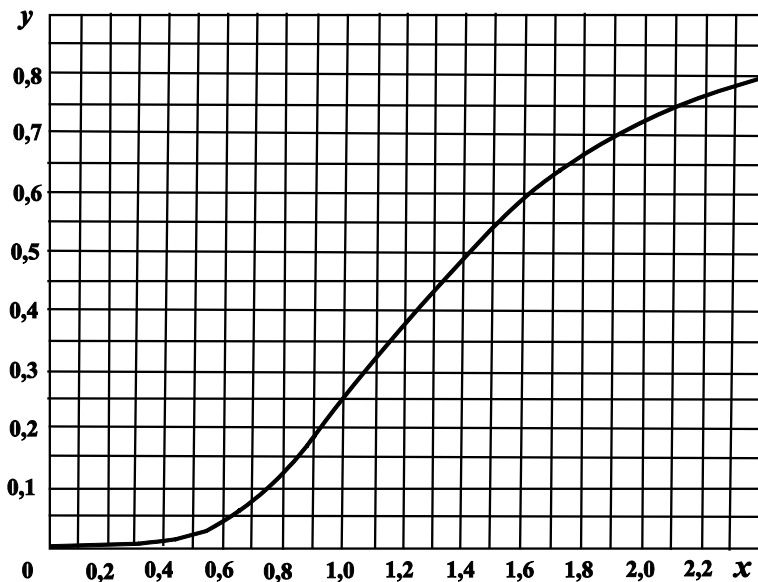


Рис.12.7.

**12.52.** Визначити за допомогою формули Планка (6.14.) енергетичну світність АЧТ, яка припадає на вузький інтервал довжин хвиль  $\Delta\lambda = 10\text{\AA}$ , що відповідає максимуму спектральної густини енергетичної світності при температурі тіла  $T = 3000$  K.

**12.53.** За допомогою формули Планка вирахувати в скільки раз зростає випромінювальна здатність для довжини хвилі  $\lambda = 0,6$  мкм при збільшенні температури від 2000 K до 2300 K.

**12.54.** Визначити потужність, яку випромінює  $1\text{ м}^2$  поверхні абсолютно чорного тіла, температура якого  $T = 2000$  K, у вузькому інтервалі довжин хвиль  $\Delta\lambda = 10\text{\AA}$  для довжини хвилі, що відповідає

максимуму випромінювальної здатності.

**12.55.** Потужність, яку випромінює  $1 \text{ м}^2$  поверхні абсолютно чорного тіла при температурі  $T = 2500 \text{ К}$  біля довжин хвилі, що відповідає максимуму випромінювальної здатності, у вузькому інтервалі довжин хвиль дорівнює  $2 \text{ кВт}$ . Визначити цей інтервал довжин хвиль.

**12.56.** Позитивний кратер вольтової дуги випромінює як чорне тіло. Визначити відношення  $x$  потужності випромінювання кратера, що приходить на інтервал довжин хвиль від  $\lambda_1 = 0,695 \text{ мкм}$  до  $\lambda_2 = 0,705 \text{ мкм}$  (ділянка червоного світла) до потужності випромінювання кратера в інтервалі довжин хвиль від  $\lambda_3 = 0,395 \text{ мкм}$  до  $\lambda_4 = 0,405 \text{ мкм}$  (ділянка фіолетового світла). Температура кратера  $T = 4000 \text{ К}$ .

**12.57.** За допомогою формули Планка розрахувати потужність випромінювання з одиниці поверхні абсолютно чорного тіла в інтервалі довжин хвиль, які відрізняються не більше ніж на  $\eta = 0,5\%$  від найбільш ймовірної довжини хвилі при  $T = 2000 \text{ К}$ .

**12.58.** Порівнюючи формулу Віна з формулою Планка, визначити, до якої температури в межах видимого спектру ( $0,4 \text{ мкм} < \lambda < 0,75 \text{ мкм}$ ) можна використовувати формулу Віна, щоб похибка не перевищувала  $1\%$ .

**12.59.** Для яких довжин хвиль формула Віна  $u(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \exp\left\{-\frac{\hbar \omega}{kT}\right\}$  дає в розподілі енергії випромінювання абсолютно чорного тіла похибку не більшу  $1\%$  при  $T = 2000 \text{ К}$ ?

**12.60.** Знайти довжину хвилі світла, яка відповідає червоній межі фотоелекту для літію, натрію, калію та цезію.

**12.61.** Довжина хвилі світла, яка відповідає червоній межі фотоелекту для деякого металу,  $\lambda_0 = 275 \text{ нм}$ . Знайти роботу виходу  $A$  електрона з металу; максимальну швидкість  $v_{\max}$  електронів, що вириваються з металу світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 180 \text{ нм}$  і їхню максимальну кінетичну енергію  $W_{\text{к.}\max}$ .



**12.62.** Знайти різницю потенціалів  $U$ , яка затримує електрони, що вириваються при освітленні калія світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 330$  нм.

**12.63.** При фотоефекті з платинової поверхні електрони повністю затримуються різницею потенціалів  $U_0 = 0,8$  В. Знайти довжину хвилі  $\lambda$  опромінення, яке використовується, і граничну довжину хвилі  $\lambda_0$ , при якій ще можливий фотоефект.

**12.64.** Довжина хвилі світла, яка відповідає червоній межі фотоефекту, для деякого металу дорівнює 275 нм. Знайти мінімальну енергію фотона, який може викликати фотоефект.

**12.65.** Фотони з енергією 4,9 еВ виривають електрони з металу, робота виходу якого  $A = 4,5$  еВ. Знайти максимальний імпульс, що передається поверхні металу при вириванні кожного електрона.

**12.66.** Знайти сталу Планка  $h$ , якщо відомо, що електрони, які вириваються з металу світлом з частотою  $\nu_1 = 2,2 \cdot 10^{15}$  Гц, повністю затримуються різницею потенціалів  $U_1 = 6,6$  В, а електрони які вириваються світлом з частотою  $\nu_2 = 4,6 \cdot 10^{15}$  Гц, – різницею потенціалів  $U_2 = 16,5$  В.

**12.67.** До якого потенціалу можна зарядити віддалену від других тіл цинкову кульку, якщо її опромінювати ультрафіолетовим світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 200$  нм?

**12.68.** Вирахувати за допомогою таблиці 10 додатків: а) довжини хвиль червоної межі фотоефекту для цезію і платини; б) максимальні швидкості фотоелектронів, які вивільняються з поверхні цинку, срібла та нікелю електромагнітним випромінюванням, довжина хвилі якого  $\lambda = 270$  нм.

**12.69.** При освітленні поверхні літія електромагнітним випромінюванням, довжина хвилі якого  $\lambda_0$ , фотострум з поверхні літія припинається при деякій максимальній різниці потенціалів затримки. Якщо змінити довжину хвилі випромінювання в  $n = 1,5$  рази, то для припинення фотоефекту необхідно збільшити різницю потенціалів затримки в  $\eta = 2$  рази. Вирахувати  $\lambda_0$ .

**12.70.** При почерговому освітленні поверхні деякого металу світлом з довжинами хвиль  $\lambda_1 = 0,35$  мкм і  $\lambda_2 = 0,54$  мкм виявлено, що відповідні максимальні швидкості фотоелектронів відрізняються одна від одної у  $\eta = 2$  рази. Знайти роботу виходу з поверхні цього металу.

**12.71.** Лампочка кишенькового ліхтарика споживає потужність  $N = 1$  Вт. Якщо вважати, що ця потужність розсіюється у всіх напрямках у вигляді випромінювання і що довжина хвилі, яка відповідає середній частоті випромінювання, дорівнює  $\lambda = 1$  мкм, визначити число фотонів, які падають на  $S = 1$  см<sup>2</sup> площадки, яка розташована перпендикулярно до променів на відстані  $L = 10$  км, за час  $\tau = 1$  с.

**12.72.** Оцінити температуру  $T$ , при якій тиск рівноважного випромінювання дорівнює  $p_0 = 101$  кПа (атмосферний тиск).

**12.73.** Відомо, що Всесвіт заповнений реліктовим випромінюванням, температура  $T$  якого в наш час оцінюється в 3 К. Оцінити тиск цього випромінювання.

**12.74.** Визначити тиск теплового випромінювання у внутрішніх областях Сонця, де температура досягає  $T \approx 1,6 \cdot 10^7$  К.

**12.75.** Середня довжина хвилі випромінювання спіральної лампочки розжарення  $\lambda = 1200$  нм. Знайти число фотонів  $n$ , які випромінюються лампочкою за одиницю часу. Потужність лампочки  $N = 100$  Вт.

**12.76.** Точкове ізотропне джерело випромінює світло з  $\lambda = 0,589$  мкм. Світлова потужність джерела  $N = 10$  Вт. Знайти: а) середню густину потоку фотонів на відстані  $r = 2,0$  м від джерела; б) відстань від джерела до точки, де середня концентрація фотонів  $\langle n \rangle = 100$  см<sup>-3</sup>.

**12.77.** Визначити густину потоку фотонів на відстані  $r = 2,0$  м від точкового ізотропного джерела світла, потужність якого  $N = 2,0$  Вт, якщо світло: а) моноенергетичне з довжиною хвилі  $\lambda = 0,55$  мкм; б) містить дві спектральні лінії з довжинами хвиль

$\lambda_1 = 0,70$  мкм і  $\lambda_2 = 0,40$  мкм, інтенсивності яких відносяться як 1:2, відповідно.

**12.78.** Довжини хвиль фотонів 0,60 мкм, 0,30 нм і 4 пм. Вирахувати їхні імпульси в еВ/с, де  $c$  – швидкість світла.

**12.79.** При якому значенні швидкості електрона його імпульс буде дорівнювати імпульсу фотона, довжина хвилі якого  $\lambda = 2,0$  пм?

**12.80.** Знайти за допомогою корпускулярних уявлень силу світлового тиску, яку створює плоский світловий потік, інтенсивність якого  $I = 1,0$  Вт/см<sup>2</sup>, на плоску дзеркальну поверхню, якщо кут падіння  $\varphi = 30^\circ$  і площа поверхні, яка освітлюється,  $S = 10$  см<sup>2</sup>.

**12.81.** Лазер випромінює в імпульсі, тривалість якого  $\tau = 0,13$ мс, пучок світла з енергією  $W = 10$  Дж. Знайти середній тиск такого світлого імпульсу, якщо його сфокусувати в пляму, діаметр якої  $d = 10$  мкм, на поверхню, яка перпендикулярна до пучка і має коефіцієнт відбивання  $\rho = 0,50$ .

**12.82.** Плоска світлова хвиля, інтенсивність якої  $I = 0,20$  Вт/см<sup>2</sup>, падає на плоску дзеркальну поверхню, коефіцієнт відбивання якої  $\rho = 0,8$ . Кут падіння  $\varphi = 45^\circ$ . Визначити за допомогою корпускулярних уявлень значення нормального тиску, який створює світло на цю поверхню.

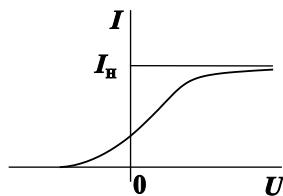
**12.83.** Плоска світлова хвиля освітлює кулю з абсолютно дзеркальною поверхнею. Радіус кулі  $R$ . Ця ж світлова хвиля падає нормально на абсолютно чорну круглу пластинку, радіус якої  $R$ . За допомогою корпускулярних уявлень показати, що сила світлового тиску на кулю і пластинку буде однаковою.

**12.84.** Плоска світлова хвиля, інтенсивність якої  $I = 0,70$  Вт/см<sup>2</sup>, освітлює кулю з абсолютно дзеркальною поверхнею. Радіус кулі  $R = 5,0$  см. Знайти за допомогою корпускулярних уявлень силу світлового тиску, якого зазнає куля.

**12.85.** Шар озону в атмосфері Землі повністю поглинає сонячне випромінювання в інтервалі довжин хвиль від 0,22 мкм до 0,28 мкм і мало поглинає випромінювання інших довжин хвиль.

Вважаючи, що Сонце випромінює як абсолютно чорне тіло при  $T = 6000 \text{ K}$ , визначити тиск сонячних променів на шар озону.

**12.86.** Як за допомогою вольт-амперної характеристики фотоелемента (рис.12.8) визначити число  $N$  електронів, які вибиваються світлом з поверхні катода за одиницю часу?



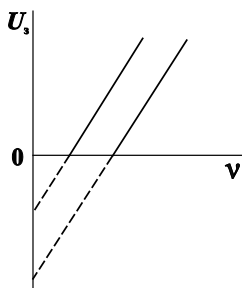
**Рис.12.8.**

**12.87.** Струм насичення, який протікає через вакуумний фотоелемент при його освітленні світлом,  $I_n = 0,5 \text{ нА}$ . Визначити число  $N$  фотоелектронів, які покидають поверхню катода за одиницю часу.

**12.88.** При освітленні катода фотоелемента монохроматичною світловою хвилею в його колі протікає струм насичення  $I_n$ . Зобразити залежність цього струму від концентрації  $n$  фотонів у хвили. Від якого параметра залежить кутовий коефіцієнт графіка?

**12.89.** Зобразити схематично залежність фотоструму насичення  $I_n$  від напруженості електричного поля  $E$  світлової хвилі, яка падає на фотоелемент.

**12.90.** Зобразити графічно залежність максимальної кінетичної енергії  $W_k$  фотоелектронів від частоти  $\omega$  світла. Робота виходу електрона із металу дорівнює  $A$ .



**Рис.12.9.**

**12.91.** На рис.12.9 приведені залежності напруги затримки  $U_z$  від частоти  $\nu$  падаючого світла для зовнішнього фотоефекту. Чим відрізняються умови, при яких отримані ці прямі? Які фундаментальні фізичні сталі можуть бути визначені за допомогою цих залежностей?

**12.92.** Як зміниться вид вольтамперної характеристики фотоелемента, якщо:

а) при незмінному спектральному складі хвилі збільшити у два рази її повний світловий потік;

б) при незмінному потоці *фотонів* збільшити у два рази частоту монохроматичного світла;

в) при незмінному потоці *фотонів* зменшити у два рази частоту монохроматичного світла;

г) при незмінному *світловому* потоці збільшиться у два рази частота монохроматичного світла?

Вважати, що квантовий вихід фотоефекту залишається у всіх випадках однаковим.

**12.93.** Електромагнітне випромінювання, довжина хвилі якого  $\lambda = 0,30$  мкм, падає на фотоелемент, який знаходиться в режимі насичення. Відповідна спектральна чутливість фотоелемента  $j = 4,8$  мА/Вт. Знайти квантовий вихід фотоелектронів, тобто число фотоелектронів на кожний падаючий фотон.

### Додаткові задачі

**12.94.** Початкова температура теплового випромінювання  $T = 3000$  К. На скільки кельвінів змінилась ця температура, якщо довжина хвилі, на яку приходить максимум випромінювання, збільшилась на  $\Delta\lambda = 0,10$  мкм.

**12.95.** Струм  $I_1 = 1$  А розжарює вольфрамову нитку у вакуумі до  $T_1 = 1000$  К. При якому струмі  $I_2$  нитка розжариться до  $T_2 = 3000$  К? Коефіцієнт випромінювання для вольфраму для  $T_1$   $a_1 = 0,115$ , а для  $T_2$  —  $a_2 = 0,334$ . При розрахунках знехтувати втратами енергії із-за теплопровідності підвісок нитки і зворотнім випромінюванням оточуючих тіл.

**12.96.** Інтенсивність сонячного випромінювання за межами атмосфери біля поверхні Землі (сонячна постійна) дорівнює  $1,35$  кВт/м<sup>2</sup>. Вважаючи, що Сонце випромінює, як абсолютно чорне тіло, визначити температуру його поверхні.

**12.97.** Розрахувати за допомогою формули Планка числове значення постійної  $b$  в законі зміщення Віна.

**12.98.** Розрахувати за допомогою формули Планка числове значення постійної Стефана-Больцмана  $\sigma$ .

**12.99.** Знайти за допомогою формули Планка середнє значення частоти  $\langle \omega \rangle$  в спектрі теплового випромінювання при  $T = 3000 \text{ K}$ .

**12.100.** Знайти за допомогою формули Планка температуру теплового випромінювання, середня довжина хвилі якого  $\langle \lambda \rangle = 1,55 \text{ мкм}$ .

**12.101.** Скориставшись формулою Планка, розрахувати повне число фотонів в  $1 \text{ см}^3$  при кімнатній температурі ( $T = 300 \text{ K}$ ).

**12.102.** а) Визначити тиск променів Сонця на поверхню чорного тіла, яке знаходиться на такій же відстані від Сонця, як і Земля. Кут падіння променів на поверхню чорного тіла дорівнює нулю. Сонячна постійна (інтенсивність сонячного випромінювання за межами атмосфери) дорівнює  $1,35 \text{ кВт/м}^2$ .

б) Виконати ці ж розрахунки для тіла, яке відбиває всі промені;

в) Виконати ці ж розрахунки для скляної пластинки, яка відбиває 4% всіх променів і поглинає 6% їхньої енергії.

**12.103.** Частина стінок колби електролампи розжарення має форму сфери, яка посріблена і має радіус 4 см. Лампа споживає потужність 50 Вт, із яких 90% витрачається на випромінювання. Що більше, тиск газу в колбі ( $10^{-8} \text{ мм.рт.ст.}$ ) чи світловий тиск на стінки?

**12.104.** Під час вибуху атомної бомби в центрі вибуху досягається температура порядку  $10^8 \text{ K}$ . Визначити світловий тиск в центрі вибуху (відразу після вибуху), вважаючи, що випромінювання рівноважне.

**12.105.** Як змінилась би загальна кількість енергії, яку випромінює Сонце, якби одна частина його поверхні трохи остигла, а друга на стільки ж нагрілась?

**12.106.** Чутливість сітківки ока людини на довжині хвилі 600 нм (жовте світло) становить  $3,3 \cdot 10^{-18} \text{ Вт}$ . Яка мінімальна кількість фотонів має щосекунди падати на сітківку ока, аби людина відчувала це світло ?

**12.107.** Пучок світла падає нормально на плоску дзеркальну поверхню. З якою силою тисне світло на цю поверхню, якщо потік енергії в пучку складає 0,6 Вт?

**12.108.** Пучок світла з довжиною хвилі  $\lambda = 500$  нм, який падає нормально на чорну поверхню, створює тиск  $P = 10$  мкПа. Знайти концентрацію  $n$  фотонів в пучку.

**12.109.** Паралельний пучок світла, падає під кутом  $\varphi = 60^\circ$  на плоску поверхню з коефіцієнтом відбивання  $\rho = 0,6$ . Визначити тиск світла на поверхню, якщо об'ємна густина енергії в пучку  $w = 10$  мкДж/м<sup>3</sup>.

**12.110.** Який тиск створює лазерний імпульс з енергією 10 мкДж і тривалістю 0,1 мкс, який сфокусовано на дзеркальну поверхню в цятку діаметром 1 мкм?

**12.111.** Чи буде спостерігатися фотоелект при опроміненні цинку видимим світлом ( $400 \leq \lambda \leq 750$ ) нм?

**12.112.** Який відсоток енергії фотона витрачається на роботу виходу електрона з металу, якщо червона межа фотоелектру складає 414 нм, а затримуюча напруга 2,0 В?

**12.113.** При опроміненні металу з роботою виходу електрона 4,0 еВ світлом деякої довжини хвилі затримуюча напруга становить 1,0 В. Якою стане затримуюча напруга, якщо довжину хвилі світла зменшити в 2 рази?

**12.114.** Струм, який виникає в колі вакуумного фотоелемента при освітленні цезієвого електрода світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 4046$  Å, зникає, коли зовнішня затримуюча напруга досягає значення  $U_0 = 0,950$  В. Визначити значення і полярність зовнішньої контактної різниці потенціалів фотоелемента.

**12.115.** Кобальтова кулька, яка є внутрішнім електродом сферичного вакуумного фотоелемента,

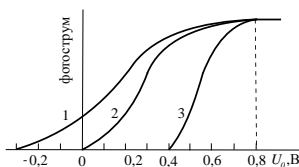


Рис.12.8.

освітлюється монохроматичним світлом різних довжин хвиль. Отримані графіки залежності фотоструму від прикладеної напруги  $U$  приведені на рис.12.8. Знайти за допомогою цих графіків відповідні довжини хвиль.

**12.116.** Знайти довжину хвилі фотона, імпульс якого дорівнює імпульсу електрона з кінетичною енергією  $W_k = 0,20 \text{ MeV}$ .

**12.117.** Знайти за допомогою корпускулярних уявлень силу світлового тиску, яку створює плоский світловий потік, інтенсивність якого  $I = 1,5 \text{ Вт/см}^2$ , на плоску дзеркальну поверхню, якщо кут падіння  $\varphi = 60^\circ$  і площа поверхні, яка освітлюється,  $S = 15 \text{ см}^2$ .

## 13. БУДОВА АТОМА

### 13.1. Питання теми

1. Боровська теорія будови атома.
2. Квантові числа та електронна оболонка атома.

### 13.2. Основні визначення та формули

1. *Перший постулат Бора.* Електрон в атомі водню рухається навколо ядра по коловій орбіті під дією сили Кулона за законами класичної механіки. При такому русі електрон не випромінює енергії. Із всіх можливих орбіт реалізуються такі, для яких виконується умова

$$m_e v_n r_n = n \hbar, \quad (13.1)$$

де  $m_e$  – маса електрона,  $v_n$  – швидкість електрона на  $n$  – ній орбіті,  $r_n$  – радіус  $n$ -ої орбіти,  $\hbar = h/(2\pi) = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$  – стала Планка,  $n$  – ціле число ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

2. *Другий постулат Бора.* При переході електрона із однієї орбіти на іншу атом випромінює або поглинає квант енергії

$$h\nu_{nk} = W_k - W_n, \quad (13.2)$$



де  $W_n, W_k$  – енергії електрона на  $n$ -ій та  $k$ -ій орбітах ( $n = 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, 3, \dots, n \neq k$ ).

**3.** Повна енергія електрона на орбіті для воднеподібного атома визначається за формулою:

$$W_n = \frac{m_e e^4 Z^2}{8 \varepsilon_0^2 h^2 n^2} \text{ Дж} = -13,6 \frac{Z^2}{n^2} \text{ еВ}, \quad (13.3)$$

де  $Z$  – зарядове число (порядковий номер атома в періодичній системі елементів),  $m_e$  – маса електрона,  $e$  – заряд електрона,  $\varepsilon_0$  – стала вакууму,  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка.

**4.** Довжина хвилі  $\lambda$  світла, яке випромінюється воднеподібним атомом при переході електрона із  $k$ -ої орбіти на  $n$ -ну, може бути визначена за серіальною формулою

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R_\lambda \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (13.4)$$

де  $R_\lambda = \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3 c} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$  – стала Рідберга,  $n$  і  $k$  – квантові числа, які визначають номери орбіт електрона ( $n = 1, 2, 3, \dots; k = n+1, n+2, n+3, \dots$ ).

Формула (7.4) може бути записана і в такому вигляді:

$$\omega = Z^2 R_\omega \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (13.5)$$

де  $R_\omega = \frac{W_i}{h} = \frac{\pi m_e e^4}{4 \varepsilon_0^2 h^3} = 2,067 \cdot 10^{16} \text{ рад/с}$  – стала Рідберга,  $\omega$  – частота переходу між енергетичними рівнями з квантовими числами  $n$  і  $k$ ,  $W_i = 13,6 \text{ еВ}$  – енергія іонізації атома водню.

**5.** Енергія кванта світла, який випромінюється воднеподібним атомом при переході електрона з однієї орбіти на іншу, визначається за формулою

$$W = Z^2 W_i \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right). \quad (13.6)$$

**6.** Стан електрона в атомі визначається такими квантовими числами:

**а)**  $n = 1, 2, 3, \dots$  – головне квантове число, яке при відсутності зовнішнього поля визначає енергію електрона;

**б)**  $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$  – орбітальне квантове число, яке визначає форму орбіти електрона;

**в)**  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$  – магнітне квантове число, яке визначає орієнтацію орбітального моменту (механічного, магнітного) електрона по відношенню до напрямку зовнішнього поля;

**г)**  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  – спінове квантове число, яке визначає орієнтацію спінового моменту по відношенню до зовнішнього поля.

**7.** Момент імпульсу  $L$  і магнітний момент  $p_m$  електрона, які обумовлені орбітальним рухом, визначаються за формулами:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (13.7)$$

$$p_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (13.8)$$

де  $l$  – орбітальне квантове число,  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,927 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл – одиниця магнітного моменту (магнетон Бора).

**8.** Проекції орбітальних момента імпульсу  $L_z$  і магнітного момента  $p_{mz}$  на напрямок зовнішнього магнітного поля дорівнюють:

$$L_z = m\hbar, \quad (13.9)$$

$$p_{mz} = m\mu_B. \quad (13.10)$$

**9.** Механічний момент імпульсу  $L_s$  і магнітний  $\mu$ , які обумовлені спіном електрона, визначаються за формулами:

$$L_s = \hbar \sqrt{|m_s|(|m_s| + 1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar, \quad (|m_s| = 1/2); \quad (13.11)$$

$$\mu = \sqrt{3}\mu_B.$$

**10.** Проекція спінового механічного і магнітного моментів на напрямок зовнішнього магнітного поля визначається так:

$$L_{sz} = \pm \hbar/2, \quad (13.12)$$

$$\mu_z = \pm \mu_B. \quad (13.13)$$

**11.** Гіромагнітним відношенням для орбітальних магнітного і механічного моментів є:

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m_e} = -\frac{\mu_B}{\hbar}. \quad (13.14)$$

**12.** Гіромагнітним відношенням для спінових магнітного і механічного моментів є:

$$\frac{\mu}{L_s} = -\frac{e}{m_e} = -2\frac{\mu_B}{\hbar}. \quad (13.15)$$

**13.** Максимальна кількість електронів, які можуть знаходитись на електронній оболонці з квантовим числом  $n$ , дорівнює:

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2. \quad (13.16)$$

### 13.3. Питання на самопідготовку

1. Ядерна модель атома.
2. В чому неспроможність класичної теорії при поясненні ядерної моделі атома?
3. Постулати Бора.
4. Серії спектральних ліній в спектрі випромінювання атома водню.
5. Боровська теорія будови атома водню.
6. Які квантові числа описують стан електрона в атомі?
7. Пояснити фізичний зміст кожного квантового числа.
8. Механічний і магнітний моменти електрона.
9. Що підтверджують досліди Штерна і Герлаха з атомними пучками?
10. Принцип Паулі.
11. Заповнення електронних оболонок атома електронами.
12. Поясніть принцип розміщення хімічних елементів в періодичній таблиці.

### 13.4. Методичні вказівки

1. Є ряд задач, в яких розглядаються спектри водню і воднеподібних іонів (тобто іонів, які мають по одному електрону:

$\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$  і т. п.) Щоб з допомогою формул (13.4) і (13.5) знайти довжину хвилі  $\lambda$  (або частоту  $\nu = c/\lambda$ , або квант енергії  $h\nu$ ), необхідно перш за все, виходячи із умови задачі визначити числа  $n$  і  $k$ , які входять в ці формули. Так для водню числу  $n=1$  відповідає ультрафіолетова серія (серія Лаймана);  $n=2$  – видима серія (серія Бальмера),  $n=3$  – перша інфрачервона серія (серія Пашена);  $n=4$  – друга інфрачервона серія (серія Брекетта);  $n=5$  – третя інфрачервона серія (серія Пфунда). Число  $k$  визначається за формулою  $k = n + N$ , де  $N$  – номер спектральної лінії в даній серії, довжина хвилі якої зменшується. Наприклад, для другої лінії серії Пашена  $N = 2$  і  $k = 3+2 = 5$ .

2. В залежності від значення орбітального квантового числа  $l$  стани електрона в атомі позначають різними буквами. Значенням  $l = 0, 1, 2, 3$  відповідають букви  $s, p, d, f$ , перед якими вказують значення головного квантового числа  $n$ . Наприклад, електрон в стані з  $n = 2$  і  $l = 1$  позначають символом  $2p$ .

3. При заповненні електронних оболонок хімічних елементів електронами необхідно враховувати правило, згідно з яким енергетичні рівні повинні заповнюватись за порядком зростання суми  $n + l$ . Якщо дві суми однакові, тобто  $n_1 + l_1 = n_2 + l_2$ , то перевага віддається сумі з меншим  $n$ .

## 13.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 13.1.** Вирахувати для атома водню радіус першої боровської орбіти і швидкість електрона на ній.

**Розв'язок.** Згідно першого постулату Бора радіус  $n$ -ої боровської орбіти  $r_n$  і швидкість електрона на ній  $v_n$  зв'язані між собою співвідношенням (13.1), а згідно другого закону Ньютона

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2},$$

де  $v_n^2/r_n$  – доцентрове прискорення, а  $e^2/(4\pi\epsilon_0 r_n^2)$  – кулонівська сила взаємодії електрона і ядра. Розв’язавши систему цих рівнянь, отримаємо:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2, \quad v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \cdot \frac{1}{n},$$

а прийнявши тут  $n = 1$  і виконавши розрахунки, знайдемо, що

$$r_1 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,53 \text{ \AA}; \quad v_1 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

**Задача 13.2.** Визначити енергію фотона, який відповідає другій лінії в першій інфрачервоній серії (серії Пашена) атома водню.

**Розв’язок.** Енергія кванта світла, який випромінюється атомом водню визначається за формулою (13.5) при  $Z = 1$ . Згідно методичних вказівок серії Пашена відповідає  $n = 3$ , а другій лінії цієї серії відповідає набір чисел  $n = 3$ ,  $k = 3+2=5$ . Тому енергія фотона, яка відповідає другій лінії Пашена за формулою (13.6) дорівнює:

$$W = 13,6 \cdot \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) \text{ еВ} = 0,967 \text{ еВ}.$$

**Задача 13.3.** В яких межах повинні знаходитись довжини хвиль монохроматичного світла, щоб при збудженні атомів водню квантами цього світла в його спектрі випромінювання спостерігались три лінії?

**Розв’язок.** Для розв’язування бажано використати схему енергетичних рівнів електрона в атомі водню, яка приведена на рис.13.1. Згідно рисунка кванти монохроматичного світла, яке поглинається воднем, повинні переводити електрон у збуджений стан, який визначається квантовим числом  $n = 3$ . Значить, верхня межа довжини хвилі монохроматичного світла буде визначатись квантовим числом  $n = 3$ , а нижня межа –  $n = 4$ . За формулою (13.4) отримаємо, що

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right).$$

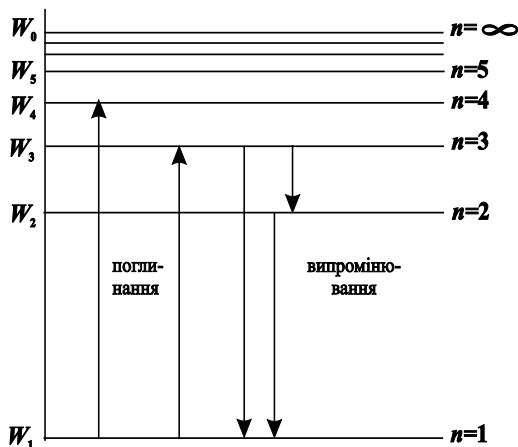


Рис.13.1. Енергетична схема рівнів електрона в атомі водню.

Тоді

$$\lambda_{\max} = \frac{9}{8R} = 1,026 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 1026 \text{ Å},$$

а

$$\lambda_{\min} = \frac{16}{15R} = 0,973 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 973 \text{ Å}.$$

Таким чином довжина хвилі монохроматичного світла повинна знаходитись в межах:

$$973 \text{ Å} < \lambda \leq 1026 \text{ Å}.$$

**Задача 13.4.** У якого воднеподібного іона різниця довжин хвиль головних (з найбільшою довжиною хвилі) ліній серії Бальмера і Лаймана дорівнює  $593 \text{ Å}$ ?

**Розв'язок.** Згідно методичних вказівок головній лінії серії Бальмера відповідають квантові числа  $n = 2$  і  $k = 3$ , а головній лінії серії Лаймана –  $n = 1$  і  $k = 2$ . Тоді за формулою (13.4) отримаємо:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{Б}}} = Z^2 R_{\lambda} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5Z^2 R_{\lambda}}{36},$$

$$\frac{1}{\lambda_{\text{Л}}} = Z^2 R_{\lambda} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3Z^2 R_{\lambda}}{4}.$$

Звідки знаходимо:

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{36}{5Z^2 R_{\lambda}}, \quad \lambda_{\text{Л}} = \frac{4}{3Z^2 R_{\lambda}}$$

i

$$\lambda_B - \lambda_L = \frac{88}{15Z^2 R_\lambda}.$$

Тоді

$$Z = \sqrt{\frac{88}{15(\lambda_B - \lambda_L) Z^2 R_\lambda}} \cong 3.$$

Іон літію ( $\text{Li}^{++}$ ) є тим хімічним елементом, у якого зарядове число  $Z = 3$ .

**Задача 13.5.** Визначити потенційну і кінетичну енергії електрона в атомі водню в основному стані ( $n = 1$ ), першому збудженому ( $n = 2$ ), другому збудженому ( $n = 3$ ) і т.д. збуджених станах.

**Розв'язок.** Повна енергія електрона в атомі водню визначається за формулою (13.3), якщо  $Z = 1$ . Кінетична енергія  $W_k$  електрона дорівнює половині модуля потенційної енергії  $W_\pi$ , тобто

$$W_k = -\frac{1}{2} W_\pi. \text{ Це не важко показати, якщо використати вирази для швидкості } v_n \text{ і радіусу } r_n \text{ задачі (13.1), врахувавши, що } W_k = \frac{mv_n^2}{2}, \text{ а } W_\pi = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}.$$

Тоді можемо записати співвідношення:

$$W_k + W_\pi = -\frac{13,6}{n^2} \text{ еВ}, \quad \text{або}$$

$$-\frac{1}{2} W_\pi + W_\pi = -\frac{13,6}{n^2} \text{ еВ}.$$

Звідки:

$$W_\pi = -\frac{27,2}{n^2} \text{ еВ}, \quad W_k = \frac{13,6}{n^2} \text{ еВ}.$$

Результати розрахунків приведені в таблиці.

$n$	1	2	3	4	...	20	...	$\infty$
$W_\pi$ , еВ	-27,2	-6,8	-3,02	-1,70		-0,068		0
$W_k$ , еВ	13,6	3,4	1,51	0,85		0,034		0

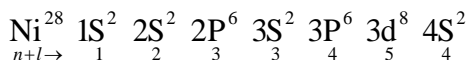
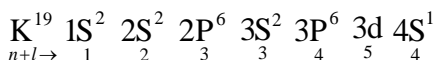
**Задача 13.6.** Електрон в збудженому атомі водню знаходиться в  $3d$  – стані. Визначити зміну модуля орбітального магнітного моменту електрона при його переході в  $2p$  – стан.

**Розв’язок.** Орбітальний магнітний момент електрона визначається за формулою (13.8). Для  $3d$  – стану  $l = 2$ , а для  $2p$  – стану  $l = 1$ , тому

$$\begin{aligned}\Delta p_m &= \mu_B \sqrt{2(2+1)} - \mu_B \sqrt{1(1+1)} = \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{2})\mu_B = 1,035\mu_B = 9,6 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл}.\end{aligned}$$

**Задача 13.7.** Написати електронні конфігурації атомів калію і нікелю, зарядові числа яких 19 і 28 відповідно.

**Розв’язок.** Електронна оболонка, що характеризується головним квантовим числом  $n$ , має підоболонки, які визначаються квантовими числами  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Згідно принципу Паулі на кожній підоболонці можуть знаходитись  $2(2l+1)$  електронів. Використавши правило заповнення підоболонки електронами (див. методичні вказівки), побудуємо електронні конфігурації атомів K і Ni.



**Задача 13.8.** Заповнена електронна оболонка характеризується головним квантовим числом  $n = 3$ . Вказати число електронів на цій оболонці, які мають однакові наступні квантові числа:

**а)**  $m_s = +\frac{1}{2}$ ; **б)**  $m = +1$ ; **в)**  $m_s = -\frac{1}{2}$  і  $m = 0$ ; **г)**  $m_s = +\frac{1}{2}$  і  $l = 2$ .

**Розв’язок.** Складемо таблицю можливих значень орбітального, магнітного і спінового квантових чисел для головного квантового числа  $n = 3$ . Із таблиці отримаємо відповіді до задачі: **а)** 9 електронів; **б)** 4 електрони; **в)** 3 електрони; **г)** 5 електронів.



$n$	$l$	$m$	$m_s$	Кількість електронів
3	0	0	$\pm \frac{1}{2}$	2
	1	-1	$\pm \frac{1}{2}$	2
		0	$\pm \frac{1}{2}$	2
		+1	$\pm \frac{1}{2}$	2
	2	-2	$\pm \frac{1}{2}$	2
		-1	$\pm \frac{1}{2}$	2
		0	$\pm \frac{1}{2}$	2
		+1	$\pm \frac{1}{2}$	2
		+2	$\pm \frac{1}{2}$	2

### 13.6. Задачі

**13.9.** Вирахувати період і кутову швидкість обертання електрона на першій боровській орбіті в атомі водню.

**13.10.** Визначити енергію фотона, який відповідає другій лінії в першій інфрачервоній серії (серії Пашена).

**13.11.** Знайти найменшу і найбільшу довжину хвилі спектральних ліній видимого випромінювання водню.

**13.12.** Атом водню, що знаходиться в основному стані, поглинув квант світла з довжиною хвилі  $\lambda = 1215 \text{ \AA}$ . Визначити радіус орбіти збудженого атома водню, на якій буде знаходитись електрон.

**13.13.** На якій із борівських орбіт (першій чи другій) електрон у відповідності із законами класичної електродинаміки випромінював би сильніше? В скільки раз? (Вказівка:  $P \approx r_n^2 \omega_n^4$ ).

**13.14.** В скільки раз зміниться частота обертання електрона навколо ядра в атомі водню при його переході з першої борівської орбіти на  $n$ -ну ( $n = 2$ )?

**13.15.** Вирахувати колову частоту обертання електрона на другій борівській орбіті іона  $\text{He}^+$ .

**13.16.** Вирахувати індукцію магнітного поля в центрі атома водню, яка обумовлена рухом електрона на першій борівській орбіті.

**13.17.** Знайти магнітний момент електрона, який знаходиться на першій борівській орбіті.

**13.18.** Визначити довжини хвиль ліній, що містяться в спектрі поглинання атомів водню в діапазоні довжин хвиль від 945 Å до 1300 Å.

**13.19.** Визначити квантове число  $n$  збудженого стану атому водню, коли відомо що при переході в основний стан атом випромінює: а) фотон з  $\lambda = 972,5$  Å; б) два фотони з  $\lambda_1 = 6563$  Å і  $\lambda_2 = 1216$  Å.

**13.20.** Вирахувати довжину хвилі  $\lambda$  спектральної лінії атомарного водню, частота якої дорівнює різниці частот наступних двох ліній серії Лаймана:  $\lambda_1 = 102,60$  нм і  $\lambda_2 = 97,27$  нм. До якої серії належить ця лінія?

**13.21.** В спектрі деяких воднеподібних іонів відомі довжини хвиль трьох ліній, які належать одній і тій же серії: 992 Å, 1085 Å, 1215 Å. Які спектральні лінії можна передбачити ще за допомогою цих ліній?

**13.22.** а) Вирахувати довжини хвиль перших трьох спектральних ліній серії Бальмера атомарного водню. б) При якому мінімальному числі штрихів дифракційна ґратка може розділити у другому порядку перші 30 спектральних ліній серії Бальмера атомарного водню?

**13.23.** В яких межах повинні лежати довжини хвиль монохроматичного світла, щоб при збудженні атомів водню квантами цього світла радіус орбіти електрона збільшився в 9 раз?

**13.24.** Які спектральні лінії з'являться в спектрі атомарного водню при опроміненні його ультрафіолетовим світлом з довжиною хвилі 100 нм?

**13.25.** В спектрі випромінювання атомарного водню відомі довжини хвиль двох ліній серії Бальмера 4860 Å і 3888 Å. Якій серії належить спектральна лінія, хвильове число якої дорівнює різниці хвильових чисел цих ліній?

**13.26.** В спектрі випромінювання атомарного водню відомі довжини хвиль серії Лаймана 972 Å і 949 Å. Якій серії належить спектральна лінія, хвильове число якої дорівнює різниці хвильових чисел цих ліній? Визначити довжину хвилі цієї лінії.

**13.27.** В спектрі випромінювання атомарного водню відомі довжини хвиль двох ліній серії Бальмера 6561 Å і 4339 Å. Якій серії належить спектральна лінія, хвильове число якої дорівнює різниці хвильових чисел цих ліній?

**13.28.** В спектрі випромінювання атомарного водню відомі довжини хвиль двох ліній серії Лаймана 1025 Å і 1215 Å. Якій серії належить спектральна лінія, хвильове число якої дорівнює різниці хвильових чисел цих ліній? Визначити довжину хвилі цієї лінії.

**13.29.** В спектрі випромінювання атомарного водню відомі довжини хвиль двох ліній серії Бальмара: 4102 Å і 4861 Å. Якій серії належить спектральна лінія, хвильове число якої дорівнює різниці хвильових чисел цих ліній? Яка довжина хвилі цієї лінії?

**13.30.** Довжина хвилі спектральної лінії деякої серії атома водню  $\lambda = 0,122$  мкм. Знайти довжину хвилі такої ж спектральної лінії цієї ж серії для  $\text{He}^+$ .

**13.31.** Знайти квантове число  $n$ , яке відповідає збудженому стану іона  $\text{He}^+$ , якщо при переході в основний стан цей іон випромінює послідовно два фотони з довжинами хвиль  $\lambda_1 = 108,5$  нм і  $\lambda_2 = 30,4$  нм.

**13.32.** Вирахувати постійну Рідберга  $R_\lambda$ , якщо відомо, що для іонів  $\text{He}^+$  різниця довжин хвиль між головними лініями серій Бальмера і Лаймана  $\Delta\lambda = 133,7$  нм.

**13.33.** У якого воднеподібного іона різниця довжин хвиль між головними лініями серій Бальмера і Лаймана дорівнює 59,3 нм.

**13.34.** Які спектральні лінії появляться при збудженні атомарного водню електронами з енергією 12,5 еВ.

**13.35.** Які лінії містить спектр поглинання атомарного водню в діапазоні довжин хвиль від 960 Å до 1300 Å.

**13.36.** Яку енергію необхідно надати атому водню, щоб його серія Бальмера мала тільки одну спектральну лінію?

**13.37.** Знайти енергію (в еВ) фотона, який відповідає другій лінії серії Бальмера.

**13.38.** На скільки електрон-вольт необхідно збільшити внутрішню енергію іона  $\text{He}^+$ , який знаходиться в основному стані, щоб він зміг випромінити фотон, який відповідає головній лінії серії Бальмера?

**13.39.** В спектрі випромінювання деяких воднеподібних іонів довжина хвилі третьої лінії серії Бальмера дорівнює 1085 Å. Знайти енергію електронів в основному стані цих іонів.

**13.40.** Знайти енергію зв'язку електрона в основному стані воднеподібних іонів, в спектрі випромінювання яких довжина хвилі третьої лінії серії Бальмера дорівнює 108,5 нм.

**13.41.** Отримати вираз і оцінити енергію  $W$ (еВ) квантів, які відповідають головній лінії серій Лаймана, Бальмера і Пашена атома водню.

**13.42.** Розрахувати для атома водню і іона  $\text{He}^+$  кінетичну енергію і енергію зв'язку електрона в основному стані.

**13.43.** Енергія зв'язку електрона в атомі гелію дорівнює 24,6 еВ. Яка необхідна енергія, щоб видалити обидва електрони з цього атома?

**13.44.** Електрон, який пройшов різницю потенціалів 4,9 В, зазнає зіткнення з атомом ртуті і переводить його в перший збуджений стан. Яку довжину хвилі має фотон, що випромінюється атомом ртуті при переході в основний стан?

**13.45.** Якої довжини хвилі виникають спектральні лінії, якщо атом водню перевести в стан 3S?

**13.46.** Атом водню, що знаходиться в стані спокою, випромінює фотон, частота якого відповідає головній лінії (з найбільшою довжиною хвилі) серії Лаймана. Знайти швидкість атома після випромінювання фотона.

**13.47.** Вирахувати швидкість електронів, які вириваються електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі  $\lambda = 18,0$  нм із іонів  $\text{He}^+$ , що знаходяться в основному стані.

**13.48.** а) Визначити швидкість атома водню після випромінювання ним фотона в результаті переходу із першого збудженого стану в основний. До випромінювання атом водню знаходився в стані спокою. б) На скільки відсотків відрізняється енергія фотона від енергії даного переходу?

**13.49.** Скільки  $s$ -,  $p$ - і  $d$ - електронів може знаходитись в атомі на першому, другому і третьому енергетичних рівнях?

**13.50.** Яке максимальне число електронів в атомі можуть мати однакові наступні квантові числа: а)  $n, l, m, m_s$ ; б)  $n, l, m$ ; в)  $n, l$ ; г)  $n$ .

**13.51.** Написати електронні конфігурації атомів: 1) бора; 2) вуглецю; 3) натрію; 4) заліза; 5) міді; 6) срібла; 7) урану.

**13.52.** Визначити можливі значення проекції моменту імпульсу орбітального руху електрона в атомі по відношенню до зовнішнього магнітного поля. Електрон знаходиться в  $d$  – стані.

**13.53.** Атом водню, який знаходиться в основному стані, поглинув світловий квант, енергія якого  $h\nu = 10,2$  еВ. Визначити, як при цьому змінився модуль моменту імпульса орбітального руху електрона.

**13.54.** Атом водню в основному стані знаходиться на відстані 2,5 см від довгого прямого провідника зі струмом  $I = 10$  А. Знайти силу, яка діє на атом.

**13.55.** Чи може вектор магнітного моменту орбітального руху електрона  $p_m$  встановитись строго вздовж ліній магнітної індукції?

**13.56.** Визначити можливі значення магнітного моменту  $p_m$ , обумовленого орбітальним рухом електрона у збудженому стані атома водню, якщо енергія збудження  $W = 12,9$  еВ.

**13.57.** Вузький пучок атомарного водню в дослідах Штерна і Герлаха пропускається через поперечне неоднорідне магнітне поле, градієнт якого  $\frac{\partial V}{\partial x} = 10^3 \frac{\text{Тл}}{\text{м}}$ , а протяжність  $b = 8$  см. Швидкість атомів водню  $v = 4 \cdot 10^3$  м/с. Визначити величину розщеплення атомного пучка на виході його із магнітного поля. Всі атоми пучка водню знаходяться в основному стані.

#### Додаткові задачі

**13.58.** Радіус першої борівської орбіти електрона в атомі водню  $r = 0,53 \text{ \AA}$ . ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ). Чому дорівнює період  $T$  обертання електрона навколо ядра по першій орбіті та індукція магнітного поля  $B$ , яке створює в центрі атома орбітальний рух електрона по першій орбіті?

**13.59.** Яку довжину хвилі повинно мати світло, що здатне іонізувати атом водню?

**13.60.** При опроміненні ультрафіолетовим світлом  $\lambda = 850 \text{ \AA}$  спостерігається виривання електронів з атомів водню (фотоіонізація). Яку швидкість мають такі електрони?

**13.61.** Розрахувати для атомарного водню:

а) довжини хвиль перших трьох спектральних ліній серії Бальмера; б) мінімальну роздільну здатність  $\lambda/\delta\lambda$  спектрального приладу, при якій можна розрізнити перші  $N = 20$  ліній серії Бальмера.

## 14. ОСНОВИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

### 14.1. Питання теми

1. Гіпотеза де Бройля.
2. Співвідношення невизначеностей Гайзенберга.
3. Рівняння Шредінгера та його використання для найпростіших випадків руху частинок.

### 14.2. Основні визначення та формули

1. Співвідношення де Бройля для енергії і імпульсу частинок:

$$W = \hbar\omega, \quad (14.1)$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}, \quad (14.2)$$

де  $\omega$  – частота дебройлівської хвилі,  $p = mv$  – кількість руху (імпульс) частинки,  $\lambda$  – довжина хвилі де Бройля,  $\hbar = h/(2\pi)$  – стала Планка.

2. Співвідношення невизначеностей Гайзенберга:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar, \quad (14.3)$$

де  $\Delta p_x$  невизначеність проекції імпульсу на вісь  $x$ ,  $\Delta x$  – невизначеність координати. Для енергії і часу

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (14.4)$$

де  $\Delta W$  – невизначеність енергії,  $\Delta t$  – невизначеність часу.

3. Ймовірність знаходження частинки в об'ємі  $dV$

$$dP = |\psi(x)|^2 dV, \quad (14.5)$$

де  $\psi$  – хвильова функція,  $|\psi|^2$  – густина ймовірності.

4. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів (одномірний випадок)

$$\frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U(x)) \cdot \Psi(x) = 0, \quad (14.6)$$

де  $\Psi(x)$  – координатна частина хвильової функції, яка описує стан частинок,  $W$  – повна енергія частинки,  $U(x)$  – її потенційна енергія.

5. Нормована власна хвильова функція і енергія частинки, яка знаходиться в нескінченно глибокій одномірній потенційній ямі

( $U=0$  при  $0 < x < l$  і  $U = \infty$  при  $0 \geq x \geq l$ ):

$$\psi(x) = i\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin(\pi nx/l), \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (14.7)$$

$$W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2} = \frac{h^2 n^2}{8ml^2}, \quad (14.8)$$

де  $l$  – ширина ями,  $m$  – маса частинки,  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

**6.** Коефіцієнт відбивання  $R$  і коефіцієнт проходження  $D$  хвиль де Бройля через низький ( $U_0 < W$ ) потенційний бар'єр нескінченної ширини (рис.14.1) визначається за формулами:

$$R = (k_1 - k_2)^2 / (k_1 + k_2)^2, \quad (14.9)$$

$$D = 4k_1 k_2 / (k_1 + k_2)^2, \quad (14.10)$$

де  $k_1$  і  $k_2$  – значення хвильового числа хвиль де Бройля для областей 1 і 2 (рис.14.1).

**7.** Коефіцієнт прозорості  $D$  потенційного бар'єру довільної форми  $U(x)$  визначається за формулою:

$$D = D_0 \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - W)} dx \right\}, \quad (14.11)$$

де  $W$  – повна енергія частинки,  $x_1$  і  $x_2$  – координати точок, для яких  $U(x) = W$ ,  $D_0 \cong 1$ .

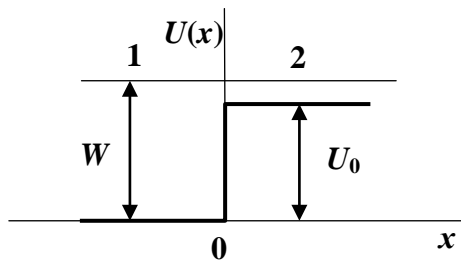


Рис.14.1.



### 14.3. Питання на самопідготовку

1. В чому суть гіпотези де Бройля і корпускулярно–хвильового дуалізму матерії?
2. Чи у всіх випадках руху матеріальних тіл необхідно враховувати гіпотезу де Бройля?
3. Що означає координатно–імпульсний метод описання руху частинок?
4. Що визначають співвідношення невизначеностей Гайзенберга?
5. Розв’язок рівняння Шредінгера для нескінченно глибокої потенційної ями. Квантування енергії.
6. Розв’язок рівняння Шредінгера для потенційного бар’єру кінцевої і нескінченної ширини. Тунельний ефект.
7. Холодна емісія і причини її виникнення.

### 14.4. Методичні вказівки

1. Часто для розв’язку задачі вимагається виразити імпульс  $p$  частинки через її кінетичну енергію  $W_k$  (або навпаки). При цьому необхідно розрізняти випадки класичних і релятивістських частинок. Зауважимо, що у всіх випадках руху електрона в атомі, де його кінетична енергія дорівнює декільком електрон-вольтам, релятивістським ефектом можна знехтувати.

Якщо  $W_k \ll m_e c^2$ , де  $m_e c^2 = 0,51 \cdot 10^6 \text{ eV} = 0,51 \text{ MeV}$  – енергія спокою електрона ( $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ), то в даному випадку електрон є класичною частинкою. Тоді імпульс і кінетична енергія зв’язані співвідношенням  $W_k = p^2 / (2m_e)$ , звідки  $p = \sqrt{2m_e W_k}$ . Якщо  $W_k > m_e c^2$ , то електрон необхідно вважати релятивістською частинкою і тоді:  $p = \sqrt{2m_e W_k (1 + W_k / (m_e c^2))}$ .

2. За допомогою співвідношення невизначеностей (14.3) розв’язують не тільки задачі, в яких вимагається визначити найменше значення однієї із двох невизначеностей  $\Delta x$  або  $\Delta p_x$  при заданому значенні іншої (в цьому випадку у формулах пишуть знак рівності), а і задачі, в яких приблизно розраховують найменше значення цих величин: лінійні розміри області  $l$ , в якій знаходиться частинка або її імпульс  $p$ . При цьому керуються такими міркуваннями: а) Якщо

задаються лінійні розміри області  $l$ , в якій знаходиться частинка, то вважають  $\Delta x \cong l$ , якщо відомий модуль імпульсу  $p$ , але невідомий його напрям, то вважають  $\Delta p \cong p$ . б) Невідома величина не може бути меншою своєї невизначеності, тобто за її мінімальне значення приблизно беруть її мінімальну невизначеність:  $l_{min} = (\Delta x)_{min}$ ;  $p_{min} = (\Delta p)_{min}$ .

3. Із формули (14.11) можна отримати формули прозорості для випадків прямокутних потенційних бар'єрів кінцевої і нескінченної ширини для випадку  $W < U_0$ . Для цього необхідно прийняти  $W(x) < U_0 = \text{const}$ .

## 14.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 14.1.** Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона, кінетична енергія якого 1) 100 еВ 2) 3 МеВ.

**Розв'язок.** За формулою (14.2) довжина хвилі де Бройля  $\lambda = 2\pi\hbar/p = h/p$ . Таким чином задача зводиться до знаходження модуля імпульсу (кількості руху) електрона.

1) Кінетична енергія і імпульс для класичного випадку ( $100 \text{ eV} \ll m_e c^2 = 510000 \text{ eV}$ ) зв'язані співвідношенням  $W_k = p^2/(2m_e)$ . Звідки  $p = \sqrt{2m_e W_k}$ . Тоді

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e W_k}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 1,23 \text{ \AA}.$$

2)  $W_k = 3 \text{ Мев} > m_e c^2 = 0,51 \text{ Мев}$  і тому електрон необхідно вважати релятивістською частинкою (див. методичні вказівки). Тоді

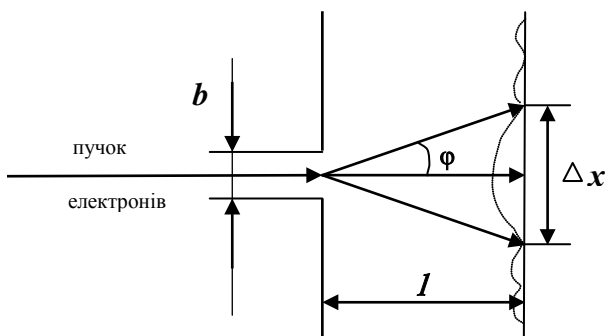
$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2m_e W_k (1 + W_k/(m_e c^2))}} = \\ &= \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} (1 + 3/0,51)}} = \\ &= 2,7 \cdot 10^{-13} \text{ м} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}. \end{aligned}$$

Якщо електрон не вважати релятивістською частинкою з  $W_K = 3\text{Мев}$ , то тоді

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e W_K}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}.$$

Цей неправильний результат перевищує приблизно у 2,6 рази правильний результат  $\lambda = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$ .

**Задача 14.2.** Паралельний пучок електронів падає нормально на діафрагму з вузькою прямокутною щілиною, ширина якої  $b = 2 \text{ мкм}$ . Визначити швидкість електронів (вважаючи її однаковою для всіх частинок), якщо відомо, що на екрані, який знаходиться на відстані  $l = 50 \text{ см}$  від щілини і паралельний їй, ширина центрального



**Рис. 14.2.**

дифракційного максимуму  $\Delta x = 80 \text{ мкм}$  (рис.14.2).

**Розв'язок.** Дифракція електронів є наслідком хвильових властивостей частинок. Тому для визначення швидкості електронів застосуємо формулу де Бройля (14.2), звідки  $v = h/(m\lambda)$ . Щоб знайти довжину хвилі де Бройля  $\lambda$ , скористаємось тією обставиною, що дифракційна картина, яка виникає при проходженні через вузьку щілину паралельного пучка електронів, приблизно відповідає дифракційній картині, яка отримується від цієї ж щілини при освітленні її паралельним пучком світла, довжина хвилі якого

дорівнює довжині хвилі де Бройля для електрона. Згідно (11.3) умова мінімуму дифракції для світла така:  $b \sin \varphi = n\lambda$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Якщо

врахувати, що для малих кутів  $\sin \varphi \cong \tan \varphi = \frac{\Delta x}{2l}$  (рис.14.2), то для  $n=1$   $\lambda = b\Delta x/(2l)$ , або  $\frac{h}{mv} = \frac{b\Delta x}{2l}$ , де  $m = m_e/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  –

релятивістська маса електрона,  $c$  – швидкість світла,  $m_e$  – маса спокою електрона. Тому

$$h \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_e v} = \frac{b\Delta x}{2l}. \quad (1)$$

Розв'язавши рівняння (1) відносно  $v$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} v &= \left( \left( \frac{m_e b \Delta x}{2hl} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \left( \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 0,5} \right)^2 + \frac{1}{9 \cdot 10^{16}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= (4,84 \cdot 10^{-14} + 1,11 \cdot 10^{-17})^{-\frac{1}{2}} = 4,55 \cdot 10^6 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

**Зауваження.** Так як  $v \ll c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ , то маса електрона приблизно дорівнює масі спокою електрона, тобто  $m = m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$  і релятивістську формулу для маси електрона можна було і не використовувати.

**Задача 14.3.** Паралельний пучок атомів водню із швидкістю  $v = 1500 \text{ м/с}$  падає нормально на діафрагму з вузькою щілиною, за якою на відстані  $l = 1,5 \text{ м}$  розташований екран (рис.14.3). Оцінити ширину щілини, при якій ефективна ширина зображення на екрані буде мінімальною. Визначити ефективну ширину зображення щілини на екрані.

**Розв'язок.** Атоми водню, проявляючи хвильові властивості, дають розмите зображення щілини на екрані. Ширина зображення  $y = b + 2\Delta$ , де  $b$  – ширина щілини,  $\Delta$  – додаткове розширення, яке зв'язане з невизначеністю імпульсу атома водню, коли він проходить щілину. Згідно формули (14.3)

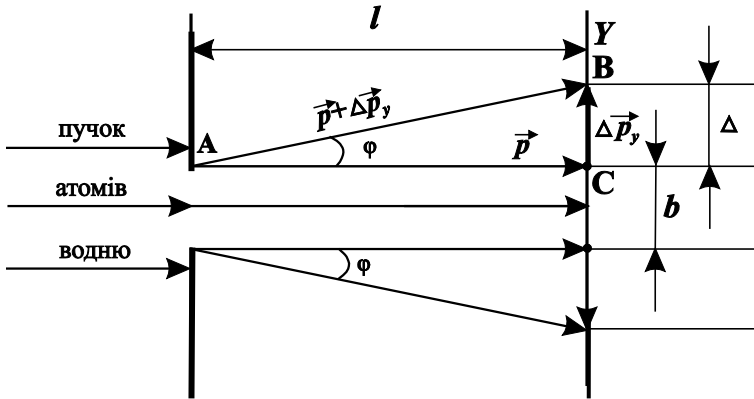


Рис.14.3.

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar.$$

Якщо прийняти, що  $\Delta y = b$ , то  $\Delta p_y \geq \hbar/b$ . Із трикутника ABC можемо отримати таке співвідношення:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta p_y}{p} = \frac{\Delta}{l},$$

де  $p$  – імпульс атомів водню, що падають на щілину.

Звідки знаходимо, що  $\Delta = \frac{\Delta p_y l}{p} = \frac{\hbar l}{pb}$ . Тоді зображення щілини

$$y = b + \frac{2\hbar l}{pb}. \quad (1)$$

Дослідимо функцію  $y(b)$  на екстремум, тобто

$$\frac{dy}{db} = 1 - \frac{2\hbar l}{pb^2} = 0. \quad (2)$$

Із рівності (2) знаходимо, що ширина щілини  $b$ , при якій її зображення є мінімальним, буде

$$b = \sqrt{\frac{2\hbar l}{p}} = \sqrt{\frac{2\hbar l}{mv}} = \sqrt{\frac{2\hbar l N_A}{Mv}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,054 \cdot 10^{-34} \cdot 1,5 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{1 \cdot 10^{-3} \cdot 1500}} \text{ м} = 11,3 \text{ мкм},$$

де  $N_A$  – число Авогадро,  $M$  – молярна маса атома водню.

Підставивши значення  $b = 11,3$  мкм в (1), отримаємо, що

$$y_{\text{ефект}} = 2b = 22,6 \text{ мкм}.$$

**Задача 14. 4.** Середня кінетична енергія електрона в основному стані атома водню дорівнює 13,6 еВ. За допомогою співвідношення невизначеностей знайти похибку, з якою можна вирахувати координату електрона в атомі.

**Роз’язок.** За формулою (14.3) невизначеність координати частинки  $\Delta x \geq \hbar / \Delta p_x$ . Величина  $\Delta p_x$  невідома, однак модуль імпульсу  $p$  (точніше, його середнє квадратичне значення) легко знайти, оскільки відома середня кінетична енергія електрона  $W_k$ . Тоді  $p = \sqrt{2m_e W_k}$ . Модуль імпульсу ми знайшли, але напрямок вказати не можемо. Це означає, що проекція імпульсу  $p_x$  на яку-небудь фіксовану вісь  $x$  є невизначеною. Тому будемо вважати, що  $\Delta p_x \cong p = \sqrt{2m_e W_k}$  тобто величини  $\Delta p_x$  і  $p$  одного порядку. Тоді  $\Delta x \geq \hbar / \sqrt{2m_e W_k}$ . Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\Delta x = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,5 \text{ Å}.$$

**Висновок.** Найменша допустима співвідношенням невизначеностей, похибка визначення координати електрона в атомі водню, який знаходиться в основному стані, є величина порядку 0,5 Å. Якщо згадати, що радіус першої електронної орбіти в атомі водню дорівнює 0,53 Å, то можна сказати, що невизначеність знаходження електрона в атомі водню майже дорівнює половині діаметра атома.

**Задача 14.5.** Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімально можливу енергію електрона в атомі водню і відповідну їй ефективну відстань електрона до ядра.

**Розв'язок.** У співвідношенні (14.3) будемо вважати, що  $p \approx \Delta p, \Delta x \approx r$ , тоді  $p = \hbar / r$ . Повна енергія електрона в атомі водню  $W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}}$ , де  $W_{\text{к}} = p^2 / (2m_e)$  – кінетична, а  $W_{\text{п}} \approx e^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$  – потенційна енергія. Це означає, що

$W(r) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ . Ефективну відстань електрона до ядра знайдемо із умови:

$$\frac{dW(r)}{dr} = -\frac{2\hbar^2 r}{2m_e r^4} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0.$$

Звідки

$$r_{\text{еф}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,53 \text{ \AA}.$$

Тоді

$$W_{\text{min}} = -\frac{m_e \cdot e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = -13,6 \text{ еВ}.$$

**Задача 14.6.** Електрон знаходиться в одномірній нескінченно глибокій потенційній ямі, ширина якої  $l$ . Розрахувати найменшу різницю двох сусідніх енергетичних рівнів (в електронвольтах) електрона у двох випадках: **а)**  $l = 10 \text{ см}$  (розміри електронно-променевої трубки); **б)**  $l = 10 \text{ \AA}$  (розміри атома).

**Розв'язок.** За формулою (14.8) різниця енергій між двома сусідніми рівнями  $n$  і  $n+1$  дорівнює:

$$\Delta W = W_{n+1} - W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e l} (2n+1).$$

Найменша різниця буде тоді, коли  $n = 1$ . Виконаємо розрахунки для двох випадків:

$$\text{а) } \Delta W = \frac{3\hbar^2}{8m_e l^2} = \frac{3(6,62 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ еВ} = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ еВ};$$

$$\text{б) } \Delta W = 1,1 \text{ еВ}.$$

**Висновок.** Для випадку: **а)** відстань між сусідніми рівнями дуже мала ( $\Delta W \ll kT$ ) і тому квантуванням енергії електрона в електронно-променевій трубці нехтують. Енергія електрона розглядається як неперервна величина. У випадку

**б)** ( $\Delta W > kT$ ): квантуванням енергії електрона знехтувати не можна і тому енергія електрона в атомі є дискретна величина. Для кімнатних температур  $kT \approx 0,025$  еВ.

**Задача 14.7.** Пучок електронів, енергія яких  $W = 25$  еВ, зустрічає на своєму шляху потенційний бар'єр, висота якого  $U_0 = 9$  еВ (рис.14.4). Визначити коефіцієнт відбивання  $R$  і коефіцієнт проходження  $D$  хвиль де Бройля для такого бар'єру.

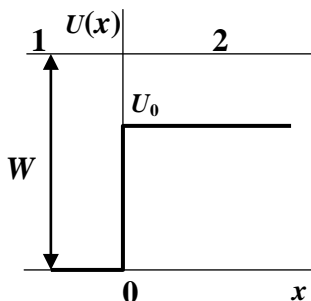


Рис.14.4.

**Розв'язок.** Так як  $U_0 < W$ , то даний бар'єр є низьким і для розрахунку  $R$  та  $D$  можна скористатись формулами (14.9) і (14.10). Щоб знайти хвильові числа  $k_1$  і  $k_2$  виразимо довжини хвиль де Бройля  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  для областей 1 і 2 через імпульси  $p_1$  і  $p_2$  електрона, а останні

через його кінетичну енергію.

Для області 1 кінетична енергія  $W_k$  дорівнює повній енергії  $W$ , тому

$$p_1 = \sqrt{2m_e W} \quad \text{і} \quad \lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \frac{h}{\sqrt{2m_e W}},$$

а

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi\sqrt{2m_e W}}{h}.$$

Для області 2,

$$W = W_k + U_0 = \frac{p^2}{2m_e} + U_0.$$

Звідки знаходимо, що



$$p_2 = \sqrt{2m_e(W - U_0)} \quad \text{і} \quad \lambda_2 = \frac{h}{p_2} = \frac{h}{\sqrt{2m_e(W - U_0)}},$$

а

$$k_2 = \frac{2\pi\sqrt{2m_e(W - U_0)}}{h}.$$

Підставимо вирази для  $k_1$  і  $k_2$  у формули (14.9) і (14.10). Тоді отримаємо:

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(\sqrt{W} - \sqrt{W - U_0})^2}{(\sqrt{W} + \sqrt{W - U_0})^2} = \left( \frac{5 - 4}{5 + 4} \right)^2 = \frac{1}{81},$$

$$D = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{4\sqrt{W(W - U_0)}}{(\sqrt{W} + \sqrt{W - U_0})^2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 4}{(5 + 4)^2} = \frac{80}{81}.$$

Закон збереження частинок виконується, тобто  $R + D = 1$ .

**Задача 14.8.** Розрахувати коефіцієнт прозорості для бар'єру, який зображений на рисунку 14.5. Максимальна висота бар'єру  $U_0 = 10$  еВ,  $a = 10$  Å, енергія частинки  $W = 6$  еВ, маса частинки  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

**Розв'язок.** Для розрахунку коефіцієнту прозорості скористуємось формулою (14.11). Із формули видно, що задача зводиться до розрахунку інтеграла:

$$I = \sqrt{2m} \int_0^{x_1} (U(x) - W)^{1/2} dx,$$

де  $U(x) = b + kx$  – лінійна функція координати  $x$ . Із умови, що

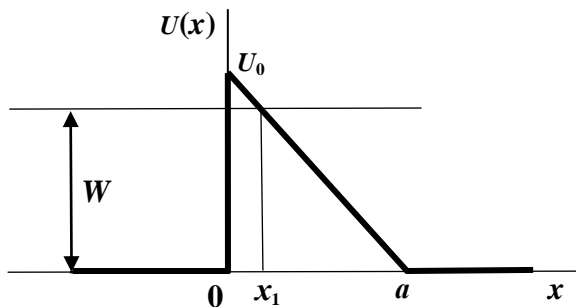


Рис.14.5.

$U(0) = U_0$ , а  $U(a) = 0$ , знаходимо:  $b = U_0$ ,  $k = -U_0/a$ .

Координату  $x_1$  знайдемо із умови:

$$U(x_1) = U_0 - \frac{U_0}{a} x_1 = W. \text{ Звідки } x_1 = \frac{(U_0 - W)a}{U_0}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2m} \int_0^{x_1} \left( U_0 - W - \frac{U_0}{a} x \right)^{1/2} dx = \\ &= -\frac{2\sqrt{2m}}{3U_0} a \left( U_0 - W - \frac{U_0}{a} x \right)^{3/2} \Big|_0^{x_1} = \frac{2\sqrt{2m}}{3U_0} a (U_0 - W)^{3/2}. \end{aligned}$$

Підставимо це значення інтеграла у формулу (14.11) і отримаємо вираз для коефіцієнта прозорості:

$$D = D_0 \exp \left\{ -\frac{4\sqrt{2ma}}{3\hbar U_0} (U_0 - W)^{3/2} \right\}.$$

Після підстановки числових значень з урахуванням того, що  $D_0 \approx 1$ , отримаємо:

$$D = \exp \left\{ -\frac{4\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-9} \cdot (4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19})^{3/2}}}{3 \cdot 1,054 \cdot 10^{-34} \cdot 10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \right\} = 4,2 \cdot 10^{-3}.$$

## 14.6. Задачі

**14.9.** Яку прискорюючи різницю потенціалів повинен пройти електрон, щоб його довжина хвилі де Бройля була 1 Å?

**14.10.** Показати, що на довжині борівської орбіти електрона укладається ціле число його довжин хвиль де Бройля.

**14.11.** Вирахувати довжину хвилі де Бройля для електрона, який знаходиться в основному стані атома водню.

**14.12.** Вирахувати довжини хвиль де Бройля для електрона, протона і атома урану, які всі мають однакову кінетичну енергію 100 еВ.

**14.13.** Яку енергію необхідно додатково надати електрону, щоб його дебройлівська довжина хвилі зменшилась від 1 Å до 0,5 Å?

**14.14.** Паралельний пучок електронів, які рухаються з однаковими швидкостями  $v = 1000$  км/с, падає нормально на діафрагму у вигляді довгої щілини, ширина якої  $b = 1$  мкм. Проходячи через щілину, електрони розсіюються і утворюють дифракційну картину на екрані, який розташований на відстані  $l = 50$  см від щілини і паралельний площині діафрагми. Визначити лінійну відстань між першими дифракційними мінімумами і порівняти її з розмірами щілини.

**14.15.** При якій швидкості електрона його дебройлівська довжина хвилі буде дорівнювати: а) 500 нм; б) 0,01 нм? (У випадку електромагнітних хвиль перша довжина хвилі відповідає видимій частині спектру (зелене світло), інша – рентгенівським променям.)

**14.16.** Знайти середню довжину хвилі де Бройля теплового нейтрона, тобто нейтрона, який знаходиться в тепловій рівновазі з оточуючим середовищем при кімнатній температурі  $T = 300$  К.

**14.17.** Вирахувати довжини хвиль де Бройля атомів водню і ртуті, які мають енергії: а) 1 еВ і б)  $10^6$  еВ, а також в) середню теплову енергію при  $0^\circ\text{C}$ .

**14.18.** На діафрагму з двома вузькими щілинами, відстань між якими  $d = 50$  мкм, нормально падає паралельний пучок електронів, які прискорені різницею потенціалів  $U = 25$  В. Визначити відстань між сусідніми максимумами дифракційної картини на екрані, який розташований на відстані  $l = 1$  м від щілин.

**14.19.** При збільшенні кінетичної енергії електрона на  $W_k = 200$  еВ його дебройлівська довжина хвилі змінилась у  $\eta = 2,0$  рази. Знайти початкову довжину хвилі де Бройля електрона.

**14.20.** Вирахувати дебройлівську довжину хвилі електрона і протона, які рухаються з кінетичною енергією 1,00 кеВ. При яких значеннях кінетичної енергії їхня довжина хвилі буде дорівнювати 1 Å.

**14.21.** Знайти довжину хвилі де Бройля молекул водню, які рухаються із середнього квадратичного швидкістю в газі при температурі  $0^\circ\text{C}$ .

**14.22.** Яку додаткову енергію необхідно надати електрону, імпульс якого дорівнює  $15,0 \text{ кеВ}/c$  ( $c$  – швидкість світла у вакуумі), щоб його довжина хвилі де Бройля стала дорівнювати  $0,5 \text{ \AA}$ ?

**14.23.** Вузкий пучок моноенергетичних електронів падає під кутом ковзання  $\theta = 30^\circ$  на природну грань монокристала алюмінію. Відстань між сусідніми кристалічними площинами, які паралельні цій грані монокристала,  $d = 0,20 \text{ нм}$ . При деякій прискорюючій різниці потенціалів  $U$  спостерігався максимум дзеркального відбивання. Знайти  $U$ , якщо відомо, що наступний максимум дзеркального відбивання виникає при збільшенні прискорюючої різниці потенціалів  $U$  в  $2,25$  рази.

### Співвідношення невизначеностей

**14.24.** Оцінити найменші похибки, з якими можна визначити швидкості електрона, протона і кульки, маса якої  $1 \text{ г}$ , якщо координати частинок і кульки встановлені з невизначеністю в  $1 \text{ мкм}$ .

**14.25.** Показати, що якщо невизначеність місцеположення частинки дорівнює  $\lambda/(2\pi)$ , де  $\lambda$  – її дебройлівська довжина хвилі, то невизначеність швидкості частинки буде дорівнювати по порядку величини самій швидкості.

**14.26.** В скільки раз дебройлівська довжина хвилі частинки менша невизначеності її координати, якщо невизначеність імпульсу складає  $1\%$ ?

**14.27.** Якщо припустити, що невизначеність координати частинки, яка рухається, дорівнює її дебройлівській довжині хвилі, то яка буде відносна невизначеність імпульсу цієї частинки ?

**14.28.** Вирахувати дебройлівську довжину хвилі електрона і протона, які рухаються з кінетичною енергією  $1,00 \text{ кеВ}$ . При яких значеннях кінетичної енергії їх довжина хвилі буде дорівнювати  $1 \text{ \AA}$ ?

**14.29.** В деякий момент часу область локалізації вільного електрона  $\Delta x_0 = 0,1 \text{ нм}$ . Оцінити ширину області локалізації електрона через проміжок часу  $t = 0,1 \text{ с}$  після цього моменту.

**14.30.** Оцінити мінімальну кінетичну енергію електрона, який локалізований в області, розміри якої  $l = 0,10$  нм.

**14.31.** Електрон, кінетична енергія якого  $W_k = 13,6$  еВ, локалізований в області, розміри якої  $l = 1,06$  Å. Оцінити відносну невизначеність швидкості електрона.

**14.32.** Оцінити невизначеність швидкості електрона в атомі водню, вважаючи, що його діаметр  $d \approx 1$  Å. Порівняти знайдене значення невизначеності швидкості із швидкістю електрона на першій борівській орбіті.

**14.33.** Виходячи із співвідношення невизначеностей, показати, що електрони не можуть знаходитись всередині атомних ядер (розміри ядра порядку  $10^{-15}$  м). Середня питома енергія зв'язку ядер 8 МеВ/нуклон.

**14.34.** Прямолінійна траєкторія частинок в камері Вільсона це ланцюжок маленьких крапельок туману, розмір яких  $d = 1$  мкм. Чи можна, спостерігаючи слід електрона з кінетичною енергією  $W_k = 1$  кеВ, виявити в його русі відхилення від класичних законів?

**14.35.** Прискорююча напруга на електронно-променевій трубці  $U \approx 10$  кВ. Відстань від електронної гармати до екрана  $l \approx 20$  см. Оцінити невизначеність координати електрона на екрані, якщо слід електронного пучка на екрані має діаметр  $d = 0,5$  мм.

**14.36.** Атом випромінює фотон з довжиною хвилі  $\lambda = 0,58$  мкм за час  $\tau = 10^{-8}$  с. Оцінити невизначеність  $\Delta x$ , з якою можна встановити координату фотона в напрямку його руху, а також відносну невизначеність його довжини хвилі.

**14.37.** Показати, що уявлення про класичний рух електрона в атомі борівськими орбітами протирічить співвідношенню невизначеності Гайзенберга (14.3).

**14.38.** Нерелятивістська частинка, яка вільно рухається, має відносну невизначеність кінетичної енергії  $\Delta W_k / W \approx 1,6 \cdot 10^{-4}$ . Оцінити, в скільки раз невизначеність координати такої частинки більша її дебройлівської довжини хвилі.

**14.39.** Із печі, температура якої  $t = 1200\text{ }^{\circ}\text{C}$ , виходить пучок атомів срібла. Оцінити мінімальний розмір плями на екрані, який розташований на відстані  $l = 1\text{ м}$  від вихідної щілини печі.

### Найпростіші випадки руху мікрочастинок

**14.40.** Поясніть, чому хвильова функція, яка описує рух мікрочастинок повинна бути: а) неперервною; б) гладкою; в) кінцевою; г) принципіально комплексною.

**14.41.** Чому фізичний зміст має квадрат модуля хвильової функції  $|\psi|^2$ , а не сама хвильова функція  $\psi$ ?

**14.42.** Частинка знаходиться в нескінченно глибокій потенціальній ямі. Знайти відношення різниці енергій двох сусідніх рівнів  $W_{n+1,n}$  до енергії рівня  $W_n$  в таких випадках: 1)  $n = 3$ ; 2)  $n = 10$ ; 3)  $n = \infty$ . Пояснити отриманий результат.

**14.43.** Електрон знаходиться в потенційній ямі, ширина якої  $l = 5\text{ \AA}$ . Знайти найменшу різницю енергій енергетичних рівнів електрона.

**14.44.** Частинка в потенційній ямі, ширина якої  $l$ , знаходиться у збудженому стані ( $n=2$ ). Визначити, в яких точках інтервалу ( $0 < x < l$ ) густина ймовірності знаходження частинки має максимальне і мінімальне значення.

**14.45.** Електрон знаходиться в нескінченно глибокій одномірній потенційній ямі, ширина якої  $l = 1\text{ см}$ . Визначити густину енергетичних рівнів  $\frac{dn}{dW}$  електрона біля рівня з номером  $N = 10^{10}$ .

**14.46.** Мікрочастинка знаходиться в одномірній нескінченно глибокій потенційній ямі, ширина якої  $l$ . Показати, що можливі тільки такі енергетичні стани частинки, для яких в ямі укладається ціле число дебройлівських півхвиль.

**14.47.** Частинка знаходиться в одномірній прямокутній потенційній ямі з нескінченно високими стінками. Знайти масу

частинки, якщо ширина ями  $l = 10$  нм і різниця енергій 3 – го і 2 – го енергетичних рівнів  $\Delta W = 1,88$  еВ.

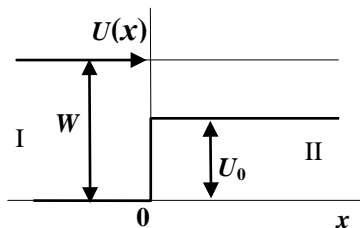


Рис. 14.6.

**14.48.** Частинка, маса якої  $m$ , падає на прямокутний потенційний бар'єр безкінечної ширини, висота якого  $U_0$  (рис.14.6), причому  $U_0 < W$ . Знайти розподіл густини ймовірності  $\psi\psi^*$  місцезнаходження частинки для випадку  $W = 4U_0/3$ . Зобразити приблизний графік залежності  $\psi\psi^*$ .

**14.49.** Частинка, маса якої  $m$ , падає зліва на прямокутний потенційний бар'єр безкінечної ширини, висота якого  $U_0$ . Енергія частинки дорівнює  $W$ , причому  $U_0 > W$  (рис.14.7). Знайти розподіл густини

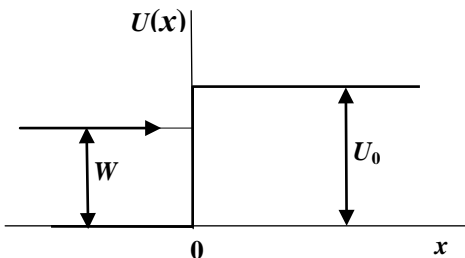


Рис. 14.7.

ймовірності  $\psi\psi^*$  місцезнаходження частинки для випадку  $W = U_0/2$ . Зобразити приблизний графік функції  $\psi\psi^*$ .

**14.50.** Електрон, кінетична енергія якого  $W = 100$  еВ, падає на потенційний бар'єр, висота якого  $U_0 = 64$  еВ (рис.14.6). Визначити ймовірність того, що електрон відіб'ється від бар'єру.

**14.51.** Кінетична енергія електрона у два рази більша висоти потенційного бар'єру. Визначити коефіцієнт відбивання і коефіцієнт проходження електронів на границі бар'єру (рис.14.6).

**14.52.** Коефіцієнт проходження електронів через низький потенційний бар'єр дорівнює коефіцієнту відбивання. Визначити, в скільки раз кінетична енергія електронів більша висоти потенційного бар'єру (рис.14.6).

**14.53.** Вирахувати коефіцієнт проходження електрона, енергія якого  $W = 100$  еВ, через потенційний бар'єр, висота якого  $U_0 = 99,75$  В (рис.14.6).

**14.54.** Мікрочастинка, енергія якої  $W = 20$  еВ, рухається в потенційному полі  $U(x)$ , як показано на рис.14.7. Побудувати графік залежності коефіцієнта відбивання  $R$  від бар'єру від висоти бар'єру  $U_0$  ( $U_0 \in (-\infty, +\infty)$ ).

**14.55.** Електрон, енергія якого  $W = 10$  еВ, рухається в потенційному полі  $U(x)$ , як показано на рис.14.7. Побудувати графік залежності коефіцієнта прозорості бар'єру  $D$  від висоти бар'єру  $U_0$  ( $U_0 \in (-\infty, +\infty)$ ).

**14.56.** Електрон, енергія якого  $W = 10$  еВ, рухається зліва направо в потенційному полі (рис.14.8).

$$U(x) = \begin{cases} -5 \text{ еВ}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт відбивання електрона від такого бар'єру.

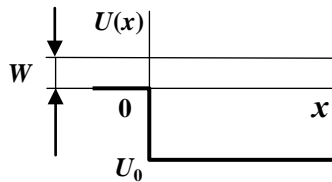


Рис.14.8.

**14.57.** Вирахувати коефіцієнт прозорості бар'єру для електрона і протона, якщо  $U_0 = 20$  еВ,  $W = 10$  еВ,  $l = 1$  Å (рис.14.9).

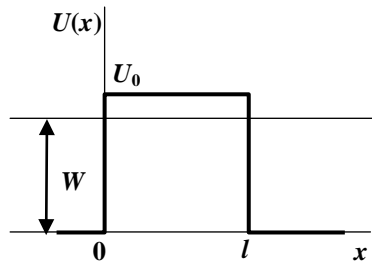


Рис.14.9.

**14.58.** Частинка, маса якої  $m$  падає зліва на прямокутний потенційний (рис.14.10) бар'єр, висота якого  $U_0$ . Енергія частинки  $W < U_0$ . Знайти ефективну глибину  $x_{ef}$  проникнення частинки під бар'єр, тобто відстань від границі бар'єру до точки, в якій густина ймовірності знаходження частинки



зменшується в  $e = 2,72$  рази. Знайти  $x_{ef}$  для електрона, якщо  $U_0 - W = 1$  еВ.

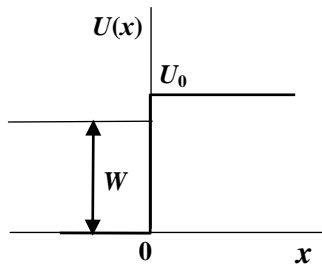


Рис.14.10.

**14.59.** Стаціонарний потік електронів, які мають енергію  $W$ , падає на абсолютно непроникну стінку (рис.14.11):  $U(x) = 0$  при  $x > 0$  і  $U(x) \rightarrow \infty$  при  $x \leq 0$ . Визначити розподіл густини ймовірності місцезнаходження електронів. Знайти координати точок, в яких  $|\psi|^2$  дорівнює максимуму. Зобразити приблизний графік залежності  $|\psi|^2$ .

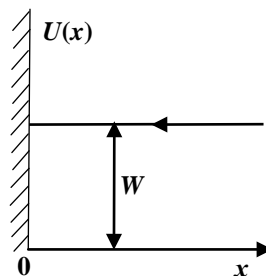


Рис.14.11.

### Додаткові задачі

**14.60.** Знайти кінетичну енергію електронів, які падають нормально на діафрагму з двома вузькими щілинами, якщо на екрані, який знаходиться на відстані  $l = 75$  см від діафрагми, відстань між сусідніми максимумами  $\Delta x = 7,5$  мкм. Відстань між щілинами  $d = 25$  мкм.

**14.61.** Пучок електронів з кінетичною енергією  $W_k = 180$  еВ падає нормально на поверхню монокристала нікелю. В напрямку, який складає кут  $\alpha = 55^\circ$  з нормаллю до поверхні, спостерігається максимум відбивання четвертого порядку. Знайти міжплощинну відстань  $d$ , яка відповідає цьому відбиванню.

**14.62.** Яка довжина хвилі де Бройля  $\lambda$  електрона з кінетичною енергією  $W_k = 24,6$  еВ (енергія іонізації атома гелія)? Порівняйте це значення  $\lambda$  з діаметром атома гелія  $d = 0,22$  нм. Чи потрібно враховувати хвильові властивості речовини при вивченні руху електрона в атомі гелію?

**14.63.** Визначити довжину хвилі де Бройля  $\lambda$  для  $\alpha$  – частинки з кінетичною енергією  $W_k = 7,7 \text{ MeV}$ . В дослідях по резерфордовському розсіюванні  $\alpha$  – частинок суттєвою є відстань порядку  $10^{-15} \text{ м}$ ; але при аналізі дослідів, як правило, не враховують хвильові властивості  $\alpha$  – частинки. Чи це правильно?

**14.64.** В 1929 році Естерман і Штерн провели експеримент по дифракції атомів гелія, які падали на кристал фтористого літія (LiF). Яка довжина хвилі де Бройля атома гелія (He) з енергією  $3kT/2$  при температурі  $T = 290 \text{ K}$ ?

**14.65.** Знайти значення кінетичної енергії електрона, при якій невизначеність довжини хвилі де Бройля, яка визначається за нерелятивістською формулою, не перевищує 1% від значення, яке отримується за релятивістською формулою. Провести аналогічні розрахунки також і для протона.

**14.66.** Потік електронів з дебройлівською довжиною хвилі  $\lambda = 11 \text{ мкм}$  падає нормально на прямокутну щілину, ширина якої  $b = 0,10 \text{ мкм}$ . Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей кутову ширину пучка за щілиною (в кутових градусах).

**14.67.** Електрон із кінетичною енергією  $W_k \approx 4 \text{ eV}$  локалізований в області розміром  $l = 1 \text{ мкм}$ . Оцінити відносну невизначеність його швидкості  $\Delta v/v$ .

**14.68.** Середній час життя атома у збудженому стані складає  $\Delta t \sim 10^{-8} \text{ с}$ . Під час переходу атома в основний стан випромінюється фотон із середньою довжиною хвилі  $\lambda = 500 \text{ нм}$ . За допомогою співвідношення невизначеностей оцінити ширину  $\Delta \lambda$  спектральної лінії, що випромінюється.

**14.69.** Оцінити мінімальну кінетичну енергію електрона, який локалізований в області, розміри якої  $l = 1 \text{ Å}$ .

**14.70.** Мікročастинка, маса якої  $m_0$ , знаходиться в одновимірній потенційній ямі, ширина якої  $l$ , з нескінченно високими стінками. Оцінити мінімально можливу енергію частинки, якщо  $\Delta x \cdot \Delta p \geq h/2$ . Порівняйте отримане значення енергії частинки з

енергією рівня енергії з квантовим числом  $n = 1$  для потенційної ями, ширина якої  $l$ , з нескінченно високими стінками. Поясніть, чому мінімальна енергія частинки в такій потенційній ямі не може дорівнювати нулю.

**14.71.** Якщо частинка маси  $m$  знаходиться в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі великої ширини  $l$ , енергетичні рівні частинки є дуже близькими. Тому густину рівнів (кількість рівнів у одиничному інтервалі енергій), можна обчислювати, як  $dN/dW$ . Виходячи з цього, оцінити густину рівнів для вільних електронів у металі, прийнявши  $l = 1,0$  см і  $W = 6,0$  еВ.

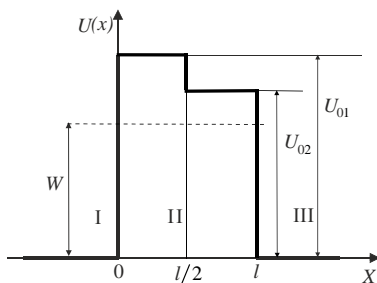
**14.72.** Частинка знаходиться в одновимірній прямокутній потенційній ямі з нескінченно високими стінками. Знайти:

а) масу частинку, якщо ширина ями  $l = 50$  Å і різниця енергій 3-го і 2-го енергетичних рівнів дорівнює  $\Delta W = 0,0752$  еВ;

б) квантове число  $n$  енергетичного рівня частинки, якщо інтервали енергій від нього до сусідніх з ним рівнів (верхнього і нижнього) відносяться як  $\eta: 1$ , де  $\eta = 9/4$ .

**14.73.** Частинка знаходиться в основному стані в одновимірній прямокутній потенційній ямі, ширина якої  $l$ , з нескінченно високими стінками. Знайти ймовірність перебування частинки в області  $l/3 < x < 2l/3$ .

**14.74.** На ступінчастий прямокутний потенційний бар'єр



**Рис.4.12.**

налітає паралельний пучок електронів з енергією  $W = 1,0$  еВ і густиною потоку частинок  $n_0 = 10^{21}$  1/(см<sup>2</sup>·с). Визначити ймовірність  $D$  тунельного проходження електрона крізь цей бар'єр і густину тунельного струму  $j$  (А/см<sup>2</sup>), який створюють електрони після подолання бар'єру, якщо  $U_{01} = 1,16$  еВ,  $U_{02} = 1,09$  еВ і ширина кожної сходинки  $l/2 = 2,0$  нм.

## 15. МЕТАЛИ

### 15.1. Питання теми

1. Розподіл електронів за енергетичними рівнями в металах.
2. Незалежність енергії електронів в металах від температури.
3. Електропровідність металів.

### 15.2. Основні положення та формули

1. Енергія є важливою характеристикою електрона, який рухається в періодичному полі кристалічної ґратки металу або напівпровідника. Вона є функцією хвильового вектора  $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ , тобто  $W = W(\vec{k})$ . Рівняння  $W(\vec{k}) = \text{const}$  визначає в просторі хвильового вектора  $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$  поверхню однакового значення енергії або ізоенергетичну поверхню, форма якої в основному визначає електричні властивості твердих тіл.

2. Ефективна маса електрона в кристалі визначається за формулою:

$$m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2} \right)^{-1}, \quad (15.1)$$

де  $\hbar = h/(2\pi) = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка.

3. Функція розподілу електронів за енергіями  $N(W)$  задається як відношення кількості електронів в одиниці об'єму  $dn$ , що мають енергію в інтервалі від  $W$  до  $W + dW$ , до величини цього інтервалу:

$$N(W) = \frac{dn}{dW}. \quad (15.2)$$

Ця функція має зміст густини розподілу електронів за енергіями, тобто кількості електронів в одиничному енергетичному інтервалі в одиниці об'єму. Функція  $N(W)$  має розмірність: кількість електронів/(м<sup>3</sup>·Дж), але, як правило, у фізиці твердого тіла використовується така розмірність: кількість електронів/(см<sup>3</sup>·еВ).

Функцію  $N(W)$  представляють як добуток двох функцій  $g(W)$  і  $f(W)$ , де

$$g(W) = \frac{dn_p}{dW}, \quad (15.3)$$

$$f(W) = \frac{dn}{dn_p}. \quad (15.4)$$

Функція  $g(W)$  характеризує густину станів (рівнів), тобто число енергетичних рівнів в одиниці об'єму кристалу, які приходяться на одиничний енергетичний інтервал біля даного значення енергії  $W$ . Тому  $dn_p$  – кількість енергетичних рівнів в одиниці об'єму кристалу в інтервалі енергій від  $W$  до  $W + dW$ . Функція  $f(W)$  характеризує ймовірність заповнення енергетичних рівнів електронами. Зручність такого представлення функції  $N(W)$  в тому, що задача знаходження функції розподілу електронів за енергіями розпадається на дві: квантову задачу визначення характеру розподілу енергетичних рівнів і статистичну задачу знаходження ймовірності заповнення цих рівнів.

4. Функція густини станів (рівнів) для металів має вид

$$g(W) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{3/2} W^{1/2}, \quad (15.5)$$

де  $m_n^*$  – ефективна маса електрона в зоні провідності металу,  $h$  – стала Планка. Для розв'язування задач приймається, що  $m_n^*$  в металах дорівнює масі вільного електрона  $m_e$ , тобто  $m_n^* = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

5. Квантовий розподіл електронів за енергетичними рівнями визначається статистикою Фермі-Дірака і характеризується функцією

$$f(W) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{W-W_F}{kT}\right\} + 1}, \quad (15.6)$$

де  $T$  – абсолютна температура,  $k$  – стала Больцмана,  $W_F$  – енергія Фермі,  $W$  – енергія певного рівня. Для випадку  $T \neq 0$  і  $W \gg W_F$  функція Фермі-Дірака (15.6) може бути записана у вигляді

$$f(W)_{\text{М-Б}} \cong \exp\left\{\frac{W_F}{kT}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{W}{kT}\right\}, \quad (15.7)$$

яка називається класичною функцією розподілу або функцією Максвелла-Больцмана (часто називають просто функцією Больцмана або розподілом Больцмана).

6. Концентрація електронів в зоні провідності металів для загального випадку дорівнює інтегралу від функції розподілу густини електронів  $N(W)$  для всіх можливих значень енергії, тобто

$$n = \int_0^\infty N(W) dW = \int_0^\infty f(W) g(W) dW. \quad (15.8)$$

При  $T = 0$   $f(W) = 1$ , для  $0 < W \leq W_F(0)$  і

$$n = \frac{8\pi}{3h^3} (2m_n^*)^{3/2} (W_F(0))^{3/2}, \quad (15.9)$$

де  $W_F(0)$  – значення енергії Фермі при  $T = 0$ . Із (15.9) знаходимо, що

$$W_F(0) = \frac{h^2}{2m_n^*} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (15.10)$$

7. Для типових металів, коли ефективна маса електрона приблизно дорівнює масі вільного електрона,

$$W_F(0) = 0,365 \cdot 10^{-18} n^{2/3}, \quad (15.11)$$

де  $n$  визначається в  $\text{м}^{-3}$ , а  $W_F(0)$  – в електрон-вольтах.

8. Для області низьких температур ( $kT \ll W_F$ )

$$W_F(T) \cong W_F(0) \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{W_F(0)} \right)^2 \right). \quad (15.12)$$

Кількісна оцінка показує, що навіть при  $T = 1000 \text{ K}$  ( $kT = 0,08 \text{ eV}$ )

$$\frac{W_F(T)}{W_F(0)} \approx 10^{-3} \div 10^{-4}.$$

Тому можна вважати, що *розташування рівня Фермі для металів*, які знаходяться в твердому стані, *практично не залежить від температури*. Електрони зони провідності для такого випадку представляють собою вироджений газ, тобто газ, що описується функцією розподілу (15.6).

9. Середня енергія електронів у виродженому електронному газі визначається за формулою:

$$\langle W_0 \rangle = \frac{3}{5} W_F(0) \cdot \left( 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{W_F(0)} \right)^2 \right). \quad (15.13)$$

Перший доданок в цій сумі

$$\langle W_0 \rangle = \frac{3}{5} W_F(0) \quad (15.14)$$

характеризує середню енергію електронів при  $T = 0$  і відповідно називається “нульовою” енергією, яка має чисто квантову природу.

Другий доданок в (15.13)

$$\langle W(T) \rangle \cong \frac{\pi^2 (kT)^2}{4W_F(0)} \quad (15.15)$$

залежить від температури і це є середня теплова енергія електронів. Відношення (15.15) до (15.14) показує, що навіть при температурі плавлення металу

$$\frac{\langle W(T) \rangle}{\langle W_0 \rangle} = 10^{-3} \div 10^{-4}.$$

Така слаба сприйнятливість електронів в металі до нагрівання обумовлена характером функції розподілу  $f(W)$ , яка показує, що розподіл електронів за енергіями визначається перш за все не

тепловим рухом, а принципом Паулі. В цьому суттєва відмінність металів від напівпровідників, яка особливо проявляється в залежності електропровідності від температури.

**10.** Середня енергія теплового руху електронів, які підпорядковуються розподілу Больцмана (15.7), визначається за формулою:

$$\langle W \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (15.16)$$

### **15.3. Питання на самопідготовку**

1. Дати визначення твердого тіла.
2. Які тверді тіла є кристалами?
3. Приведіть класифікацію твердих тіл за величиною питомої електропровідності і її залежності від температури.
4. Які існують типи зв'язків атомів в твердих тілах?
5. Чому енергетичний спектр електронів в кристалах повинен бути зонним?
6. Дати визначення зон: валентної, провідності, забороненої.
7. Поясніть електричні властивості металів, напівпровідників і діелектриків з точки зору зонної теорії.
8. Дайте визначення функції густини енергетичних рівнів в зоні. Як ця густина залежить від енергії в зоні?
9. В чому різниця квантового і класичного розподілу електронів за енергетичними рівнями в зоні?
10. Дайте визначення енергії Фермі. Від чого залежить величина енергії Фермі?
11. Дайте визначення функції розподілу густини електронів за енергетичними станами (рівнями).
12. Поясніть, чому електронний газ в металах має велику середню енергію і велику середню швидкість руху навіть при  $T = 0$ .
13. Пояснити залежність питомого опору металів від температури.

### **15.4. Методичні вказівки**

Розв'язування задач із основ зонної теорії твердих тіл базується на наступних властивостях електронного газу в металах:

**а)** розподіл електронів за енергетичними станами описується статистикою Фермі-Дірака, тобто функцією (15.6);

**б)** густина енергетичних станів в одиниці об'єму кристалу, яка приходить на одиничний інтервал енергії визначається функцією (15.5); функція, яка обернена функції (15.5), визначає відстань між енергетичними рівнями в зоні кристалу одиничного об'єму біля деякого значення енергії  $W$ ;

**в)** розподіл електронів за енергетичними рівнями в зоні провідності практично не залежить від температури і в цьому суть прояву принципу Паулі. Це дозволяє в розрахунках концентрації електронів провідності і енергії Фермі користуватись наближеними формулами (15.9), (15.11).

## 15.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 15.1.** Енергія електронів у валентній зоні деякого кристалу з простою кубічною ґраткою залежить від хвильового вектора за законом  $W = W_0 \cos(ka)$ , де  $W_0 = 0,5 \text{ еВ}$ ,  $a = 3 \text{ \AA}$ . Визначити: **а)** максимальну швидкість електронів; **б)** ефективну масу електронів для  $k = 0$ .

**Розв'язок.** **а)** Знайдемо зв'язок між швидкістю електрона і залежністю  $W(k)$ . Відомо, що

$$W(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

і тому

$$\frac{dW(k)}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{m^*} = \hbar \left( \frac{\hbar k}{m^*} \right) = \hbar \left( \frac{p}{m^*} \right) = \hbar v.$$

Тут враховано, що  $p = \hbar k$  – імпульс електрона, що має ефективну масу  $m^*$ . Тоді отримаємо, що

$$v = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{dW(k)}{dk}.$$

В нашому випадку  $W(k) = W_0 \cos(ka)$ , тому



$$v = -\frac{W_0 a}{\hbar} \sin(ka),$$

а

$$|v_{\max}| = \frac{W_0 a}{\hbar} = \frac{0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{1,054 \cdot 10^{-34}} \text{ м/с} \approx 2,3 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

**б)** Дуже важливими з фізичної точки зору є точки, де енергія  $W(k)$  має екстремум. Однією з таких точок є точка з  $k = 0$ . Згідно формули (15.1)

$$m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2} \right)^{-1} = -\frac{\hbar^2}{W_0 a^2 \cos(ka)}.$$

Для точки з  $k = 0$

$$m^* = -\frac{\hbar^2}{W_0 a^2}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$m^* = -\frac{(1,054 \cdot 10^{-34})^2}{0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^{-20}} \text{ кг} = -15,3 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = -1,7 m_e,$$

де  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$  – маса вільного електрона.

**Висновки: 1.** Ефективна маса електрона у валентній зоні є від'ємна і за модулем більша від маси вільного електрона. Знак ефективної маси свідчить про те, що в точці з  $k = 0$  є максимум енергії. Якщо такий електрон знаходиться у зовнішньому електричному полі, то його прискорення буде направлене проти напрямку дії сили (із-за від'ємної ефективної маси). Тому такий електрон рухається як частинка з додатньою ефективною масою і позитивним зарядом.

**2.** Величина ефективної маси показує наскільки внутрішньо-кристалічне поле впливає на рух електрона в кристалі. При дії зовнішніх сил на електрони в кристалі поле кристалічної ґратки проявляє себе тим, що динамічні властивості електронів визначаються не звичайною його масою, а масою ефективною.

**Задача 15.2.** Вирахувати інтервал  $\Delta W$  в електрон – вольтх між сусідніми рівнями енергії "вільних" електронів в зоні

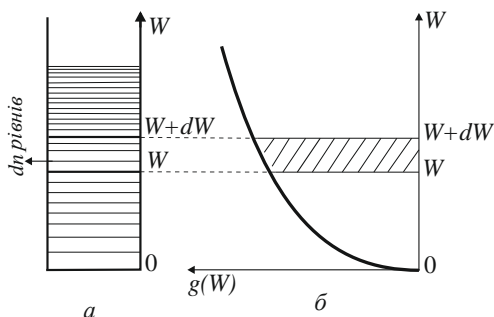
провідності металу для значень енергії  $W$ : **а)** 0,1 еВ; **б)** 1 еВ; **в)** 3 еВ; **г)** 5еВ. Об'єм кристалу прийняти за  $1\text{см}^3$ .

**Розв'язок.** Для кращого розуміння розв'язку задачі корисно зробити рисунок. Рисунок і розв'язок задачі допоможуть краще зрозуміти зміст функції розподілу густини станів  $g(W)$ . Згідно визначення (15.3) функція розподілу густини рівнів

$$g(W) = \frac{dn_p}{dW}.$$

$g(W)$  дорівнює кількості енергетичних рівнів в одиниці об'єму кристалу, що приходяться на одиничний інтервал енергії біля якогось значення енергії  $W$ . Тоді кількість енергетичних рівнів в одиниці об'єму кристалу в інтервалі енергій від  $W$  до  $W + dW$  дорівнює:

$$dn_p = g(W) \cdot dW,$$



**Рис.15.1.** Енергетична діаграма зони провідності металу (а) і графік функції розподілу густини рівнів (б).

що чисельно дорівнює площі заштрихованої фігури на рис.15.1 (б), а число рівнів для цього інтервалу енергій і об'єму  $V$  кристалу буде

$$dN = dn_p \cdot V = V \cdot g(W) \cdot dW.$$

Значить, інтервал між двома сусідніми рівнями в зоні можна визначити як

$$\Delta W = \frac{dW}{dN} = \frac{1}{V \cdot g(W)}.$$

Використовуючи формулу (15.5), отримаємо що

$$\Delta W = \frac{h^3}{4\pi(2m_n^*)^{3/2} \cdot \sqrt{W} \cdot V},$$

а після підстановки числових значень  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с,

$m_n^* = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг отримаємо робочу формулу:

$$\Delta W = \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^3}{12,56(2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31})^{1,5} \cdot 4 \cdot 10^{-10} \sqrt{W(\text{eB})}} \cdot \frac{1}{V} \text{ Дж} =$$

$$= \frac{1,47 \cdot 10^{-28}}{V \sqrt{W(\text{eB})}} \text{ eB},$$

де  $W(\text{eB})$  – енергія рівня в зоні провідності металу виражена в електрон-вольтах. Після нескладних розрахунків отримаємо:

а)  $\Delta W = 4,7 \cdot 10^{-22} \text{ eB}$ ; б)  $\Delta W = 0,85 \cdot 10^{-22} \text{ eB}$ ;

в)  $\Delta W = 1,47 \cdot 10^{-22} \text{ eB}$ ; г)  $\Delta W = 0,66 \cdot 10^{-22} \text{ eB}$ .

**Висновки:** 1) Для кристалів, об'єм яких  $1 \text{ см}^3$ , енергетичний інтервал між рівнями в зоні можна для якісних міркувань і деяких оціночних розрахунків прийняти за  $10^{-22} \text{ eB}$ . 2) При зміні енергії в зоні від 0,1 eB до 5 eB (тобто в 50 раз) відстань між сусідніми рівнями змінюється в 7 раз.

**Задача 15.3.** Визначити ймовірність того, що електрон в металі буде займати енергетичний рівень, який знаходиться нижче рівня Фермі на  $\Delta W = 0,05 \text{ eB}$  і вище рівня Фермі на  $\Delta W = 0,05 \text{ eB}$  у двох випадках: **а)** температура металу  $T_1 = 290 \text{ K}$ ; **б)** температура металу  $T_2 = 58 \text{ K}$ .

**Розв'язок.** Для розв'язку цієї задачі бажано використовувати обчислювальну техніку. Ймовірність того, що рівень з енергією  $W$  зайнятий електроном визначається функцією

Фермі-Дірака (15.6). Тому розв'язок задачі зводиться до простих обчислень. При  $T_1 = 290 \text{ K}$   $kT_1 = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \text{ Дж} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ eB}$ , а при  $T_2 = 58 \text{ K}$   $kT_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ eB}$ . Для випадку, коли енергетичний рівень лежить нижче рівня Фермі,  $W_1 - W_F = -0,05 \text{ eB}$ , а якщо енергетичний рівень лежить вище рівня Фермі, то  $W_2 - W_F = 0,05 \text{ eB}$ . Тому розглянемо наступні варіанти:

**1а)**  $T_1 = 290 \text{ K}$ ,  $\Delta W = -0,05 \text{ eB}$  і

$$f(W_1, T_1) = \left( \exp \left\{ -\frac{0,05}{0,025} \right\} + 1 \right)^{-1} = \left( \exp \{-2\} + 1 \right)^{-1} = 0,89.$$

**2а)**  $T_1 = 290 \text{ K}$ ,  $\Delta W = 0,05 \text{ eB}$  і

$$f(W_2, T_1) = (\exp\{2\} + 1)^{-1} = 0,119.$$

$$16) T_2 = 58 \text{ K}, \Delta W = -0,05 \text{ eV} \quad \text{і}$$

$$\begin{aligned} f(W_1, T_2) &= (\exp\left\{-\frac{5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}}\right\} + 1)^{-1} = \\ &= (\exp\{-10\} + 1)^{-1} = 0,999955. \end{aligned}$$

$$26) T_2 = 58 \text{ K}, \Delta W = 0,05 \text{ eV} \quad \text{і}$$

$$f(W_2, T_2) = (\exp\{10\} + 1)^{-1} = (4,5 \cdot 10^5 + 1)^{-1} = 2,2 \cdot 10^{-6}.$$

**Висновки:** Ймовірність заповнення електронами енергетичних рівнів біля рівня Фермі сильно залежить від температури. При збільшенні температури від 58 К до 290 К ймовірність заповнення рівня енергії, який лежить вище рівня Фермі на 0,05 eV, зростає приблизно в  $10^6$  раз.

**Зауваження:** Як самостійне заняття можна запропонувати студентам розрахувати ймовірність заповнення електронами енергетичних рівнів, які лежать вище рівня Фермі на 5 eV при  $T = 2000 \text{ K}$ . Ця ймовірність дорівнює приблизно  $10^{-13}$ , що є нехтовно малою величиною. Але саме електрони з такою ймовірністю утворюють електронну "хмарину" поза металом і приймають участь в термoeлектронній емісії.

**Задача 15.4.** Природа явища надпровідності стала зрозумілою тільки через 46 років після свого відкриття. Дивним виявилось те, що тільки незначна частина електронів провідності металу відповідальна за надпровідність. Згідно сучасним уявленням електрони, енергія яких відрізняється від енергії Фермі не більше ніж на величину  $k\theta_D$ , є електронами надпровідності. Оцінити, яка частина електронів провідності металу є "надпровідними".  $\theta_D$  – характеристична температура металу, яка називається температурою Дебая. Для металів, що мають надпровідні властивості,  $\theta_D \approx 100 \text{ K}$  (наприклад для свинцю  $\theta_D = 94,5 \text{ K}$ ).

**Розв'язок.** Явище надпровідності має місце при низьких температурах ( $T \approx 10 \text{ K}$ ) тому для розрахунків можемо

використовувати формули, які отримані при  $T = 0$ . Тоді функція розподілу густини електронів

$$N(W) = g(W)f(W) = g(W),$$

оскільки  $f(W) = 1$  для  $W \leq W_F(0)$ . Вид функції  $N(W)$  для цього випадку показаний на рис.15.2.

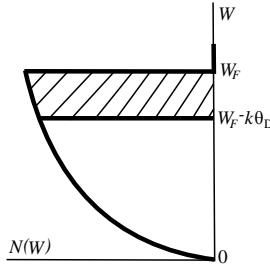


Рис.15.2. Функція розподілу густини електронів при  $T = 0$ .

Величина  $k\theta_D$  при  $T = 100$  К дорівнює  $1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 100$  Дж =  $8,6 \cdot 10^{-3}$  еВ. Величина енергії Фермі для металів складає декілька електронвольт, що набагато більше  $k\theta_D$ , тому заштрихована смуга на рис.15.2 досить вузька. Площа цієї смуги чисельно дорівнює числу електронів в одиниці об'єму кристалу, яке необхідно знайти. Тому

$$\Delta n = N(W_F) \cdot k\theta_D,$$

де  $N(W_F)$  – значення функції розподілу густини електронів для енергії Фермі. Так як  $N(W) = g(W)$ , то згідно (15.5)

$$\Delta n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{3/2} \cdot W_F^{1/2} \cdot k\theta_D.$$

Загальна концентрація електронів провідності металу визначається за формулою (15.9). Тому

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{3k\theta_D}{2W_F}.$$

Приймаючи значення енергії Фермі приблизно 5еВ, отримаємо, що

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{3 \cdot 8,6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 5} = 2,6 \cdot 10^{-3} = 0,3\%.$$

**Висновок.** Кількість електронів провідності металу, які “відповідальні” за явище надпровідності, складає десятки долі відсотка від загального числа електронів в зоні провідності. Але саме ці електрони визначають провідність металу в стані надпровідності.

**Задача 15.5.** Визначити число електронів, яке приходить на один атом натрію при  $T = 0$ . Рівень Фермі для натрію має енергію  $W_F = 3,12$  еВ.

**Розв’язок.** Розрахунок будемо виконувати для одиниці об’єму речовини. Тоді, згідно закону Авогадро, в одному молі речовини (для нашого випадку 1 моль натрію – це  $M = 23 \cdot 10^{-3}$  кг) міститься  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  атомів, а один кубічний метр натрію містить

$$n_0 = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{0,97 \cdot 10^3 \cdot 6,025 \cdot 10^{23}}{23 \cdot 10^{-3}} \text{ атомів/м}^3 = 2,54 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3},$$

де  $\rho$  – густина натрію.

Концентрацію електронів провідності розрахуємо за формулою (15.11):

$$n = \left( \frac{W_F}{0,365} \right)^{3/2} \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3} = \left( \frac{3,12}{0,365} \right)^{3/2} \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3} = 2,50 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Тоді число “вільних” електронів, що приходить на один атом натрію, буде дорівнювати:

$$\frac{n}{n_0} = \frac{2,5 \cdot 10^{28}}{2,54 \cdot 10^{28}} = 0,98.$$

**Висновок.** Електронна структура атому натрію має вид:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ . Розрахунки, які приведені вище, показують, що майже всі валентні  $3s$  електрони натрію при утворенні кристалу із окремих атомів колективізуються і стають електронами провідності.

**Задача 15.6.** Виразити середню швидкість  $\langle v \rangle$  електронів в металі при  $T = 0$  через їхню максимальну швидкість  $v_m$ . Вирахувати середню швидкість електронів для металу, рівень Фермі для якого при  $T = 0$  має енергію 6 еВ.

**Розв’язок.** Згідно визначення середню швидкість будемо розраховувати за такою формулою:

$$\langle v \rangle = \int_0^v v \cdot f(v) dv / \int_0^v f(v) dv,$$

де  $f(v)$  - функція розподілу густини електронів за швидкостями, яка представляє собою аналог функції  $N(W)$ . Вираз  $\int_0^v v f(v) dv$  є сумарною швидкістю всіх електронів, а вираз  $\int_0^v f(v) dv$  є повне число всіх електронів провідності для одиниці об'єму металу. Максимальну швидкість, яку можуть мати електрони при  $T = 0$  в металі знайдемо з умови, що  $\frac{m_n^* v_m^2}{2} = W_F(0)$ . Звідки

$$v_m = \sqrt{\frac{2W_F(0)}{m_n^*}}.$$

Знайдемо вираз для функції  $f(v)$ , якщо відома функція  $N(W)$ . Для цього знайдемо кількість електронів, що мають енергію в інтервалі енергій від  $W$  до  $W + dW$ . Згідно визначення функції  $N(W)$  (15.2) можемо записати, що

$$dn = N(W)dW = g(W)f(W)dW = g(W)dW.$$

При цьому враховано, що  $f(W) = 1$ , для  $W \leq W_F$  при  $T = 0$ . Оскільки

$$W = m_n^* v^2 / 2, dW = m_n^* v dv \text{ і } g(W) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{3/2} \cdot W^{1/2}, \text{ то}$$

отримаємо, що

$$dn = \frac{4\pi}{h^3} 2(m_n^*)^3 v^2 dv = f(v)dv.$$

Значить, функція розподілу електронів за швидкостями при  $T = 0$  визначається виразом:

$$f(v) = Av^2,$$

де  $A = 8\pi(m_n^*)^3 / h^3$ . Тоді

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{v_m} v^3 dv}{\int_0^{v_m} v^2 dv} = \frac{3v_m}{4} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2W_F(0)}{m_n^*}}.$$

Після підстановки числових значень, прийнявши  $m_n^* = m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, отримаємо, що

$$\langle v \rangle = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

**Висновки.** Поняття середньої швидкості широко використовується в явищах переносу заряду, маси. Числове значення  $\langle v \rangle$  досить велике, не дивлячись на те, що  $T = 0$ . В цьому суть прояву принципу Паулі при розподілі електронів за рівнями енергії. Енергетично такий розподіл “невигідний”, проте принцип Паулі вимагає саме такого розподілу.

## 15.6. Задачі.

**15.7.** Кристалічна решітка заліза при кімнатній температурі – кубічна, об’ємноцентрована. Це означає, що елементарною коміркою є куб, у всіх вершинах якого, а також в центрі на перетині просторових діагоналей знаходяться атоми заліза. Скільки атомів заліза приходить на об’єм елементарної комірки? Визначити мінімальну відстань між атомами заліза в кристалі, якщо молярна маса заліза –  $56 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, а густина –  $7870 \text{ кг/м}^3$ .

**15.8.** Що відбувається з енергетичним спектром електронів при збільшенні числа атомів, які утворюють кристал, в  $n$  – раз?

**15.9.** Що буде з відстанню  $\Delta W$  між сусідніми енергетичними рівнями вільних електронів в металі при збільшенні об’єму металу в  $n$ -раз?

**15.10.** Кристалічний зразок містить 0,1 моля деякої речовини. Ширина дозволеної зони енергій дорівнює 5 еВ. Чому дорівнює середня відстань  $\Delta W$  між сусідніми енергетичними рівнями в зоні?

**15.11.** а) Вирахувати густину енергетичних рівнів біля рівня Фермі при  $T = 0$  для  $1 \text{ м}^3$  натрію. б) Вирахувати цю ж величину для одного моля натрію. в) Пояснити, чому ці величини відрізняються одна від одної.



**15.12.** Знайти інтервал в електронвольтах між сусідніми рівнями вільних електронів в металі при  $T = 0$  біля рівня Фермі, якщо об'єм металу  $V = 1 \text{ см}^3$ , а концентрація вільних електронів  $n = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ .

**15.13.** Знайти інтервал в електронвольтах між сусідніми енергетичними рівнями вільних електронів в алюмінії при  $T = 0$  біля рівня Фермі, якщо об'єм кристалу  $V = 1 \text{ см}^3$ . Вважати, що на кожний атом алюмінію приходить один вільний електрон.

**15.14.** Яка в середньому кількість “вільних” електронів в металі займає енергетичний рівень, енергія якого дорівнює енергії Фермі?

**15.15.** Чому дорівнює ймовірність того, що в стані з енергією, яка дорівнює енергії Фермі, буде знаходитись вільний електрон?

**15.16.** Нарисуйте криві розподілу Фермі-Дірака для “вільних” електронів в металі при температурах 0 і 1000 К.

**15.17.** Визначити ймовірність того, що електрон в металі займатиме енергетичний рівень, який лежить вище рівня Фермі на  $\Delta W = 4,5 \text{ eV}$  при  $T_1 = 300 \text{ К}$  і  $T_2 = 2000 \text{ К}$ .

**15.18.** Вирахувати ймовірність знаходження електронів на рівнях з енергіями  $W_F + 0,1 \text{ eV}$  і  $W_F - 0,1 \text{ eV}$  при температурах 0, 150, 300 і 1000 К. Результати розрахунків представте у вигляді таблиці.

**15.19.** Показати, що якщо всі рівні енергії в зоні зайняті електронами, то в кристалі на кожний атом приходить як мінімум по два валентних електрони.

**15.20.** Замість розподілу Фермі-Дірака, що визначається формулою (15.6) використовують розподіл Максвелла-Больцмана (формула (15.7)). Рівень енергії  $W$  знаходиться біля рівня Фермі  $W_F$ . Яка відносна похибка такої заміни при  $W - W_F = kT$  і при  $W - W_F = 4kT$ ?

**15.21.** Покажіть, що ймовірність того, що рівень з енергією  $W$ , яка більша енергії рівня Фермі  $W_F$  на величину  $\Delta W$ , зайнятий

електроном, в точності співпадає з ймовірністю того, що рівень, енергія якого менша значення  $W_F$  на ту ж величину  $\Delta W$ , є незайнятий електроном.

**15.22.** Визначити температуру, при якій в провіднику ймовірність знайти електрон з енергією 0,2 еВ над рівнем Фермі дорівнює 2%.

**15.23.** Знайти різницю енергій (в одиницях  $kT$ ) електронів, що знаходяться на рівні Фермі, і електронів, що знаходяться на рівнях, ймовірності заповнення яких дорівнюють 20% і 80%.

**15.24.** Знайти ймовірність заповнення електронами в металі енергетичного рівня, який розташований на 0,01 еВ нижче рівня Фермі при температурі  $+10^\circ\text{C}$ .

**15.25.** Як і в скільки раз зміниться ймовірність заповнення електронами енергетичного рівня в металі, якщо він розташований на 0,01 еВ нижче рівня Фермі і якщо температура змінюється від 200 до 300 К?

**15.26.** Як і в скільки раз зміниться ймовірність заповнення електронами енергетичного рівня в металі, якщо він розташований на 0,1 еВ вище рівня Фермі і якщо температура змінюється від 1000 до 300 К?

**15.27.** Показати, що доля електронів біля рівня Фермі при низьких температурах в інтервалі енергій  $kT$  дорівнює  $3kT/(2W_F)$ .

**15.28.** Яка частина вільних “електронів” в металі при  $T = 0$  має кінетичну енергію, яка перевищує середню енергію?

**15.29.** Визначити енергію рівня в зоні провідності металу, який ділить число електронів провідності навпіл. Температура  $T = 0$ .

**15.30.** Яка частина вільних “електронів” в металі при  $T = 0$  має кінетичну енергію, яка більша половини максимальної?

**15.31.** Визначити відношення концентрації електронів в металі (при  $T = 0$ ), енергія яких знаходиться в межах від 0,99  $W_F$  до  $W_F$ , до концентрації електронів, енергія яких знаходиться в межах від 0 до 0,01  $W_F$ .

**15.32.** Визначити відношення концентрації електронів в металі при  $T = 0$ , енергія яких більша середнього значення енергії  $\langle W_0 \rangle$ , до концентрації електронів, енергія яких менша  $\langle W_0 \rangle$ .

**15.33.** Електрони в металі знаходяться при  $T = 0$ . Визначити відносне число електронів  $\Delta n/n$ , кінетична енергія яких менша енергії Фермі на 2%.

**15.34.** Визначити середню енергію електронів провідності для міді при  $T = 0$ .

**15.35.** Знайти середню кінетичну енергію вільних електронів в сріблі при  $T = 0$  К, вважаючи, що на кожний атом срібла приходить один вільний електрон.

**15.36.** Визначити сумарну кінетичну енергію вільних електронів в  $1 \text{ см}^3$  золота при  $T = 0$  К, вважаючи, що на кожний атом золота приходить один вільний електрон. Результат представити в  $\text{кДж/см}^3$ .

**15.37.** Визначити концентрацію електронів в металі, енергія Фермі якого дорівнює  $1 \text{ eV}$ . Температура  $T = 0$ .

**15.38.** Визначити відношення концентрацій “вільних” електронів при  $T = 0$  в літію і цезію, якщо енергії рівнів Фермі в цих металах відповідно дорівнюють:  $W_{F_1} = 4,72 \text{ eV}$  і  $W_{F_2} = 1,53 \text{ eV}$ .

**15.39.** В скільки раз число “вільних” електронів, що приходить на один атом металу при  $T = 0$ , більше в алюмінію, ніж в міді, якщо енергії рівнів Фермі відповідно дорівнюють:  $W_{F_1} = 11,7 \text{ eV}$  і  $W_{F_2} = 7,0 \text{ eV}$ .

**15.40.** Часто при розрахунках нехтують різницею між значенням енергії Фермі  $W_F(T)$  при деякій температурі  $T$  і значенням енергії Фермі  $W_F(0)$  при  $T = 0$ . Оцінити на скільки відсотків  $W_F(T)$  відрізняється від  $W_F(0)$  для вольфраму при температурі близькій до температури плавлення  $t = 3370^\circ \text{C}$ . Вважати, що на кожний атом вольфраму приходить два вільних електрони. *Вказівка.* Скористатись формулою (15.12).

**15.41.** Визначити максимальну швидкість вільних електронів в міді при  $T = 0$  К.

**15.42.** Визначити максимальну швидкість електронів в металі при  $T = 0$ , якщо енергія рівня Фермі  $W_F = 5$  еВ. Порівняти отримане значення швидкості із швидкістю теплового хаотичного руху електронів при кімнатній температурі.

**15.43.** Метал знаходиться при  $T = 0$ . Визначити, в скільки раз число електронів із швидкостями від  $0,5v_{max}$  до  $v_{max}$  більше числа електронів із швидкостями від 0 до  $0,5v_{max}$ .

**15.44.** Знайти функцію розподілу густини електронів в металі за імпульсами (швидкостями) при  $T = 0$ .

**15.45.** Знайти функцію розподілу густини “вільних” електронів в металі при  $T = 0$  за дебройлівськими довжинами хвиль.

**15.46.** Кусок металу, об’єм якого  $20 \text{ см}^3$ , знаходиться при  $T = 0$ . Визначити число “вільних” електронів, імпульси яких відрізняються від максимального імпульсу  $p_{max}$  не більше, ніж на  $0,1p_{max}$ . Енергія Фермі  $W_F = 5$  еВ.

**15.47.** Знайти відношення теплоємності електронного газу, який підпорядковується статистиці Фермі-Дірака, до теплоємності електронного газу, що підпорядковується класичній статистиці, для металу при  $T = 300$  К, енергія Фермі якого  $W_F = 7$  еВ. *Вказівка.* Теплоємність  $C = dW/dT$ . У класичній фізиці „електронний газ” розглядається як ідеальний одноатомний газ.

**15.48.** Енергія електрона у зоні провідності деякого металу з простою кубичною граткою має вид:  $W = A \cdot k^2$ , де  $A = 6,05 \cdot 10^{-20}$  еВ  $\cdot \text{м}^2$ . Рівні в зоні до значень хвильового числа  $ka = (2\pi^2)^{1/3}$  заповнені електронами ( $a$  – ребро куба кристалу, що дорівнює  $2 \text{ \AA}$ ). Вирахувати відношення  $m_n^*/m_e$ , де  $m_e$  – маса вільного електрона, і число електронів провідності, яке приходить на один атом металу.

### Додаткові задачі

**15.49.** Вирахувати температуру ідеального газу в якого середня кінетична енергія частинок дорівнює середній кінетичній енергії вільних електронів в міді при температурі  $T = 0$ . Вважати, що на кожний атом приходится один вільний електрон.

**15.50.** Вирахувати найбільш ймовірну і середню швидкості вільних електронів в міді при температурі  $T = 0$ , якщо відомо, що їх концентрація дорівнює  $8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ .

**15.51.** Електропровідність металів  $\sigma = ne^2\tau/m_e$ , де  $n$  – концентрація вільних електронів,  $e$  і  $m_e$  – заряд і маса електрона,  $\tau$  – час релаксації, який зв'язаний із середньою довжиною вільного пробігу електрона співвідношенням  $\langle l \rangle = \langle v \rangle \cdot \tau$ ,  $\langle v \rangle$  – середня швидкість вільних електронів. Вирахувати  $\tau$ ,  $\langle l \rangle$  і рухливість вільних електронів в міді при температурі  $T = 0$ , якщо концентрація  $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Порівняти отримане значення  $\langle l \rangle$  із середньою відстанню  $\langle r \rangle$  між сусідніми атомами міді.

**15.52.** Розрахувати тиск електронного газу в металічному натрії при  $T = 0$ , якщо концентрація "вільних" електронів в ньому  $n = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Вказівка: скористатись рівнянням тиску для ідеального газу  $p = nk \cdot \langle T \rangle$ , де  $\langle T \rangle$  – деяка температура, що відповідає середній енергії "вільних" електронів в натрії при  $T = 0$ .

**15.53.** Тиск електронного газу є одним із основних факторів, які визначають стискуваність металів. Визначити коефіцієнт всестороннього стискування електронного газу для міді при температурі  $T = 0$ , прийнявши концентрацію електронів  $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Ефективну масу електрона прийняти за масу вільного електрона.

*Вказівка.* Коефіцієнт всестороннього стискування визначається як  $\kappa = \frac{d \ln n}{dp}$ , де  $n$  – концентрація, а  $p$  – тиск електронного газу.

## 16. НАПІВПРОВІДНИКИ

### 16.1. Питання теми

1. Концентрація електронів та дірок в напівпровідниках та її залежність від температури та домішок.
2. Положення рівня Фермі в напівпровідниках.
3. Електропровідність власних та домішкових напівпровідників та її залежність від температури.
4. Ефект Холла в напівпровідниках.
5. Нерівноважні носії заряду в напівпровідниках.

### 16.2. Основні положення та формули

1. Функція густини дозволених енергетичних рівнів для електронів в зоні провідності напівпровідника визначається за формулою

$$g_n(W) = \frac{4\pi(2m_n^*)^{3/2}}{h^3} \cdot (W - W_c)^{1/2}, \quad (16.1)$$

а – для дірок у валентній зоні –

$$g_p(W) = \frac{4\pi(2m_p^*)^{3/2}}{h^3} \cdot (W_v - W)^{1/2}. \quad (16.2)$$

В цих формулах  $m_n^*$  – ефективна маса електронів в зоні провідності,  $m_p^*$  – ефективна маса дірок у валентній зоні,  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка,  $W_v$  – енергія "стелі" валентної зони,  $W_c$  – енергія "дна" зони провідності (див. рис.16.1.).

**Зауваження.** За початок відліку енергії в напівпровідниках прийнято "стелю" валентної зони. Тому будемо вважати, що  $W_v = 0$ .

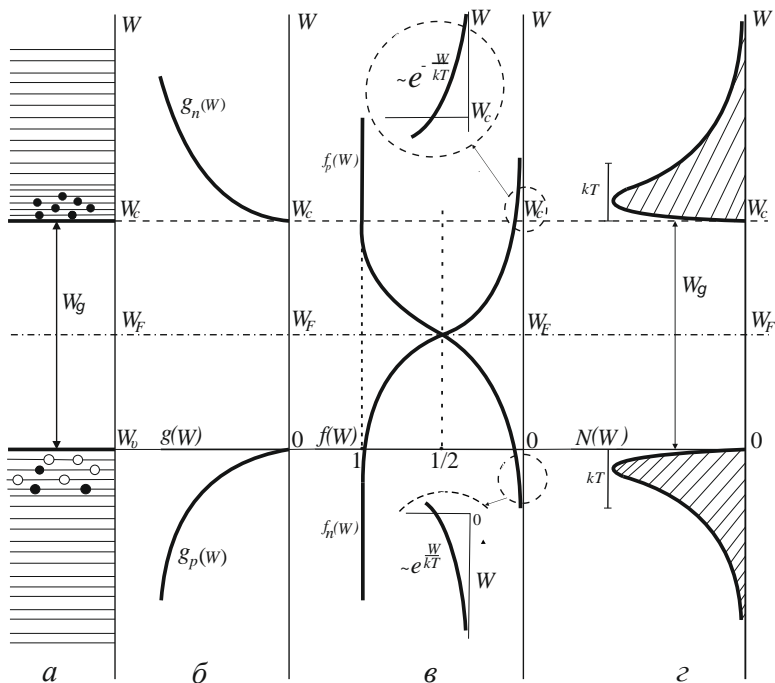
2. Розподіл електронів і дірок за енергетичними рівнями в напівпровідниках описується функціями Фермі – Дірака для електронів

$$f_n(W) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{W - W_F}{kT}\right\} + 1} \quad (16.3)$$

і дірок

$$f_p(W) = 1 - f_n(W) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_F - W}{kT}\right\} + 1} \quad (16.4)$$

відповідно, де  $W$  – енергія електрона (дірки) в зоні,  $W_F$  – енергія рівня Фермі,  $k$  – стала Больцмана,  $T$  – абсолютна температура.



**Рис.16.1.** а – енергетична діаграма напівпровідника, світлими кружечками позначені дірки, чорними – електрони; б – графіки функцій розподілу густини рівнів для електронів  $g_n(W)$  і дірок  $g_p(W)$ ; в – графіки функцій розподілу ймовірності заповнення енергетичних рівнів електронами  $f_n(W)$  і дірками  $f_p(W) = 1 - f_n(W)$ ; г – графіки функцій  $N(W)$  розподілу густини електронів в зоні провідності і дірок у валентній зоні.  $W_g$  – ширина забороненої зони,  $W_F$  – енергія рівня Фермі,  $W_c$  – енергія «дна» зони провідності,  $W_v$  – енергія «стелі» валентної зони (початок відліку енергії).

**Концентрація електронів і дірок в напівпровідниках** розраховується за допомогою загальної формули (15.8). Цей розрахунок проілюструємо на рисунку 16.1.

1). Як видно із рис.16.1(в), для розрахунку концентрації електронів і дірок можна з успіхом користуватись класичною функцією розподілу ймовірності Максвелла-Больцмана (15.7). Це пояснюється тим, що вільних рівнів енергії в зоні провідності і валентній зоні набагато більше, ніж електронів і дірок, які знаходяться

там. Тому при розподілі частинок за енергетичними рівнями принцип Паулі можна не враховувати.

2) Функція  $N(W)$  для електронів і дірок на рис.16.1(г) має максимум біля дна зони провідності і стелі валентної зони відповідно. Тому можна вважати, що електрони в зоні провідності в основному знаходяться біля його дна, а дірки – біля стелі валентної зони.

3) Концентрація носіїв заряду в напівпровідниках чисельно дорівнює площам заштрихованих фігур на рис.16.1(г). Площі цих фігур, а відповідно рівноважні концентрації електронів і дірок дорівнюють:

$$n = N_c \exp \left\{ -\frac{W_c - W_F}{kT} \right\}, \quad (16.5)$$

$$p = N_v \exp \left\{ -\frac{W_F - W_v}{kT} \right\}, \quad (16.6)$$

$$N_c = \frac{2}{h^3} (2\pi m_n^* kT)^{3/2} = 4,83 \cdot 10^{21} \left( \frac{m_n^*}{m_e} T \right)^{3/2}, \quad (16.7)$$

$$N_v = \frac{2}{h^3} (2\pi m_p^* kT)^{3/2} = 4,83 \cdot 10^{21} \left( \frac{m_p^*}{m_e} T \right)^{3/2}. \quad (16.8)$$

Тут  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг – маса вільного електрона,  $T$  – абсолютна температура,  $N_c$  і  $N_v$  визначаються в  $\text{м}^{-3}$ .

Простий зв'язок між концентраціями електронів і дірок і положенням рівня Фермі, який виражається формулами (16.5) і (16.6), дуже зручний при аналізі багатьох ситуацій в напівпровідниках. Величини  $N_c$  і  $N_v$  називають *ефективними густинами станів в зоні провідності і валентній зоні* відповідно. Цей термін використовується тому, що для класичного (невиродженого) розподілу концентрація електронів в точності дорівнює  $N_c$  помноженій на больцманівську функцію розподілу ймовірності (15.7) при енергії рівня  $W = W_c$ . Хоч в дійсності електрони в зоні провідності, а дірки у валентній зоні розподілені в енергетичному інтервалі, що дорівнює декільком величинам  $kT$ , як показано на рис.16.1(г). Таким чином зону провідності (і аналогічну валентну зону) можна представити як зону енергій, що складається із  $N_c$  ( $N_v$ ) рівнів, що мають однакову енергію  $W_c$  ( $W_v$ ).

Із співвідношень (16.5) і (16.6) отримаємо, що



$$\frac{p}{n} = \left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right)^{3/2} \cdot \exp\left\{\frac{2\left(\frac{W_c + W_v}{2} - W_F\right)}{kT}\right\}. \quad (16.9)$$

Звідки видно, що співвідношення між концентраціями електронів і дірок залежить від їхніх ефективних мас і особливо сильно (експоненціально) від положення рівня Фермі відносно середини забороненої зони  $(W_c + W_v)/2$ . Внаслідок невеликого зміщення рівня Фермі можна отримати зміну співвідношення  $p/n$  на декілька порядків. Цей перерозподіл концентрації рухливих носіїв заряду між зонами може бути здійснений введенням в напівпровідник домішок, так як положення рівня Фермі сильно залежить від типу і концентрації домішок.

**4. Закон діючих мас.** Із співвідношень (16.5) і (16.6) отримаємо, що добуток концентрацій рухливих електронів і дірок не залежить від положення рівня Фермі і при даній температурі залежить тільки від ширини забороненої зони  $W_g = W_c - W_v$  напівпровідника і ефективних мас електронів і дірок:

$$np = N_c N_v \cdot \exp\{-W_g/(kT)\}. \quad (16.10)$$

Із співвідношення (16.10) видно, що збільшення концентрації рухливих носіїв одного типу можливе тільки за рахунок зменшення кількості рухливих носіїв іншого типу.

**5. Власні напівпровідники.** У власних напівпровідниках концентрації електронів і дірок провідності рівні між собою, тобто:

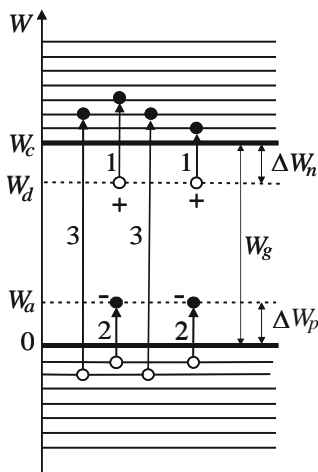
$$n = p = n_i = p_i, \quad (16.11)$$

де  $n_i$  і  $p_i$  позначають в подальшому концентрації носіїв заряду у власному напівпровіднику. Із (16.10), враховуючи (16.11), отримаємо, що

$$n_i = p_i = \sqrt{N_c N_v} \exp\left\{-\frac{W_g}{2kT}\right\}. \quad (16.12)$$

Із формули (16.12) можна зробити висновок, що концентрація носіїв провідності в напівпровідниках сильно (експоненційно) залежить від температури і ширини забороненої зони  $W_g$ . Саме в цьому суттєва різниця напівпровідників від металів, в яких концентрація носіїв (електронів) провідності практично не залежить від температури.

**6. Домішкові напівпровідники.** Енергетична діаграма домішкового напівпровідника приведена на рис.16.2. Іонізація донорних атомів приводить до утворення “вільних” електронів в зоні провідності (процеси 1), іонізація акцепторних атомів до утворення дірок у валентній зоні (процеси 2). При міжзонних переходах (3) генеруються і дірки і електрони. Концентрація “вільних” електронів в донорному напівпровіднику при низьких температурах ( $kT < \Delta W_n$ )



**Рис.16.2.** Механізм теплової генерації рухливих носіїв заряду в домішкових напівпровідниках. Світлими кружечками позначені дірки, чорними – електрони. Знаками “+” і “-” позначені іонізовані донори і акцептори.  $\Delta W_n$  – енергія активації донорних домішок,  $\Delta W_p$  – енергія активації акцепторних домішок,  $W_d$  і  $W_a$  – енергія донорних і акцепторних рівнів відповідно.

дорівнює:

$$n_n = \sqrt{\frac{N_c N_d}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{\Delta W_n}{2kT} \right\}, \quad (16.13)$$

а концентрація “вільних” дірок в акцепторному напівпровіднику при  $kT < \Delta W_p$

$$p_p = \sqrt{\frac{N_v N_a}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{\Delta W_p}{2kT} \right\}, \quad (16.14)$$

де  $N_d$  і  $N_a$  – концентрація донорних і акцепторних атомів відповідно.

Для області високих температур ( $kT > \Delta W_n$ ), ( $kT > \Delta W_p$ ) концентрації основних носіїв заряду в донорному і акцепторному напівпровідниках дорівнюють відповідно:

$$n_n = \frac{N_d}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2n_i}{N_d} \right)^2} \right), \quad (16.15)$$

$$p_p = \frac{N_a}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2n_i}{N_a} \right)^2} \right), \quad (16.16)$$

а концентрація неосновних носіїв заряду визначається за законом діючих мас (16.10) із врахуванням (16.12).

Для випадку сильного легування, коли  $N_d \gg n_i$  або  $N_a \gg n_i$ , концентрації основних носіїв заряду згідно (16.15) і (16.16) дорівнюють:

$$n_n \approx N_d, \quad (16.17)$$

$$p_p \approx N_a. \quad (16.18)$$

Тоді згідно закону діючих мас концентрація неосновних носіїв заряду (дірок) в донорному напівпровіднику буде дорівнювати

$$p_n \approx n_i^2 / N_d, \quad (16.19)$$

а відповідно концентрація електронів в акцепторному напівпровіднику

$$n_p \approx n_i^2 / N_a. \quad (16.20)$$

## 7. Положення рівня Фермі

### а) Загальна формула.

Із (16.9) можна отримати, що

$$W_F = \frac{1}{2}(W_c + W_v) - \frac{1}{2}kT \ln \frac{p}{n} + \frac{3}{4}kT \ln \frac{m_p^*}{m_n^*}. \quad (16.21)$$

**б) Власний напівпровідник:**  $n = p = n_i = p_i$ . Якщо  $m_n^* \approx m_p^*$ ,

то

$$W_{Fi} \cong \frac{1}{2}(W_c + W_v), \quad (16.22)$$

тобто рівень Фермі розташовується біля середини забороненої зони.

### в) Домішковий напівпровідник.

Найпростіші формули отримуються для випадку сильного легування. Для напівпровідника  $n$  – типу, підставляючи (16.17) в (16.5), отримаємо:

$$N_d = N_c \exp \left\{ -\frac{W_c - W_{Fn}}{kT} \right\}. \quad (16.23)$$

Звідки знайдемо, що

$$W_{Fn} = W_c - kT \ln(N_c/N_d). \quad (16.24)$$

Для напівпровідника  $p$ -типу, підставляючи (16.18) в (16.6), отримаємо, що

$$N_a = N_v \cdot \exp \left\{ -\frac{W_{Fp} - W_v}{kT} \right\}. \quad (16.25)$$

Звідки знайдемо, що

$$W_{Fp} = W_v + kT \ln \left( \frac{N_v}{N_a} \right). \quad (16.26)$$

**г) Концентрації носіїв заряду можна виразити через  $n_i$  і  $W_{Fi}$ .** Приймаючи, що  $n = p = n_i$  і  $W_F = W_{Fi}$ , із формул (16.5) і (16.6) отримаємо:

$$n_i = N_c \cdot \exp \left\{ -\frac{W_c - W_{Fi}}{kT} \right\} = N_v \cdot \exp \left\{ -\frac{W_{Fi} - W_v}{kT} \right\}. \quad (16.27)$$

Тоді формули (16.5) і (16.6) перепишуться так:

$$n = n_i \cdot \exp \left\{ -\frac{W_{Fn} - W_{Fi}}{kT} \right\}, \quad (16.28)$$

$$p = n_i \cdot \exp \left\{ -\frac{W_{Fi} - W_{Fp}}{kT} \right\}. \quad (16.29)$$

Положення рівня Фермі для  $n$ - і  $p$ -типу напівпровідників можна визначити за формулами, що отримуються із (16.28) і (16.29):

$$W_{Fn} = W_{Fi} + kT \ln \frac{n}{n_i}, \quad (16.30)$$

$$W_{Fp} = W_{Fi} - kT \ln \frac{p}{n_i}. \quad (16.31)$$

## 8. Електропровідність напівпровідників

Густина струму в напівпровідниках

$$\vec{j} = |e|n\vec{v}_n + |e|p\vec{v}_p, \quad (16.32)$$

де  $\vec{v}_n$  і  $\vec{v}_p$  – швидкості направленого (дрейфового) руху електронів і дірок відповідно, а  $n$  і  $p$  – концентрації електронів і дірок відповідно;  $\vec{v}_n = u_n \vec{E}$ ,  $\vec{v}_p = u_p \vec{E}$ ,  $u_n$  і  $u_p$  – рухливості електронів і дірок,

$\vec{E}$  – напруженість електричного поля в напівпровіднику. Згідно закону Ома  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  отримаємо, що питома електропровідність

$$\sigma = |e|nu_n + |e|pu_p. \quad (16.33)$$

Для **власного напівпровідника**, коли  $n = p = n_i = p_i$ , із врахуванням (16.12) електропровідність визначається за формулою:

$$\sigma_i = \sigma_{0i} \exp \left\{ -\frac{W_g}{2kT} \right\}, \quad (16.34)$$

де  $\sigma_{0i} = e\sqrt{N_c N_v}(u_n + u_p)$  називають сталою, що слабо залежить від температури.

В **домішкових напівпровідниках для області низьких температур** електропровідність визначається за формулами:

$$\text{для } n\text{-типу} \quad \sigma_n = \sigma_{0n} \exp \left\{ -\frac{\Delta W_n}{2kT} \right\}, \quad (16.35)$$

$$\text{для } p\text{-типу} \quad \sigma_p = \sigma_{0p} \exp \left\{ -\frac{\Delta W_p}{2kT} \right\}, \quad (16.36)$$

де  $\sigma_{0n} = \sqrt{\frac{N_c N_d}{2}} \cdot u_n \cdot |e|$ ,  $\sigma_{0p} = \sqrt{\frac{N_v N_a}{2}} \cdot u_p \cdot |e|$  сталі, що слабо залежать від температури. Для області високих температур електропровідність домішкових напівпровідників визначається за формулою (16.33), а концентрації носіїв заряду визначаються за формулами (16.15), (16.16) і законом діючих мас.

## 9. Ефект Холла

Холлівська різниця потенціалів  $U_H$  в умовах ефекту Холла дорівнює:

$$U_H = R_H B b j, \quad (16.37)$$

де  $R_H$  – постійна Холла,  $B$  – індукція магнітного поля,  $b$  – ширина зразка,  $j$  – густина струму через зразок.

Для напівпровідника з одним типом носіїв заряду постійна Холла

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{en} \approx \frac{1,2}{en}, \quad (16.38)$$

де  $n$  – концентрація носіїв заряду,  $e$  – заряд електрона.

## 10. Нерівноважні носії заряду

Зміна нерівноважної концентрації неосновних носіїв заряду з часом за рахунок рекомбінації визначається за формулами:

для  $n$  – типу напівпровідника

$$\Delta p = \Delta p_0 \exp\{-t/\tau_p\}, \quad (16.39)$$

для  $p$  – типу напівпровідника

$$\Delta n = \Delta n_0 \exp\{-t/\tau_n\}, \quad (16.40)$$

де  $\Delta p_0$ ,  $\Delta n_0$  – початкові концентрації нерівноважних дірок в  $n$  – типі і нерівноважних електронів в  $p$  – типі напівпровідниках відповідно;  $\tau_p$  і  $\tau_n$  – час життя нерівноважних дірок і електронів відповідно.

## 11. Густина дифузійних струмів

Густина дифузійних струмів електронів і дірок дорівнюють:

$$j_{Dn} = eD_n \frac{dn}{dx}, \quad (16.41)$$

$$j_{Dp} = -eD_p \frac{dp}{dx}, \quad (16.42)$$

де  $D_n$  і  $D_p$  – коефіцієнти дифузії електронів і дірок,  $dn/dx$  і  $dp/dx$  – градієнти концентрації електронів і дірок відповідно.

## 12. Співвідношення Ейнштейна

Співвідношення Ейнштейна між рухливостями і коефіцієнтами дифузії для електронів і дірок мають вид:

$$u_n = \frac{eD_n}{kT}, \quad (16.43)$$

$$u_p = \frac{eD_p}{kT}. \quad (16.44)$$

**13. Дифузія нерівноважних дірок** в напівпровідниках  $n$ -типу і нерівноважних електронів в напівпровідниках  $p$ -типу описується рівняннями:

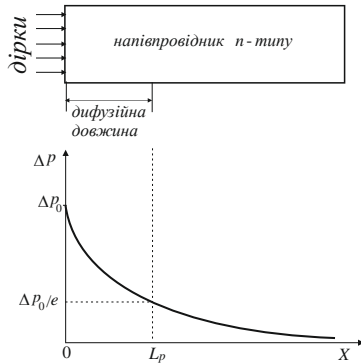
$$\Delta p(x) = \Delta p_0 \exp\{-x/L_p\}, \quad (16.45)$$

$$\Delta n(x) = \Delta n_0 \exp\{-x/L_n\}, \quad (16.46)$$

де  $\Delta p_0$  і  $\Delta n_0$  – концентрації дірок і електронів в площині  $x = 0$ , а

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p}, \quad L_n = \sqrt{D_n \tau_n} \quad (16.47)$$

– дифузійні довжини дірок і електронів. Вище сказане проілюстровано графічно на рис.16.3 для напівпровідника  $n$ -типу.



**Рис.16.3.** Дифузія нерівноважних дірок в напівпровіднику  $n$ -типу.

### 16.3. Питання на самопідготовку

1. Поясніть, чому розподіл за енергетичними рівнями електронів в зоні провідності і дірок у валентній зоні описується класичною функцією Максвелла–Больцмана?

2. Який фізичний зміст ширини забороненої зони?

3. Як ви думаєте, в чому зміст введення поняття ефективної густини станів для електронів і дірок в напівпровідниках?

4. Поясніть, від яких факторів залежить відношення концентрацій електронів і дірок в напівпровідниках?

5. Поясніть фізичний зміст закону діючих мас.

6. Поясніть, чому концентрація електронів і дірок у власних напівпровідниках сильно залежить від температури?

7. Як ви думаєте, чи можливий такий випадок в напівпровідниках, щоб ефективна маса електронів дорівнювала ефективній масі дірок? Де розташовувався б в цьому випадку рівень Фермі?

8. Чому для електричних властивостей домішкових напівпровідників важливим є чи це область високих, чи низьких температур?

9. Як ви розумієте вислів: “Сильно легований напівпровідник”?

10. Від яких факторів залежить величина часу життя в напівпровідниках?

**11.** Поясніть роль основних і неосновних носіїв заряду в напівпровідниках з точки зору електричних і фотоелектричних властивостей.

**12.** Які існують методи визначення основних фізичних параметрів напівпровідників?

**13.** Які види струму існують в напівпровідниках? В чому різниця між ними?

## **16.4. Методичні вказівки**

Розв'язування задач з фізики напівпровідників вимагає творчого підходу і детального аналізу умови задачі. Як правило, при розв'язуванні задач по даній темі приходится робити різні припущення. І цілком можлива така ситуація, що при різних припущеннях можна одержати різні числові відповіді. Все залежить від тих припущень, які зроблені при розв'язуванні задачі. Головне – щоб припущення не були абсурдними і не протиричали теорії. Якщо в умові задачі не приводяться деякі параметри чистого напівпровідника, то необхідно скористатись даними таблиці 12 додатків.

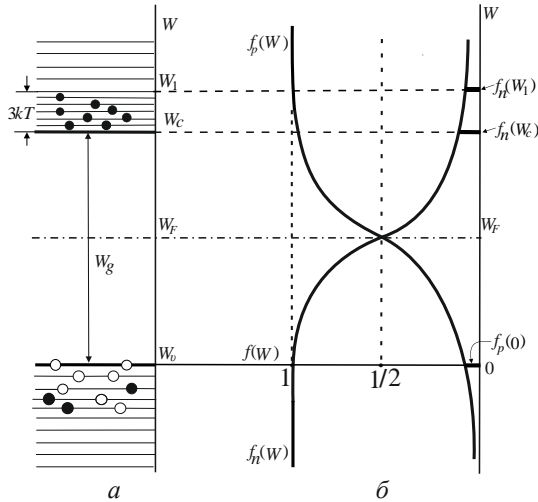
## **16.5. Приклади розв'язування задач**

**Задача 16.1.** Рівень Фермі напівпровідника знаходиться на 0,3 еВ нижче дна зони провідності. Яка ймовірність того, що при кімнатній температурі енергетичні рівні, які розташовані на відстані  $3kT$  вище дна зони провідності, зайняті електронами? Яка ймовірність того, що рівень біля стелі валентної зони містить дірки, а рівень біля дна зони провідності – електрони? Ширина забороненої зони – 1,1 еВ.

**Розв'язок.** Для розв'язування задачі необхідно виконати рис.16.4 аналогічний рис.(16.1) (а) і (в). Із умови задачі видно, що рівень Фермі розташований ближче до зони провідності, тому згідно співвідношення (16.9) напівпровідник є  $n$ -типу і містить донорні домішки. За початок відліку енергії в напівпровідниках приймається стеля валентної зони, тому абсолютні значення енергії рівнів, які нас цікавлять, дорівнюють:

$$W_v = 0; W_F = W_g - 0,3 \text{ еВ}; W_1 = W_g + 3kT; W_c = W_g.$$





**Рис.16.4.** Енергетична діаграма напівпровідника (а) і графіки функцій розподілу ймовірності заповнення енергетичних рівнів електронами  $f_n(W)$  і дірками  $f_p(W) = 1 - f_n(W)$  (б). Світлими кружечками позначені дірки, чорними - електрони.

Ймовірність заповнення рівнів електронами визначається за формулою (16.3). Ймовірність того, що даний стан вільний від електрона, тобто зайнятий діркою, визначається за формулою (16.4). На рис.16.4(б) ймовірності, які нам потрібно визначити, позначені товстими горизонтальними лініями. Для розрахунків приймемо, що  $T = 293 \text{ K}$  і  $kT = 0,0253 \text{ eV}$ .

Ймовірність заповнення електронами рівня  $W_1$  дорівнює:

$$\begin{aligned}
 f_n(W_1) &= \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_1 - W_F}{kT}\right\} + 1} = \frac{1}{\exp\left\{\frac{0,3 + 3kT}{kT}\right\} + 1} = \\
 &= \frac{1}{\exp\left\{\frac{0,3}{kT} + 3\right\} + 1} = \frac{1}{\exp\{11,85 + 3\} + 1} \approx \exp\{-14,85\} = \\
 &= 3,5 \cdot 10^{-7}.
 \end{aligned}$$

Ймовірність заповнення електронами рівня дна зони провідності дорівнює:

$$f_n(W_c) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_c - W_F}{kT}\right\} + 1} = \frac{1}{\exp\left\{\frac{0,3}{0,0253}\right\} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\exp\{11,85\} + 1} \approx \exp\{-11,85\} = 7 \cdot 10^{-6}.$$

Ймовірність того, що на рівні біля стелі валентної зони знаходяться дірки, дорівнює:

$$f_p(W_p) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_F - W_v}{kT}\right\} + 1} = \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_F}{kT}\right\} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_g - 0,3\text{eV}}{kT}\right\} + 1} = \frac{1}{\exp\left\{\frac{0,8}{0,0253}\right\} + 1} \approx \exp\{-31,6\} =$$

$$= 1,8 \cdot 10^{-14}.$$

**Висновки. 1.** Числові розрахунки показали, що справді для описання статистичних закономірностей електронів і дірок в напівпровідниках з успіхом можна використовувати класичну функцію розподілу ймовірності Максвелла-Больцмана, тобто одиницею в знаменнику формул (16.3) і (16.4) можна знехтувати.

**2.** Ймовірність того, що на рівні біля стелі валентної зони знаходяться дірки, нехтовно мала. Це і зрозуміло, тому що напівпровідник  $n$ -типу, містить донорні рівні, а рівень Фермі знаходиться "далеко" від стелі валентної зони.

**Задача 16.2.** На скільки треба підвищити температуру чистого германію порівняно з 300 К, щоб число електронів провідності збільшилось у 2 рази?

**Розв'язок.** Скористаємось формулою (16.12), згідно якої

$$n_i(T) \sim T^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{W_g}{2kT}\right\},$$

а

$$n_i(T + \Delta T) \sim (T + \Delta T)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{W_g}{2k(T + \Delta T)}\right\}.$$

Згідно умови задачі

$$\frac{n_i(T + \Delta T)}{n_i(T)} = 2 = \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{W_g}{2kT} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T}}\right)\right\}.$$

Після логарифмування останнього виразу отримаємо:

$$\ln 2 = \frac{3}{2} \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) + \frac{W_g}{2kT} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T}}\right). \quad (1)$$

Це рівняння розв'язати відносно  $\Delta T$  в загальному випадку складно. Тому скористаємось формулами наближеного підрахунку:

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) \approx \frac{\Delta T}{T}, \quad \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T}} \approx 1 - \frac{\Delta T}{T}.$$

При отриманні цих формул вважається, що величина  $\Delta T/T$  мала порівняно із 1. Це може бути тоді, коли  $\Delta T \ll T = 300$  К. Таке твердження не зовсім очевидне, тому приведемо деякі міркування. Залежність концентрації електронів провідності в напівпровідниках експоненціально залежить від температури. Враховуючи числові значення, які приведені в умові задачі і дані табл. 12 додатків, неважко отримати за допомогою (16.12), що

$$n_i \sim \exp\left\{-\frac{4,2 \cdot 10^3}{T}\right\}.$$

Тоді згідно рівняння (1)

$$\ln 2 \cong 0,7 \approx \frac{4,2 \cdot 10^3}{300} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T}}\right).$$

Після нескладних перетворень отримаємо, що

$$1 + \frac{\Delta T}{T} = \frac{14}{14 - 0,7} \approx 1,053.$$

Звідки можемо зробити висновок, що  $\Delta T/T \ll 1$ . Таким чином рівняння (1) спрощується до вигляду:

$$\ln 2 = \frac{\Delta T}{T} \left(\frac{3}{2} + \frac{W_g}{2kT}\right).$$

Тоді знаходимо, що

$$\Delta T = \frac{T \ln 2}{\frac{3}{2} + \frac{W_g}{2kT}}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо невідому величину  $\Delta T$ :

$$\Delta T = \frac{300 \cdot 0,7}{1,5 + 13,9} = 14 \text{ К.}$$

**Висновок.** Зміна температури германію приблизно на 5% від кімнатної призводить до зміни концентрації вільних носіїв заряду на 100% і, як наслідок, приблизно на стількиж відсотків зміниться його провідність. Зрозуміло, що такі зміни не можуть не вплинути на характеристики приладів, виготовлених із чистого германію. В таких випадках необхідна термостабілізація приладу.

**Задача 16.3.** Як зміниться концентрація носіїв заряду у власному напівпровіднику при зміні температури від  $T_1 = 200 \text{ К}$  до  $T_2 = 300 \text{ К}$ , якщо  $W_g = W_0 - aT$ , де  $W_0 = 0,785 \text{ еВ}$ ,  $a$  стала величина?

**Розв'язок.** Концентрація носіїв заряду у власному напівпровіднику визначається за формулою (16.12). Тому можемо записати, що

$$n_1 = \sqrt{N_c(T_1) \cdot N_v(T_1)} \cdot \exp \left\{ -\frac{W_0 - aT_1}{2kT_1} \right\},$$

а

$$n_2 = \sqrt{N_c(T_2) \cdot N_v(T_2)} \cdot \exp \left\{ -\frac{W_0 - aT_2}{2kT_2} \right\},$$

де  $W_0 = 0,785 \text{ еВ}$ ,  $N_c$  і  $N_v$  визначаються за формулами (16.7) і (16.8). Тоді

$$\frac{n_2}{n_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{3/2} \cdot \exp \left\{ \frac{W_0}{2k} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right\}.$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо:

$$\frac{n_2}{n_1} = \left( \frac{300}{200} \right)^{3/2} \cdot \exp \left\{ \frac{0,785 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \left( \frac{1}{200} - \frac{1}{300} \right) \right\} = 3639.$$

**Задача 16.4.** Розрахувати температурний коефіцієнт опору чистого бездомішкового арсеніду галія при температурі  $T = 300 \text{ К}$ .

**Розв'язок.** Згідно визначення температурний коефіцієнт опору

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}, \quad (1)$$

де  $\rho$  – питомий опір при деякій температурі  $T$ ,  $d\rho$  – зміна питомого опору при зміні температури на величину  $dT$ . Тобто  $\alpha$  показує відносну зміну  $d\rho/\rho$  питомого опору при зміні температури на 1 К. Згідно формули (16.34) можемо записати, що питомий опір

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_i} = \rho_{0i} \cdot \exp \left\{ \frac{W_g}{2kT} \right\}. \quad (2)$$

Звідки знаходимо, що

$$\frac{d\rho}{dT} = -\frac{W_g}{2kT^2} \rho$$

і тоді

$$\alpha = -\frac{W_g}{2kT^2}.$$

Скориставшись табличними даними для арсеніду галію (табл. 12 додатків), отримаємо, що

$$\alpha = -\frac{1,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300^2} \text{ К}^{-1} = -0,09 \text{ К}^{-1}.$$

Зауважимо, що для напівпровідників  $\alpha$  залежить від температури на відміну від  $\alpha$  для металів, значення  $\alpha$  для яких є сталим і для різних металів його величина приводиться у довідкових таблицях.

**Задача 16.5.** Число атомів германію в одиниці об'єму дорівнює  $4,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . В зразок вводиться домішка  $n$ -типу в кількості одного атома на  $10^6$  атомів германію. Визначити концентрацію основних і неосновних носіїв заряду, вважаючи, що всі електрони донорів є збудженими і знаходяться в зоні провідності.

**Розв'язок.** Згідно умови задачі всі домішки іонізовані і можна вважати, що концентрація основних електронів і неосновних дірок для рівноважного стану визначається співвідношеннями (16.15), (16.10) і (16.12):

$$n_n = \frac{N_d}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2n_i}{N_d} \right)^2} \right),$$

$$p_n = n_i^2 / n_n.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно  $n_n$  і  $p_n$ , отримаємо концентрації основних і неосновних носіїв заряду. Проте

концентрація домішникових атомів  $N_d = n_{Ge}/10^6 = 4,5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$  значно більша концентрації  $n_i$  (табл.12, додатків). Значить в задачі розглядається випадок сильного легування і тому розрахункові формули спрощуються, а саме:

$$n_n = N_d; \quad p_n = n_i^2 / N_d.$$

Після підстановки числових значень, отримаємо, що

$$n_n = 4,5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}, \text{ а } p_n = \frac{(2,4 \cdot 10^{19})^2}{4,5 \cdot 10^{22}} \text{ м}^{-3} = 1,28 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}.$$

**Висновок.** В цій задачі має місце явище заглушування неосновних носіїв заряду. Якщо в чистому германії концентрація дірок складає величину  $2,4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ , то в легованому –  $1,28 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ , тобто зменшується на три порядки.

**Задача 16.6.** При температурі 300 К електропровідність зразка власного кремнію дорівнює  $3,17 \cdot 10^{-4} \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$ . Яка концентрація власних носіїв заряду? Якщо через зразок протікає струм, то яка частина струму обумовлена дірками? Той же зразок, легований донорними домішками, має електронну провідність. Концентрація донорів дорівнює  $10^{21} \text{ м}^{-3}$ . Знайти концентрацію дірок в легованому зразку і визначити, яка частина провідності обумовлена ними.

Допустити, що легування практично не впливає на величину рухливості носіїв заряду.

**Розв'язок.** Розв'язувати задачу будемо частинами. В першій частині розглянемо чистий кремній, у другій – легований.

1) Електропровідність власного кремнію визначається за формулою (16.33)

$$\sigma_i = e n_i (u_n + u_p) = e p_i (u_n + u_p).$$

Скориставшись даними табл. 12 додатків, знаходимо, що

$$p_i = \frac{\sigma_i}{e(u_n + u_p)} = \frac{3,17 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-19} (0,13 + 0,05)} \text{ м}^{-3} \approx 1,1 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}.$$

Густина струму через зразок згідно закону Ома в диференційній формі записується так:

$$j = \sigma E,$$

де  $E$  – напруженість електричного поля в зразку. Тому відношення струмів знаходимо так:

$$\frac{j_{ip}}{j_i} = \frac{\sigma_{ip} \cdot E}{\sigma_i \cdot E} = \frac{ep_i u_p}{ep_i(u_n + u_p)} = \frac{0,05}{0,13 + 0,05} = 0,28 = 28\%.$$

2) Розв'язування другої частини задачі вимагає невеликого аналізу. При  $T = 300$  К,  $kT = 0,0259$  еВ  $> 10^{-2}$  еВ і тому можна вважати, що практично всі домішки іонізовані. Так як  $N_d \gg n_i = p_i$ , то скористаємось формулами для розрахунку основних і неосновних носіїв заряду для випадку сильного легування. Тому згідно (16.19)

$$p_n = \frac{n_i^2}{N_d} = \frac{2,17 \cdot 10^{32}}{10^{21}} \text{ м}^{-3} \approx 2,2 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3},$$

а згідно (16.17) концентрація електронів

$$n_n = N_d = 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

Частина провідності, що обумовлена дірками буде дорівнювати:

$$\frac{\sigma_p}{\sigma} = \frac{ep_n u_p}{e(p_n u_p + n_n u_n)} = \frac{1}{1 + \frac{n_n u_n}{p_n u_p}} = \frac{1}{1 + 0,12 \cdot 10^{11}} \approx 8 \cdot 10^{-9}\%.$$

**Висновок.** Ця задача наглядно ілюструє, як сильно легування змінює структуру електропровідності зразка. Якщо в чистому кремнії дірки обумовлюють 28% провідності, то при легуванні донорними домішниками (з розрахунку 1 атом домішки на 10 мільйонів атомів основної речовини) можна вважати, що електропровідність такого матеріалу практично повністю обумовлена електронами. В цьому суть прояву заглушування неосновних носіїв заряду.

**Задача 16.7.** Вирахувати енергію активації донорних атомів і температурний коефіцієнт опору в германії  $n$ -типу, якщо відомо, що рухливість електронів  $500 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ , концентрація донорних атомів –  $5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , питомий опір  $1,5 \text{ кОм} \cdot \text{см}$ , температура напівпровідника  $50$  К.

**Розв'язок.** Згідно умови задачі  $kT = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ еВ} < 0,01 \text{ еВ}$

і тому можна скористатись формулою (16.35). Враховуючи, що  $\sigma_n = 1/\rho$ , отримаємо співвідношення:

$$\frac{1}{\rho} = eu_n \sqrt{\frac{N_d N_c}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\Delta W_n}{2kT}\right\}.$$

Звідки знаходимо, що

$$\Delta W_n = 2kT \cdot \ln\left(\rho \cdot eu_n \sqrt{\frac{N_d N_c}{2}}\right).$$

Для числових розрахунків скористаємось формулою (16.7) і даними табл.12 додатків, прийнявши  $m_n^*/m_e = 0,55$ . Тоді після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо енергію активації донорних атомів:

$$\Delta W_n = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 50}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot \ln\left(15 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,05 \cdot \left(\frac{5 \cdot 10^{23} \cdot 4,83 \cdot 10^{21} (0,55 \cdot 50)^{3/2}}{2}\right)^{1/2}\right) = 0,093 \text{ eV}.$$

Згідно розв'язку задачі (16.4) температурний коефіцієнт опору для умови нашої задачі буде:

$$\alpha = -\frac{\Delta W_n}{2kT^2} = -\frac{0,093 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 50^2} K^{-1} = -0,22 K^{-1}.$$

**Задача 16.8.** Зразок кремнію  $n$ -типу, що знаходиться в стані термодинамічної рівноваги при температурі 300 К, характеризується такими параметрами: питомий опір 5 Ом·см, рухливість електронів 1600 см<sup>2</sup>/(В·с); рухливість дірок 600 см<sup>2</sup>/(В·с); ефективна густина рівнів в зоні провідності 10<sup>19</sup> см<sup>-3</sup>. Визначити:

**а)** концентрацію електронів і дірок; **б)** положення рівня Фермі;  
**в)** ймовірність того, що донорний рівень зайнятий електронами.  
Відомо, що енергія активації донорного рівня  $\Delta W_n = W_c - W_d = 50 \text{ меВ}$ .

**Розв'язок.** **а)** Запишемо рівняння, яке визначає питому провідність, а також закон діючих мас з урахуванням (16.10), (16.12):

$$\frac{1}{\rho} = \sigma = e(u_n n_n + p_n u_p); \quad p_n n_n = n_i^2,$$



де значення  $n_i$  беремо із табл.12 додатків. Із цих формул отримаємо, що

$$\frac{1}{\rho} = e(u_n n_n + \frac{n_i^2}{n_n} u_p),$$

або

$$20 = 1,6 \cdot 10^{-19} \left( n_n \cdot 0,16 + \frac{(1,1 \cdot 10^{16})^2}{n_n} \cdot 0,06 \right).$$

Звідки знайдемо, що  $n_n = 7,8 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ , а  $p_n = n_i^2 / n_n = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$ .

**б)** Використаємо співвідношення (16.5), вважаючи, що  $n_n = n$ .

Тоді

$$n_n = N_c \exp \left\{ -\frac{W_c - W_F}{kT} \right\}.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$7,8 \cdot 10^{20} = 10^{25} \exp \left\{ -\frac{W_c - W_F}{8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 300} \right\}.$$

Звідки знайдемо, що  $W_c - W_F = 0,244 \text{ eV}$ .

Для розв'язування цього завдання можна було б скористатися формулою (16.23), прийнявши  $N_d = n_n$ .

**в)** Ймовірність того, що донорний рівень зайнятий електроном розрахуємо за допомогою функції Фермі-Дірака (16.3):

$$f(W_d) = \left( 1 + \exp \left\{ \frac{W_d - W_F}{kT} \right\} \right)^{-1}.$$

Так як  $W_c - W_F = 0,244 \text{ eV}$ ,  $W_c - W_d = 0,05 \text{ eV}$ , то  $W_d - W_F = 0,194 \text{ eV}$  і

$$\begin{aligned} f(W_d) &= \left( 1 + \exp \left\{ \frac{0,194}{8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 300} \right\} \right)^{-1} = \\ &= 5,5 \cdot 10^{-4} = 0,055\%. \end{aligned}$$

**Висновок.** Ймовірність того, що донорний рівень зайнятий електроном, тобто відносна частка неіонізованих донорів, складає 0,055%. В той же час відносна частка іонізованих донорів дорівнює 99,945%. Тобто можна вважати, що донори з енергією

активації  $\Delta W_n = W_c - W_d = 0,05 \text{ eV}$  при температурі  $300 \text{ K}$  ( $kT = 0,026 \text{ eV}$ ) практично майже всі іонізовані.

**Задача 16.9.** Знайти положення рівня Фермі в германії, що знаходиться в стані термодинамічної рівноваги. Матеріал легований акцепторними атомами, концентрація яких  $N_a = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Значення температури  $T = 0; 100; 300$  і  $400 \text{ K}$ . Вважати, що при  $T = 100 \text{ K}$  іонізованими є 50%, а при вищих температурах іонізовані 100% домішкових атомів. Вважати, що має місце рівність

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} T^3 \exp \left\{ -\frac{8355}{T} \right\} \text{ см}^{-6}.$$

**Розв'язок. а)** При  $T = 0$ ,  $n_i = 0$ , домішкові атоми неіонізовані і тому електропровідність відсутня. Рівень Фермі згідно (16.22) розташовується посередині забороненої зони і

$$W_F = \frac{W_g}{2} = \frac{8355k}{2} = \frac{0,72}{2} \text{ eV} = 0,36 \text{ eV}.$$

Зауважимо, що за початок відліку енергії прийнято стелю валентної зони, тобто  $W_v = 0$ . Тому енергія дна зони провідності  $W_c = W_g$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

**б)** При  $T = 100 \text{ K}$ ,

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} \cdot (100)^3 \exp \left\{ -\frac{8355}{100} \right\} = 161 \text{ см}^{-6};$$

$$n_i = 13 \text{ см}^{-3}.$$

Так як  $N_a \gg n_i$ , то концентрація основних носіїв заряду (дірок) згідно умови задачі  $p_p = \frac{N_a}{2} \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ . Концентрація неосновних носіїв заряду (електронів)

$$n_p = n_i^2 / p_p = 3,2 \cdot 10^{-13} \text{ см}^{-3}.$$

Таким чином при  $T = 100 \text{ K}$  має місце домішкова провідність. Енергію рівня Фермі розрахуємо за формулою (16.31):

$$W_{F_p} = \frac{0,72}{2} - 8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \ln \frac{5 \cdot 10^{14}}{13} \approx 0,09 \text{ eV}.$$

**в)** При  $T = 300 \text{ K}$

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} \cdot (300)^3 \exp \left\{ -\frac{8355}{300} \right\} = 6,7 \cdot 10^{27} \text{ см}^{-6};$$

$$n_i \approx 8,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3};$$

$$p_p = 10^{15} \text{ см}^{-3}; \quad n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = 6,7 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}.$$

$$W_{F_p} = 0,36 - 8,62 \cdot 10^{-5} 300 \ln \frac{10^{15}}{8,2 \cdot 10^{13}} = 0,3 \text{ eВ}.$$

г) При  $T = 400 \text{ К}$

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} \cdot (400)^3 \exp \left\{ -\frac{8355}{400} \right\} = 1,68 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-6};$$

$$n_i \approx 4,1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Згідно (10.16)

$$p_p = \frac{10^{15}}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2 \cdot 4,1 \cdot 10^{15}}{10^{15}} \right)^2} \right) = 4,63 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3};$$

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = \frac{1,68 \cdot 10^{31}}{4,63 \cdot 10^{15}} = 3,63 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Так як  $p_p \approx n_p \approx n_i$ , то значно зростає власна провідність.

$$W_F = 0,36 - 8,62 \cdot 10^{-5} 400 \ln \frac{4,63 \cdot 10^{15}}{4,1 \cdot 10^{15}} = 0,356 \text{ eВ}.$$

**Висновок.** Як видно із результатів розрахунку положення рівня Фермі в домішковому напівпровіднику суттєво залежить від температури, а при низьких температурах і від концентрації домішки. З ростом температури змінюється також режим провідності. Якщо при низьких температурах ( $T = 100 \text{ К}$ ) провідність домішкова, то при  $T = 400 \text{ К}$  провідність вже практично власна.

**Задача 16.10.** В зоні провідності арсеніду галію ( $n\text{-GaAs}$ ) поряд з основним мінімумом енергії (I), який має місце при  $k = 0$ , є бічний мінімум (II), що розташований вище основного на  $W_S = 0,35 \text{ eВ}$  (рис.16.5). Рухливості електронів в мінімумах I і II і повну концентрацію електронів вважати такими, що не залежать від температури. Ефективну масу і рухливість електронів мінімуму II прийняти такими:  $m_{II} = 15m_I$ ,  $u_{II} = u_I/50$ , де  $m_I$  і  $u_I$  ефективна маса і

рухливість електронів мінімуму I відповідно. Знайти зміну провідності напівпровідника при збільшенні температури від 300 К до 1000 К.

**Розв'язок.** Спочатку розв'язку задачі необхідно звернути увагу на те, що саме в такому  $n$ -GaAs спостерігається ефект Ганна. Ця задача повинна допомогти глибше зрозуміти механізм утворення домена електричного поля в ефекті Ганна. В умовах ефекту Ганна заповнення електронами мінімумів I і II змінюється внаслідок дії електричного поля, яке прикладене до зразка, а в нашій задачі це відбувається за допомогою температури. Проте електропровідність при цьому змінюється приблизно однаково (має  $N$  – подібний характер). При умові ефекта Ганна зменшення електропровідності з ростом електричного поля (для  $E > E_n$ , де  $E_n$  – деяке порогове значення напруженості електричного поля) безпосередньо зв'язано із збільшенням концентрації носіїв заряду в мінімумі II зони провідності. Приступимо до безпосереднього розв'язку задачі.

Провідність  $n$ -GaAs із врахуванням тільки основних носіїв заряду буде така:

$$\sigma_n = en_1 u_1 + en_2 u_2,$$

де

$n_1 = N_{c1} \exp\left\{-\frac{W_c - W_F}{kT}\right\}$  – концентрація електронів в зоні I,

$n_2 = N_{c2} \exp\left\{-\frac{(W_c + W_s) - W_F}{kT}\right\}$  – концентрація електронів в зоні II, записані згідно формули (16.5).

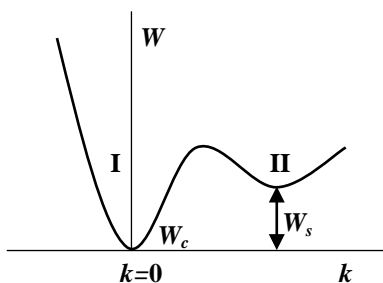


Рис. 16.5.

$$N_{c1} = \frac{2}{h^3} (2\pi \cdot m_1 kT)^{3/2},$$

$$N_{c2} = \frac{2}{h^3} (2\pi \cdot m_2 kT)^{3/2} -$$

– ефективні густини рівнів в зонах I і II записані згідно (16.7).

Тому відношення концентрацій електронів буде:

$$\frac{n_{II}}{n_I} = \frac{N_{CII}}{N_{CI}} \cdot \exp\left\{-\frac{W_S}{kT}\right\} = \left(\frac{m_{II}}{m_I}\right)^{3/2} \cdot \exp\left\{-\frac{W_S}{kT}\right\}.$$

Для випадку  $T = 300$  К це відношення дорівнює:

$$\left(\frac{n_{II}}{n_I}\right)_{300} = (15)^{3/2} \cdot \exp\left\{-\frac{0,35}{0,0259}\right\} \approx 58 \cdot \exp\{-13,9\} \approx 5 \cdot 10^{-5},$$

а для випадку  $T = 1000$  К

$$\left(\frac{n_{II}}{n_I}\right)_{1000} = (15)^{3/2} \cdot \exp\left\{-\frac{0,35}{0,0862}\right\} \approx 58 \cdot \exp\{-4,05\} \approx 1.$$

При цьому враховано, що  $kT = 0,0259$  еВ при  $T = 300$  К і  $kT = 0,0862$  еВ при  $T = 1000$  К. Таким чином, при кімнатній температурі число електронів в зоні II нехтовно мале порівняно з числом електронів в зоні I, а значить провідність

$$\sigma_n(300) \approx en_I(300) \cdot u_I.$$

При  $T = 1000$  К число електронів в зонах I і II вже приблизно однакове і

$$\begin{aligned}\sigma_n(1000) &= en_I(1000) \cdot u_I + en_{II}(1000) \cdot u_{II} \approx \\ &\approx en_I(1000) \cdot (u_I + u_{II}).\end{aligned}$$

Тоді відношення провідностей

$$\frac{\sigma_n(1000)}{\sigma_n(300)} = \frac{n_I(1000)}{n_I(300)} \left(1 + \frac{u_{II}}{u_I}\right).$$

Згідно умови задачі повна концентрація електронів не залежить від зміни температури і є сталою, а тому

$$n_I(300) + n_{II}(300) = n_I(1000) + n_{II}(1000),$$

або

$$n_I(300) \approx 2n_I(1000).$$

Тоді отримаємо кінцевий результат:

$$\frac{\sigma_n(1000)}{\sigma_n(300)} \approx \frac{1}{2}.$$

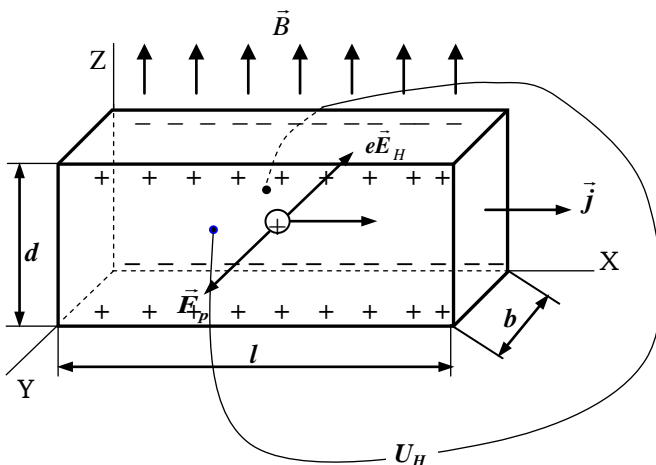
**Висновок.** 1. Електропровідність  $n$ -GaAs при підвищенні температури від 300 К до 1000 К зменшується приблизно удвічі, що

не зовсім узгоджується із нашим загальним представленням про залежність електропровідності напівпровідників від температури.

2. Отриманий в задачі результат пояснюється тим, що з ростом температури електрони із зони I, де рухливість більша, “переливаються” в зону II, де рухливість менша. Іншими словами, з ростом температури (те ж саме має місце і при збільшенні електричного поля в зразку) збільшується число малорухливих електронів, що і обумовлює  $N$  – подібну вольтамперну характеристику  $n$  – GaAs.

**Задача 16.11.** Пластинку із напівпровідника  $p$ -типу, ширина якого  $b = 1$  см, а довжина  $l = 5$  см, розташували в однорідному магнітному полі, індукція якого  $B = 0,5$  Тл. До кінців пластини (вздовж ребра, розмір якого  $l$ ) приклали постійну напругу  $U = 10$  В. При цьому холлівська різниця потенціалів дорівнює  $U_H = 5 \cdot 10^{-2}$  В. Питомий опір напівпровідника  $\rho = 0,025$  Ом·м. Визначити постійну Холла, концентрацію і рухливість дірок.

**Розв’язок.** Починати розв'язування задачу необхідно з



**Рис.16.6.** Ефект Холла в напівпровідниках.  $\vec{j}$  – густина струму, що протікає через зразок.

аналізу рис.16.6. Нехай магнітне поле направлене вздовж осі Z, а

струм протікає вздовж осі Х. Тоді дірки рухаються вздовж осі Х із швидкістю  $v_p = u_p \cdot E_x$ , де  $E_x$  – напруженість електричного поля вздовж осі Х, яка дорівнює  $U/l$ . В магнітному полі на дірку, що рухається, діє сила Лоренца  $\vec{F}_p = e\vec{v}_p \times \vec{B}$ , яка направлена вздовж осі Y. Ця сила відхиляє дірки від прямолінійного напрямку руху, внаслідок чого виникає поперечна складова (паралельна осі Y) електричного холлівського поля  $E_H$ , величина якої знаходиться із умови:

$$eE_H = |\vec{F}_p| = ev_p B.$$

Звідки

$$E_H = v_p B.$$

Дві протилежно заряджені площини зразка можна розглядати, як пластини плоского конденсатора, різниця потенціалів між якими  $U_H = E_H \cdot b = v_p B b$  отримала назву холлівської. Якщо врахувати, що  $j = ev_p$ , то  $U_H = R_H B b j$ , де  $R_H = 1/(ep)$  носить назву постійної Холла.

В нашій задачі густина струму  $j$  невідома величина, але її можна виразити через відомі величини, а саме:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{U/R}{bd} = \frac{U}{\frac{l}{\rho} \frac{bd}{bd}} = \frac{U}{\rho l}.$$

Тоді холлівська різниця потенціалів запишеться так:

$$U_H = R_H b B \frac{U}{\rho l}.$$

Звідки знаходимо постійну Холла:

$$R_H = \frac{U_H \rho l}{B b U}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$R_H = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^3}{\text{Кл}}}{5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} \cdot 10} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{Кл}.$$

Тоді концентрація дірок

$$p = \frac{1}{e R_H} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,25 \cdot 10^{-3}} \text{ м}^{-3} = 5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

Рухливість дірок отримаємо після нескладних перетворень відомих формул:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = e p u_p = u_p / R_H;$$

$$u_p = \frac{R_H}{\rho} = \frac{1,25 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-2}} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}) = 0,05 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}).$$

**Висновки:** 1. Залежність між холлівською різницею потенціалів  $U_H$  і густиною струму  $j$  є лінійною з коефіцієнтом пропорційності  $R_H B b$ . Якщо відома індукція магнітного поля  $B$ , ширина зразка  $b$  і експериментально визначений нахил залежності  $U_H = f(j)$ , то можемо знайти постійну Холла  $R_H$ , концентрацію носіїв заряду  $p$  і їхню рухливість  $u_p$ .

2. Необхідно відмітити, що вище приведений приклад розв'язування задачі і відповідні формули є справедливими тільки для напівпровідників з одним типом провідності, тобто для сильно легованих напівпровідників. Для напівпровідників із електронною і дірковою провідностями теорія ефекту Холла є більш складною.

3. За допомогою ефекту Холла досліджують напівпровідники в наукових установах, а також на його основі побудовані прилади (наприклад, магнітометри).

**Задача 16.12.** Покажіть, що для невідродженого напівпровідника, який містить значну кількість як електронів так і дірок, провідність буде мінімальна при  $n = n_i / \sqrt{b}$ , де  $n_i$  – число електронів у власному напівпровіднику при даній температурі, а  $b$  – відношення рухливості електронів  $u_n$  до рухливості дірок  $u_p$ . Покажіть, що постійна Холла, яка визначається для такого напівпровідника виразом

$$R_H = \frac{3\pi}{8e} \cdot \frac{p u_p^2 - n u_n^2}{(p u_p + n u_n)^2},$$

у власному напівпровіднику має від'ємний знак. Знайдіть, при якому значенні електропровідності легованого матеріалу постійна Холла дорівнює нулю.



**Розв’язок. 1.** Будемо розглядати напівпровідник  $n$ -типу. Загальний вираз для його електропровідності запишеться як

$$\sigma_n = en_n u_n + ep_n u_p.$$

Із врахуванням закону діючих мас  $n_n p_n = n_i^2$  вираз  $\sigma_n$  переписеться так:

$$\sigma_n = en_n u_n + e \frac{n_i^2}{n_n} u_p.$$

Дослідимо цей вираз на екстремум:

$$\frac{d\sigma_n}{dn_n} = eu_n - e \frac{n_i^2}{n_n^2} u_p = 0.$$

Звідки знаходимо, що функція  $\sigma_n(n_n)$  має екстремальне значення при

$$n_n = n_i \sqrt{u_p / u_n} = n_i / \sqrt{u_n / u_p} = n_i / \sqrt{b}.$$

Розв’язок із знаком “–” відкидаємо, так як він не має фізичного змісту, а при  $n_n = n_i / \sqrt{b}$  провідність має мінімальне значення. В цьому легко переконатись, досліджуючи другу похідну  $\frac{d^2\sigma_n}{dn_n^2} = \frac{en_i^2 u_p}{n_n^3}$ , яка є додатньою при  $n_n = n_i / \sqrt{b}$ .

**2.** Те, що постійна Холла для власного напівпровідника має від’ємний знак, означає, що провідність напівпровідника має електронний характер. Із виразу для  $R_H$  видно, що її знак визначається знаком чисельника. Тому для власного напівпровідника

$$p_i u_p^2 - n_i u_p^2 = n_i (u_p + u_n)(u_p - u_n) < 0,$$

так як майже завжди  $u_p < u_n$ .

**3.** Знайдемо електропровідність напівпровідника, в якому ефект Холла не спостерігається, тобто постійна Холла дорівнює нулеві. Із виразу для постійної Холла і умови задачі отримаємо співвідношення:

$$p_n u_p^2 = n_n u_n^2.$$

Якщо врахувати закон діючих мас  $n_n p_n = n_i^2$ , то отримаємо, що

$$n_n = n_i / b, \text{ а } p_n = n_i \cdot b.$$

Тоді електропровідність напівпровідника буде дорівнювати:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= en_n u_n + ep_n u_p = en_i \left( \frac{u_n}{b} + u_p \cdot b \right) = \\ &= en_i \left( \frac{u_n}{u_n / u_p} + u_p \frac{u_n}{u_p} \right) = en_i (u_p + u_n) = \sigma_i.\end{aligned}$$

**Висновки.** 1. Мінімальну електропровідність (максимальний опір) напівпровідник має при концентрації електронів  $n = n_i / \sqrt{b}$  і дірок  $p = n_i \cdot \sqrt{b}$ .

2. *Ефект Холла в напівпровідниках, які містять два типи носіїв заряду, відсутній при виконанні умови:  $pu_p^2 = nu_n^2$ .*

3. Якщо ефект Холла в легованому напівпровіднику відсутній, то його електропровідність дорівнює електропровідності власного напівпровідника з цього ж матеріалу.

**Задача 16.13.** На одній стороні зразка германію  $n$ -типу концентрація дірок збільшується до  $1 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ . Крім цього задані такі параметри зразка: питомий опір  $\rho = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , час життя носіїв  $\tau = 10^{-4} \text{ с}$ . Визначити: а) відношення концентрації основних і неосновних носіїв заряду; б) дифузійну довжину для дірок; в) густину дифузійного діркового струму при  $T = 300 \text{ К}$ .

**Розв'язок.** а) Електропровідність зразка у відсутності нерівноважних дірок дорівнює:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = en_n u_n + ep_n u_p,$$

де  $n_n$  – концентрація основних,  $p_n$  – концентрація неосновних носіїв заряду.

З урахуванням закону діючих мас  $n_n \cdot p_n = n_i^2$  отримаємо квадратне рівняння відносно  $n_n$ :

$$n_n^2 - \frac{1}{eu_n \rho} n_n + n_i^2 \cdot \frac{u_p}{u_n} = 0. \quad (1)$$

Скористаємось даними табл.12 додатків. Після підстановки числових значень рівняння (1) прийме вид:

$$n_n^2 - 8,0 \cdot 10^{20} \cdot n_n + 2,8 \cdot 10^{38} = 0.$$

Розв'язком цього рівняння буде:

$$n_n = \left( 4,0 \cdot 10^{20} + \sqrt{16 \cdot 10^{40} - 2,8 \cdot 10^{38}} \right) \text{м}^{-3} \approx 8,0 \cdot 10^{20} \text{м}^{-3}.$$

Тоді

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} = 7,2 \cdot 10^{17} \text{м}^{-3}$$

і відношення

$$n_n/p_n = 1,1 \cdot 10^3.$$

б) За формулою (16.47) дифузійна довжина дірок  $L_p = \sqrt{D_p \cdot \tau}$ . Враховуючи співвідношення Ейнштейна між рухливістю і коефіцієнтом дифузії (16.44), отримаємо, що

$$L_p = \sqrt{\frac{kTu_p \tau}{e}}.$$

Після підстановки числових значень знаходимо:

$$L_p = \sqrt{\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 0,17 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{м} = 7,0 \cdot 10^{-4} \text{м} = 0,70 \text{мм}.$$

в) За формулою (16.42) густина дифузійного струму

$$j_{Dp} = -eD_p \frac{dp}{dx}.$$

Для знаходження градієнта концентрації дірок необхідно використати рис.16.3. За допомогою цього рисунку знаходимо, що градієнт концентрації приблизно визначиться так:

$$\frac{dp}{dx} \approx \frac{\Delta p_0 - \Delta p_0 / 2,72}{L_p} = \frac{1,72 \Delta p_0}{2,72 \cdot L_p}.$$

Враховуючи співвідношення (16.44) і вираз для  $dp/dx$ , отримаємо робочу формулу для густини дифузійного струму:

$$|j_{Dp}| = \frac{1,72kTu_p \cdot \Delta p_0}{2,72 \cdot L_p}.$$

Після підстановки числових значень знаходимо:

$$|j_{Dp}| = \frac{1,72 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 0,19 \cdot 10^{20}}{2,72 \cdot 7,0 \cdot 10^{-4}} \text{ А/м}^2 = 71 \text{ А/м}^2 = 71 \text{ мкА/мм}^2.$$

**Зауваження. 1)** Необхідно відмітити, що величина густини дифузійного струму має приблизне значення, так як вирахувати точно  $dp/dx$  ми не можемо. Отримане значення густини струму дещо занижене, тому що експоненційну залежність  $\Delta p(x)$  на інтервалі від  $x = 0$  до  $x = L_p$  замінено лінійною.

**2)** Необхідно звернути увагу, що напівпровідниковий матеріал саме з такими параметрами використовується для створення фотоприймачів.

**Задача 16.14.** Відомо, що деякий напівпровідник  $n$ -типу прозорий для світла з довжиною хвилі більшою 1,1 мкм. Нехай тонкий зразок з такого напівпровідника опромінюється імпульсами світла з довжиною хвилі 0,7 мкм. Під час освітлення питомий опір зразка зменшується від свого нормального значення 26 Ом·см до 17 Ом·см. Через 10 мкс після виключення джерела світла питомий опір зразка зростає до 23 Ом·см. Визначити ширину забороненої зони напівпровідника і час життя неосновних носіїв. Відомо, що постійна Холла в цьому матеріалі дорівнює  $3,1 \cdot 10^4 \text{ см}^3/\text{Кл}$ . Визначити концентрацію основних носіїв і їхню рухливість.

**Розв'язок. 1)** Червоною межею фотоефекту є довжина хвилі, що дорівнює 1,1 мкм. Тому ширина забороненої зони напівпровідника знаходиться так:

$$W_g = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,1 \cdot 10^{-6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,13 \text{ еВ}.$$

Напівпровідником, що має таку ширину забороненої зони, є кремній.

**2)** Концентрація основних носіїв заряду згідно розв'язку задачі 16.11 дорівнює:

$$n_n = 1/(R_H \cdot e) = 1/(3,1 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) = 2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}.$$

3) Рухливість основних носіїв заряду дорівнює:

$$u_n = \frac{R_H}{\rho_0} = \frac{3,1 \cdot 10^{-2}}{26 \cdot 10^{-2}} = 0,12 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}).$$

4) Для визначення часу життя нерівноважних неосновних носіїв заряду зробимо розумні наближення. Провідністю неосновних носіїв заряду знехтуємо.

Тому

$$\sigma_0 = 1/\rho_0 = en_n u_n + ep_n u_p \approx en_n u_n. \quad (1)$$

Практичний інтерес (розглядається на лекції) представляє випадок, коли зміна провідності обумовлена зміною нерівноважної концентрації неосновних носіїв заряду. В момент освітлення зразка світлом з довжиною хвилі 0,7 мкм має місце внутрішній фотоефект, який обумовлений утворенням пари електрон – дірка. Для моменту  $t = 0$  можемо записати:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\rho_1} = en_n u_n + e\Delta p_0 u_p, \quad (2)$$

а для довільного моменту часу з урахуванням (16.39)

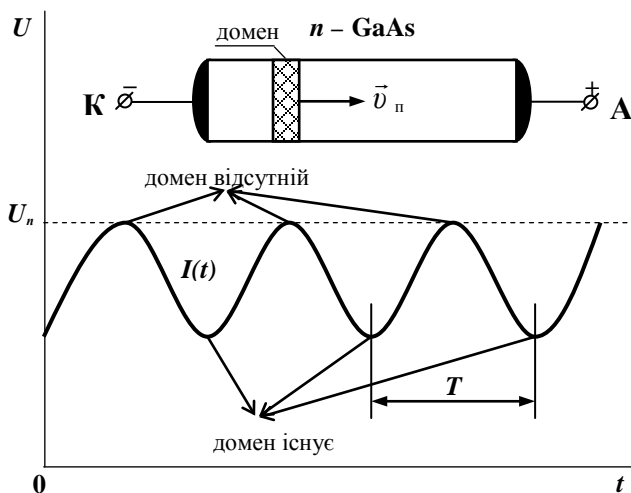
$$\sigma_2 = \frac{1}{\rho_2} = en_n u_n + e\Delta p_0 u_p \cdot \exp\left\{-\frac{t}{\tau_p}\right\}. \quad (3)$$

При цьому враховано, що  $n_n + \Delta n_0 \approx n_n$ , а  $p_n + \Delta p_0 \approx \Delta p_0$ . Розв'язавши систему трьох рівнянь (1), (2), (3) отримаємо час життя нерівноважних носіїв заряду:

$$\tau_p = \frac{t}{\ln \frac{(\rho_0 - \rho_1)\rho_2}{(\rho_0 - \rho_2)\rho_1}} = \frac{10}{\ln(69/17)} = 7 \text{ мкс}.$$

**Задача 16.15.** Сучасна напівпровідникова технологія дозволяє отримувати зразки  $n\text{-GaAs}$  довжиною  $10^{-6} \text{ м}$ . З якою частотою коливається струм в такому зразку в умовах ефекту Ганна? Рухливість електронів в  $n\text{-GaAs}$   $u_n = 0,7 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ , порогова напруженість електричного поля  $E_n = 3,2 \cdot 10^5 \text{ В/м}$ . (Порівняйте довжину хвилі, на якій транслюють радіопередачі з довжиною хвилі, яку випромінює діод Ганна).

**Розв'язок.** Період коливань струму в діоді Ганна пропорційний довжині зразка і приблизно дорівнює:  $T = 2l/v_n$ , де  $v_n = u_n E_n$  – максимальна дрейфова швидкість руху електронів, яка в



**Рис.16.7.** Залежність напруги  $U$  на зразку  $n$ -GaAs і струму  $I(t)$  через зразок від часу в умовах ефекту Ганна.

умовах ефекту Ганна дорівнює швидкості руху домена електричного поля від катоду до анода. Приведений рисунок 16.7 пояснює формулу для періоду коливань струму. Період – це відстань по часу між двома максимумами або мінімумами струму.

Мінімум струму існує тоді, коли домен рухається вздовж зразка. Значить, частота з якою коливається струм в зразку дорівнює:

$$\nu = \frac{1}{T} = u_n E_n / 2l.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\nu = \frac{0,7 \cdot 3,2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-6}} \text{ c}^{-1} = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ Гц},$$

а довжина хвилі випромінювання

$$\lambda = c/\nu = 3 \cdot 10^8 / (1,1 \cdot 10^{11}) \text{ м} = 2,7 \text{ мм}.$$

Таким чином можемо зробити висновок, що в даному зразку  $n$ -GaAs в умовах ефекту Ганна генерується змінний сигнал ультракоротких хвиль (УКХ).

## 16.6. Задачі

### Власні напівпровідники.

**16.16.** Чому рухливість електронів більша від рухливості дірок у власному напівпровіднику?

**16.17.** Чому власні напівпровідники, як правило, мають електронну провідність?

**16.18.** Ширина забороненої зони чистого напівпровідника дорівнює приблизно 1 eV. Вирахувати ймовірність заповнення електроном рівня біля дна зони провідності при  $T_1 = 0$  і  $T_2 = 290$  K відповідно.

**16.19.** В чистому напівпровіднику концентрація електронів провідності при температурі 300 K дорівнює  $1 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ . Вирахувати ширину забороненої зони і енергію Фермі для цього напівпровідника. Прийняти, що  $m_n^* \approx m_p^* \approx m_e$ , де  $m_e$  – маса вільного електрона.

**16.20.** У власному напівпровіднику концентрація електронів при температурі 400 K дорівнює  $1,3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а при температурі 350 K –  $6,2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Яка ширина забороненої зони напівпровідника при  $T = 0$ , якщо вона змінюється з температурою за лінійним законом?

**16.21.** а) Вирахувати ефективну густину рівнів  $N_c$  і  $N_v$  для кремнію при кімнатній температурі. Для розрахунків скористайтесь даними табл. 12 додатків. б) Визначити власну концентрацію носіїв заряду.

**16.22.** Знайти мінімальну енергію, яка необхідна для утворення пари електрон-дірка в чистому телурі, якщо відомо, що його електропровідність зростає в 2,5 рази при збільшенні температури від 300 K до 400 K.

**16.23.** Визначити концентрацію носіїв заряду у власному германії при  $T_2 = 400$  К. Вважати, що ширина забороненої зони германію лінійно змінюється з температурою за законом  $W_g(T) = W_g(0) - \alpha T$ , де  $W_g(0)$  – ширина забороненої зони при  $T = 0$ ,  $\alpha = 4 \cdot 10^{-4}$  еВ/К.

**16.24.** Провідність чистого напівпровідника при  $T_1 = 300$  К дорівнює  $0,01$  (Ом·м) $^{-1}$ . Із оптичних вимірювань відомо, що його валентна зона лежить нижче зони провідності на  $0,9$  еВ. Вирахувати провідність напівпровідника при  $T_2 = 350$  К. Вважати, що ширина забороненої зони лінійно зменшується з ростом температури.

**16.25.** Визначити питомий опір чистого германію при кімнатній температурі ( $T = 300$  К).

**16.26.** Рухливість електронів в чистому напівпровіднику InSb (антимонід індію) дорівнює  $6 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ , а рухливість дірок  $0,2 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ . При температурі  $27^\circ\text{C}$  питома провідність дорівнює  $5 \cdot 10^3$  (Ом·м) $^{-1}$ . Визначити концентрацію власних носіїв заряду.

**16.27.** Рухливість електронів в чистому напівпровіднику GaSb (антимонід галію) дорівнює  $0,3 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ , дірок –  $0,1 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ , концентрація власних носіїв заряду при  $t = 27^\circ\text{C}$  дорівнює  $7,83 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ . Визначити питомий опір GaSb.

**16.28.** В зразку чистого кремнію градієнт потенціала  $E = 400$  В/м. Визначити при  $T = 300$  К: а) Швидкість дрейфу електронів і дірок; б) Питомий опір кремнію; в) Повний дрейфовий струм, якщо площа поперечного перерізу зразка  $3 \text{ мм}^2$ .

**16.29.** Чистий селен при температурі  $12^\circ\text{C}$  має питомий опір  $100$  кОм·см, а при  $57^\circ\text{C}$  –  $50$  кОм·см. Визначити питомий опір при  $100^\circ\text{C}$ , вважаючи, що ширина забороненої зони лінійно залежить від температури.

**16.30.** Зразок чистого напівпровідника GaSb при температурі  $27^\circ\text{C}$  має найбільший питомий опір  $2$  кОм·м. Ширина забороненої зони  $0,8$  еВ. Визначити питомий опір при температурі  $87^\circ\text{C}$ .



**16.31.** Зразок власного германію при температурі  $27^\circ\text{C}$  має питомий опір  $0,47\text{ Ом}\cdot\text{м}$ . Визначити питомий опір германію при температурі  $127^\circ\text{C}$ .

**16.32.** Як зміниться електропровідність при підвищенні температури від  $300$  до  $310\text{ К}$  а) металу; б) власного напівпровідника, ширина забороненої зони якого  $W_g = 0,3\text{ еВ}$ ? Який характер зміни електропровідності в обох випадках?

**16.33.** Червона межа фотоэффекту для чистого бездомішкового напівпровідника при низьких температурах відповідає довжині хвилі  $\lambda_0 = 1,7\text{ мкм}$ . Вирахувати температурний коефіцієнт опору цього напівпровідника при температурі  $T = 300\text{ К}$ .

**16.34.** Вирахувати температурний коефіцієнт опору чистого бездомішкового кремнію при температурі  $T = 300\text{ К}$ .

**16.35.** Вирахувати температурний коефіцієнт опору чистого германію при температурі  $T = 300\text{ К}$ .

### Домішкові напівпровідники

**16.36.** Знайти концентрацію донорних атомів в напівпровіднику, енергія активації яких  $0,1\text{ еВ}$ . Відомо, що при  $T = 100\text{ К}$  концентрація електронів провідності дорівнює  $2\cdot 10^{13}\text{ см}^{-3}$ . Відносна ефективна маса електронів  $m_n^*/m_e = 0,25$ .

**16.37.** Вирахувати питомий опір напівпровідника  $n$ -типу при температурі  $50\text{ К}$ , якщо відомо, що концентрація донорних атомів  $N_d = 5\cdot 10^{17}\text{ см}^{-3}$ , а їх енергія активації  $\Delta W_n = 0,1\text{ еВ}$ . Рухливість електронів  $u_n = 500\text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ . Відносна ефективна маса електронів  $m_n^*/m_e = 0,25$ .

**16.38.** Концентрація донорних атомів в напівпровіднику  $N_d = 2\cdot 10^{18}\text{ см}^{-3}$ , їхня енергія активації  $\Delta W_n = 0,05\text{ еВ}$ , рухливість електронів  $u_n = 0,4\text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ , температура  $T = 77\text{ К}$ . Визначити питомий опір напівпровідника.

**16.39.** Який питомий опір при температурі  $300\text{ К}$  кремнію  $n$ -типу з концентрацією донорів  $10^{16}\text{ м}^{-3}$ ? Вважати, що рухливість

електронів і дірок однакова як для чистого так і для домішкового напівпровідника.

**16.40.** Число атомів кремнію в одиниці об'єму кристалу дорівнює  $5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . В зразок Si вводиться домішка *n*-типу в кількості одного атома на  $10^7$  атомів Si. Відомо, що в цьому зразку при 300 К концентрація дірок дорівнює  $2,42 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}$ . Визначити концентрацію власних носіїв заряду в Si при 300 К.

**16.41.** В чистому германії при  $T = 300 \text{ К}$  є  $4,5 \cdot 10^{28}$  атомів/м<sup>3</sup>. Яка концентрація електронів і дірок провідності при цій температурі в домішковому германії, що містить один атом донорних домішок на  $10^9$  основних атомів?

**16.42.** Злиток германію отриманий шляхом сплавлення 100 г германію і 3,22 мкг сурми. Питома вага германію –  $5,46 \text{ г/см}^3$ . Вважаючи, що сурма розподілена рівномірно по об'єму злитка, визначити концентрацію її атомів. При кімнатній температурі всі атоми сурми практично іонізовані. Визначити питому електропровідність цього злитка, якщо рухливість електронів –  $0,36 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ . Визначити опір зразка із цього злитка, якщо його довжина – 2 см, а переріз –  $1 \text{ мм}^2$ .

**16.43.** Злиток германію отриманий шляхом сплавлення 100 г германію і 0,78 мкг галію. Вважаючи, що галій розподілений рівномірно в злитку, визначити концентрацію атомів галію, якщо густина германію  $5,46 \text{ г/см}^3$ . Визначити провідність злитка, якщо рухливість дірок  $1700 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

**16.44.** Електричний опір легованого кремнію *p*-типу, довжина якого 5 мм, ширина – 2 мм і товщина 1 мм дорівнює 100 Ом. Визначити відношення електронної провідності до діркової, якщо рухливість електронів і дірок дорівнюють 0,12 і  $0,025 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  відповідно.

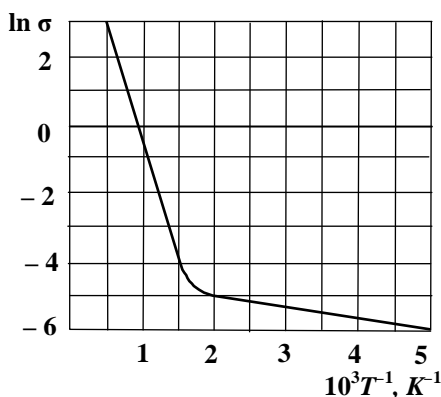
**16.45.** Чистий кристалічний германій містить  $4,5 \cdot 10^{28}$  атомів/м<sup>3</sup>. Визначити провідність германію, легованого елементом III групи при температурі 300 К. На кожні  $10^7$  атомів германію приходить один домішковий атом. Вважати, що легування дуже мало змінює величину рухливості електронів і дірок.

**16.46.** Для закиси міді  $\text{Cu}_2\text{O}$  ( $p$ -типу) отримана така залежність питомого опору від температури:

$T, \text{K}$	286	345	455	556	667	833
$\rho, \text{Ом}\cdot\text{см}$	12,2	3,49	1,00	0,228	$1,83 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$

Визначити ширину забороненої зони даного напівпровідника і енергію активації акцепторних домішок.

**16.47.** На рис.16.8 приведений графік залежності логарифма електропровідності від оберненої температури для кремнію з домішкою бора. Пояснити характер даного графіка. Визначити ширину забороненої зони кремнію і енергію активації домішкових атомів.



**Рис.16.8**

**16.48.** Визначити електропровідність германію  $n$  – типу при  $T = 300\text{K}$ , якщо на  $10^9$  атомів германію припадає один атом домішки. Концентрація атомів германію в напівпровіднику дорівнює  $4,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ .

**16.49.** Визначити розташування рівня Фермі в германії  $n$ -типу при температурі  $300\text{K}$ , якщо на  $10^6$  атомів германію припадає 1 атом домішки. Концентрація атомів в германії дорівнює  $4,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Енергія активації домішки –  $0,01 \text{ eV}$ . Обґрунтувати зроблені при цьому припущення.

**16.50.** Зразок германію  $p$ -типу, призначений для виготовлення транзисторів, має питомий опір  $\rho = 0,5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ . Визначити енергію рівня Фермі при  $T = 300 \text{ К}$ .

**16.51.** Питомий опір  $n$ -кремнію при  $T = 300 \text{ К}$  дорівнює  $3 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Визначити енергію Фермі в цьому напівпровіднику.

**16.52.** Зразок германію  $n$ -типу, призначений для виготовлення транзисторів має питомий опір  $\rho = 1,5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ . Визначити енергію рівня Фермі для цього напівпровідника при  $T = 300 \text{ К}$ .

### Ефект Холла

**16.53.** Вирахувати різницю рухливостей електронів і дірок в чистому, бездомішковому германії, якщо відомо, що в однорідному полі, індукція якого  $B = 0,3 \text{ Тл}$ , відношення поперечної напруженості електричного поля  $E_{\perp}$  до поздовжньої  $E_{\parallel}$  дорівнює  $0,06$ .

**16.54.** Легований зразок германію має довжину  $1 \text{ см}$  ( по осі  $X$ ), ширину  $2 \text{ мм}$  ( по осі  $Y$ ) і товщину  $0,2 \text{ мм}$  (по осі  $Z$ ). До торців зразка прикладається різниця потенціалів  $1,4 \text{ В}$  і в додатньому напрямку осі  $X$  протікає струм, сила якого  $10 \text{ мА}$ . При наявності вздовж осі  $Z$  магнітного поля, індукція якого  $0,1 \text{ Тл}$ , на зразку вздовж додатнього напрямку осі  $Y$  появляється холівська напруга  $10 \text{ мВ}$ . Визначити: а) тип носіїв заряду; б) постійну Холла; в) концентрацію носіїв заряду; г) рухливість носіїв.

**16.55.** Постійна Холла і питомий опір зразка кремнію з домішками відповідно дорівнюють  $3,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$  і  $8,93 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Визначити рухливість і концентрацію носіїв заряду, вважаючи, що струм через зразок обумовлений наявністю носіїв одного знаку.

**16.56.** Вимірювання зразка  $\text{InSb}$   $n$ -типу показали, що при температурі  $100 \text{ }^{\circ}\text{C}$  постійна Холла і рухливість електронів відповідно дорівнюють  $6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{Кл}$  і  $5,1 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ . Визначити питомий опір цього зразка і концентрацію електронів провідності.

**16.57.** Тонка пластинка із легованого кремнію має ширину  $2 \text{ см}$ . Перпендикулярно до площини пластинки прикладене однорідне магнітне поле, індукція якого дорівнює  $0,5 \text{ Тл}$ . При густині струму

2 мкА/мм<sup>2</sup>, що направлений вздовж пластинки, холлівська різниця потенціалів дорівнює 0,1 В. Визначити концентрацію носіїв заряду.

**16.58.** Для деякого зразка германію ефект Холла не спостерігається. Яка доля струму в зразку обумовлена електронами, якщо рухливість електронів в германії дорівнює 0,35 м<sup>2</sup>/(В·с), а рухливість дірок – 0,14 м<sup>2</sup>/(В·с).

**16.59.** Визначити рухливість електронів в германії *n* – типу, для якого питомий опір  $\rho = 1,6 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ , а постійна Холла  $R_H = 7 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{Кл}$ .

**16.60.** В деякому зразку германію, для якого рухливість електронів в 2,1 раза більша рухливості дірок, ефект Холла не спостерігається. Знайти для цього зразка відношення концентрації електронів провідності до концентрації дірок.

**16.61.** Зразок германію *n*-типу, який призначений для виготовлення транзисторів, має питомий опір 1,5 Ом·см і значення постійної Холла  $5,4 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{Кл}$ . Визначити концентрацію основних носіїв заряду та їхню рухливість.

Виявлено, що при підвищенні температури зразка постійна Холла не змінюється, тоді як питомий опір збільшується, але при деякій більш високій температурі обидві ці величини різко зменшуються. Поясніть таку поведінку напівпровідника і скажіть, що відбудеться якщо зразок охолоджувати, а не нагрівати.

**16.62.** Тонкий зразок германію *p*-типу, розміри якого  $d \times b = 2 \times 10 \text{ мм}^2$ , розташований в площині, що перпендикулярна магнітному полю Землі. Вирахувати, яку різницю потенціалів необхідно прикласти до протилежних торців зразка відстань між якими 2см, щоб отримати холлівську різницю потенціалів  $U_H = 10 \text{ мВ}$ . Індукція магнітного поля Землі дорівнює  $B = 44 \text{ мкТл}$ , рухливість дірок  $u_p = 0,18 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

## Нерівноважні носії заряду в напівпровідниках

**16.63.** Питомий опір чистого германію при кімнатній температурі дорівнює 50 Ом·см. Після освітлення питомий опір став 40 Ом·см, а через 8 мс після вимкнення освітлення – 45 Ом·см. Вирахуйте середній час життя електронів і дірок.

**16.64.** Нехай нерівноважна концентрація неосновних носіїв заряду дорівнює  $10^{20} \text{ м}^{-3}$ , а початкова швидкість зменшення концентрації  $-7,1 \cdot 10^{23}$  носіїв за одну секунду. Вирахувати: а) час життя неосновних носіїв заряду; б) концентрацію неосновних носіїв заряду через 2 мс після вимкнення джерела світла.

**16.65.** Питомий опір чистого бездомішкового напівпровідника при кімнатній температурі  $\rho_0 = 100$  Ом·см. Після опромінення світлом питомий опір став  $\rho_1 = 80$  Ом·см. Відомо, що середній час життя електронів і дірок в цьому напівпровіднику  $\tau = 0,01$ с. Знайти питомий опір цього напівпровідника через час  $t = 5$  мс після виключення світла.

**16.66.** В момент часу  $t_1 = 10^{-4}$ с після вимкнення рівномірної по об'єму генерації електрон-діркових пар нерівноважна концентрація носіїв заряду була в 10 раз більшою, ніж в момент часу  $t_2 = 10^{-3}$  с. Визначити час життя носіїв заряду, якщо рівень збудження невеликий.

**16.67.** Вирахувати відносну зміну провідності напівпровідника  $\Delta\sigma/\sigma$  при стаціонарному освітленні світлом, інтенсивність якого  $I = 5 \cdot 10^{15}$  квантів на  $1 \text{ см}^2$  за 1с. Коефіцієнт поглинання напівпровідника  $\alpha = 100 \text{ см}^{-1}$ , товщина зразка мала порівняно з  $\alpha^{-1}$ . Концентрація рівноважних носіїв  $n \approx 10^{15} \text{ см}^{-3}$  час життя нерівноважних носіїв заряду  $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ с. Рухливості електронів і дірок відповідно дорівнюють 0,36 і 0,17  $\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ . Квантовий вихід фотопровідності  $\beta = 0,8$ .

**16.68.** Зразок з чистого бездомішкового германію знаходиться при температурі 300К в полі електромагнітного випромінювання. При цьому його питомий опір дорівнює 43 Ом·см. Визначити, яка частка електропровідності зразка обумовлена фотопровідністю.

**16.69.** Електрони інжектуються на одному кінці зразка кремнію  $p$ -типу, концентрація акцепторів в якому  $10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а збираються на другому кінці зразка. Вирахувати напруженість електричного поля в напрямку струму, якщо через зразок протікає електричний струм, густина якого  $1 \text{ А/см}^2$ , а дірковим струмом скрізь в зразку можна знехтувати. Поясніть, які припущення можна зробити відносно просторового заряду і концентрації основних носіїв зряду.

**16.70.** На одній стороні зразка германію  $p$ -типу концентрація електронів збільшується до  $10^{21} \text{ м}^{-3}$ . Оцінити густину дифузійного струму при  $T = 300 \text{ К}$ . Час життя носіїв заряду  $\tau = 0,1 \text{ мс}$ .

**16.71.** Зразок діркового антимоніду індію ( $\text{InSb}$ ) має рухливість електронів  $6,2 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$  при температурі  $290 \text{ К}$ . Вирахуйте дифузійну довжину неосновних носіїв заряду, якщо їхній час життя є  $5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ .

**16.72.** В германії  $p$ -типу при кімнатній температурі рухливість і дифузійна довжина основних носіїв заряду відповідно дорівнюють  $0,17 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$  і  $2 \text{ мм}$ . Визначити середній час життя і коефіцієнт дифузії дірок в германії.

**16.73.** В кращих зразках германію  $n$ -типу при кімнатній температурі середня дифузійна довжина електронів досягає  $3 \text{ мм}$ , а середній час життя електронів —  $9 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ . Визначити коефіцієнт дифузії і рухливість електронів.

### Додаткові задачі

**16.74.** При  $T = 300 \text{ К}$  деякий зразок германію  $n$ -типу має питомий опір  $\rho = 0,017 \text{ Ом}\cdot\text{м}$  і постійну Холла  $R_H = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{Кл}$ . Визначити:

- а) концентрацію  $n$  і рухливість електронів провідності  $u_n$ ;
- б) їх середню довжину вільного пробігу  $\langle l \rangle = \langle v \rangle \cdot \tau$ , де

середня швидкість теплового руху  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}}$ ,  $\tau$  — час вільного пробігу.

**16.75.** Дірки, які створюються при освітленні біля поверхні електронного напівпровідника, дифундують всередину напівпровідника, де вони рекомбінують з електронами провідності. Визначити ефективну глибину проникнення дірок, якщо їх час життя  $\tau_p = 1$  мс, рухливість  $u_p = 2000$  см<sup>2</sup>/(В·с), а температура зразка  $T = 300$  К.

## 17. КОНТАКТНІ ЯВИЩА В НАПІВПРОВІДНИКАХ

### 17.1. Питання теми

1. Властивості  $p - n$ -переходу.
2. Пряме та зворотнє включення  $p - n$ -переходу.
3. Використання  $p - n$ -переходу.

### 17. 2. Основні положення та формули

#### 17.2.1. Проникнення електричного поля в напівпровідник

Якщо напівпровідник легований однорідно, тобто концентрація домішки скрізь однакова і не залежить від координати, то поле всередині поверхневого шару згідно рівняння Пуассона буде змінюватись за законом:

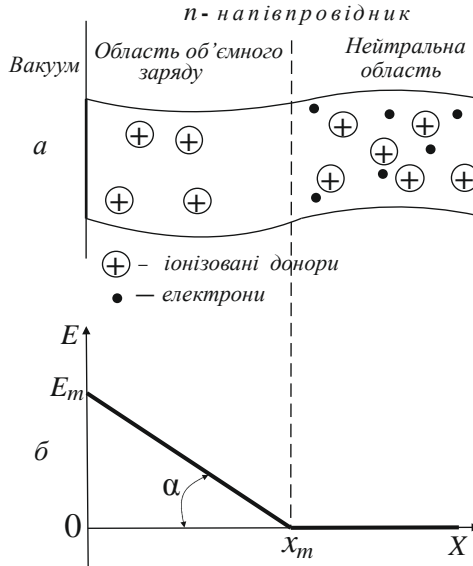
$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{eN_d}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (17.1)$$

де  $N_d$  – концентрація домішки, якою легується напівпровідник (наприклад: донорів),  $e$  – заряд електрона,  $\rho = eN_d$  – об’ємна густина заряду,  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність напівпровідника.

Із рівняння (17.1) можна отримати, що

$$E_m = \frac{eN_d}{\epsilon\epsilon_0} x_m,$$





**Рис.17.1.** Формування поверхневого потенціального бар'єру (напівпровідник  $n$ -типу):  $a$  – негативний заряд поверхневих станів спричинив відтік електронів із приповерхневого шару, де залишився некомпенсований позитивний заряд іонізованих донорів;  $b$  – поле приповерхневої області напівпровідника лінійно зменшується від величини  $E_m$  (на границі вакуум-кристал,  $x = 0$ ) до нуля (на границі області об'ємного заряду – нейтральна область,  $x = x_m$ ),  $\text{tg}\alpha = eN_d/(\epsilon\epsilon_0)$ .

де  $E_m$  – напруженість електричного поля на границі вакуум-кристал,  $x_m$  – ширина області об'ємного заряду, в подальшому ширина бар'єру (рис.17.1).

Значення  $E_m$  невідоме. Відомо тільки, що між точкою на поверхні кристалу і точкою з  $x = x_m$ , де напруженість  $E = 0$ , існує потенціальний бар'єр, "висота" якого  $W_s = eU_s$ . Цього досить щоб визначити  $E_m$  і  $x_m$ :

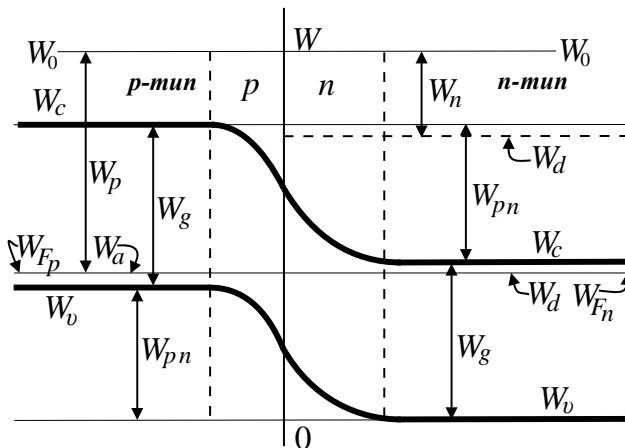
$$x_m = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0 U_s}{eN_d}}, \quad (17.2)$$

$$E_m = \sqrt{\frac{2eN_d U_s}{\epsilon\epsilon_0}}, \quad (17.3)$$

де  $U_s$  – різниця потенціалів між точками з  $x = 0$  і  $x = x_m$ .

Оскільки  $N_d$  може змінюватись в досить широких межах від  $10^{10} \text{ см}^{-3}$  до  $10^{20} \text{ см}^{-3}$ , то глибина проникнення електричного поля в напівпровідник може змінюватись від 3 – 4 до  $10^5$  атомних шарів.

### 17.2.2. Висота бар'єру



**Рис.17.2.** Енергетичний бар'єр на межі  $p$ - $n$ -переходу.  $W_p = W_0 - W_a$ ,  $W_n = W_0 - W_d$ .  $W_0$  – енергія вакууму (енергія вільного електрона).  $W_a$  і  $W_d$  – енергії мілких акцепторних і донорних рівнів, які майже співпадають з енергіями Фермі ( $W_{Fp}$  і  $W_{Fn}$ ) в  $p$ -типі і  $n$ -типі напівпровідниках відповідно.

Електрону, щоб потрапити із  $n$ -області в  $p$ -область, необхідно подолати енергетичний бар'єр, висота якого:

$$W_{pn} = W_p - W_n, \quad (17.4)$$

де  $W_p$  – робота виходу електрона із  $p$ -області,  $W_n$  – робота виходу із  $n$ -області (рис.17.2).

Якщо в  $p$ -області електрони знаходяться на мілкому акцепторному рівні, а в  $n$ -області – на мілкому донорному рівні, то різниця  $W_p - W_n$  приблизно дорівнює ширині забороненої зони  $W_g$ .

Тому:

$$W_{pn} \cong W_g, \quad (17.4)$$

а різниця потенціалів між  $p$ - і  $n$ - областями:

$$U_{pn} = W_{pn} / e \cong W_g / e. \quad (17.5)$$

**Формули для висоти потенційного бар'єру**

Для рівноважного стану  $p - n$  переходу  $W_{pn} = W_{Fn} - W_{Fp}$ . Тоді з урахуванням (16.30) і (16.31)

$$W_{pn} = kT \ln \frac{np}{n_i^2}. \quad (17.6)$$

Якщо врахувати (16.12), то

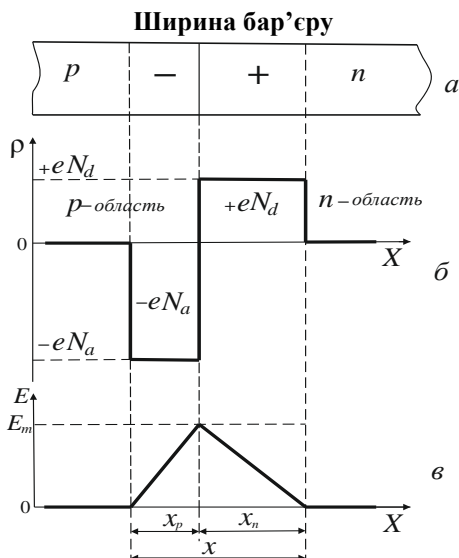
$$W_{pn} = W_g - kT \ln \frac{N_c N_v}{np}. \quad (17.7)$$

Для випадку, коли  $n = n_n \approx N_d$  і  $p = p_p \approx N_a$ , отримаємо, що

$$W_{pn} = W_g - kT \ln \frac{N_c N_v}{N_d N_a}. \quad (17.8)$$

З цієї формули видно, що контактна різниця потенціалів (17.5) тим більша, чим сильніше леговані  $p$  – і  $n$  – області напівпровідника. Якщо  $N_d \approx N_c$ , а  $N_a \approx N_v$ , то  $U_{pn}$  матиме максимальне значення  $W_g/|e|$ . Таким чином формула (17.5) визначає максимально можливу контактну різницю потенціалів.

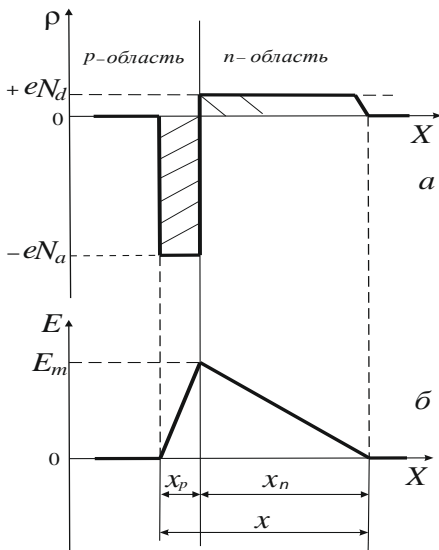
### 17.2.3. Розподіл електричного поля в бар'єрі.



**Рис.17.3.** Розподіл об'ємного заряду і електричного поля в  $p-n$ -переході:  $a$  – якісний розподіл заряду;  $b$  – залежність густини об'ємного заряду  $\rho(x)$ ;  $v$  – розподіл напруженості електричного поля  $E(x)$ ;  $N_d$  – концентрація донорів в  $n$ -області;  $N_a$  – концентрація акцепторів в  $p$ -області;  $x_p$  і  $x_n$  – глибина проникнення електричного поля в  $p$ -область і  $n$ -область відповідно;  $x = x_p + x_n$  – ширина  $p-n$ -переходу.

Для моделі різкого симетричного  $p-n$  переходу (рис.17.3) його ширина  $x = x_p + x_n$  знаходиться за формулою:

$$x = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{e} \left( \frac{N_a + N_d}{N_a N_d} \right) U_{pn}}. \quad (17.9)$$



**Рис.17.4.** Розподіл об'ємного заряду  $\rho(x)$  (а) і поля  $E(x)$  (б) в різко несиметричному  $p-n$ -переході ( $N_a \gg N_d$ ).

На практиці  $p-n$  структури є різко несиметричними. Так називають  $p-n$  переходи, в яких одна область легована набагато сильніше, ніж інша. На рис.17.4 показаний розподіл поля в  $p-n$ -переході для випадку  $N_a \gg N_d$ . Із рисунка видно, що  $x_p \ll x_n$ , тому  $x = x_n + x_p \cong x_n$ . Це означає, що практично вся різниця потенціалів (напруга) на бар'єрі  $U_{pn} = W_{pn}/e \cong (1/2) \cdot E_m \cdot x_n$  падає на  $n$ -область. В цьому випадку розрахунок основних параметрів бар'єру можна здійснити за допомогою формул (17.2) і (17.3), а саме:

$$x = x_n \cong \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{pn}}{e N_d}}, \quad (17.10)$$

$$E_m \cong \sqrt{\frac{2e N_d U_{pn}}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (17.11)$$

**Зауваження:** Напруга на бар'єрі  $U_{pn}$  (у вольтах) чисельно дорівнює енергетичній висоті бар'єру  $W_{pn}$  (в електрон-вольтах).

#### 17.2.4. Рівновага в $p$ - $n$ переході

**а)** Густина дифузійного струму основних носіїв заряду (дірок) із  $p$ -області в  $n$ -область визначається за формулою:

$$j_{D_p} = -eD_p \frac{dp}{dx}, \quad (17.12)$$

а електронів із  $n$ -області в  $p$ -область –

$$j_{D_n} = eD_n \frac{dn}{dx}, \quad (17.13)$$

де  $D_p$  і  $D_n$  – коефіцієнти дифузії дірок і електронів,  $\frac{dp}{dx}$  і  $\frac{dn}{dx}$  – градієнти концентрації дірок і електронів відповідно.

**б)** Густина струму неосновних носіїв заряду електронів із  $p$ -області в  $n$ -область визначається за формулою:

$$j_{ns} = eL_n \frac{n_p}{\tau_n} = e \frac{n_i^2}{N_a} \cdot \frac{L_n}{\tau_n} = e \frac{n_i^2}{N_a} \sqrt{\frac{D_n}{\tau_n}}, \quad (17.14)$$

а дірок із  $n$ -області в  $p$ -область

$$j_{ps} = eL_p \frac{p_n}{\tau_p} = e \frac{n_i^2}{N_d} \cdot \frac{L_p}{\tau_p} = e \frac{n_i^2}{N_d} \sqrt{\frac{D_p}{\tau_p}}, \quad (17.15)$$

де  $\tau_n$  і  $\tau_p$  – час життя,  $L_n$  і  $L_p$  – дифузійна довжина електронів і дірок відповідно,  $N_a$  і  $N_d$  – концентрація акцепторів і донорів,  $n_i$  – власна концентрація носіїв заряду матеріалу, з якого виготовлений  $p$  –  $n$  перехід. Повна густина струму неосновних носіїв з урахуванням (16.12) визначаються за формулою:

$$j_s = j_{ns} + j_{ps} \sim n_i^2 \exp \left\{ -\frac{W_g}{kT} \right\}. \quad (17.16)$$

**Увага.** Із (17.16) можна зробити висновок, що струм неосновних носіїв заряду експоненціально залежить від температури. Струм неосновних носіїв  $j_s$  компенсується струмом “гарячих” електронів із  $n$ - в  $p$ -область і “гарячих” дірок із  $p$ - в  $n$ -область. “Гарячі” носії заряду це такі електрони і дірки, енергія яких більша

висоти енергетичного бар'єру  $W_{pn}$ . Концентрація цих носіїв заряду незначна:

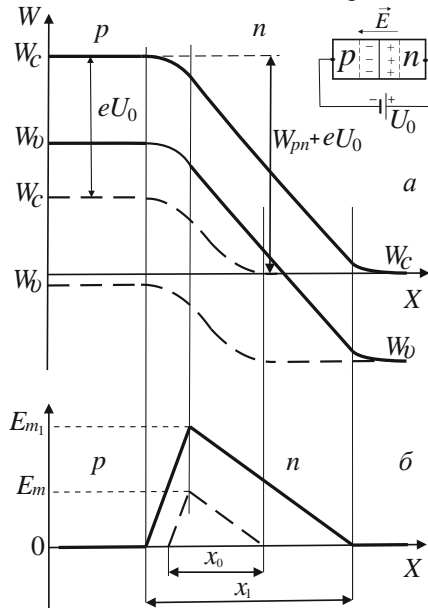
$$p = p_p \exp \left\{ -\frac{W_{pn}}{kT} \right\}, \quad (17.17)$$

$$n = n_n \exp \left\{ -\frac{W_{pn}}{kT} \right\}, \quad (17.18)$$

де  $p_p$  – концентрація дірок в  $p$ -області,  $n_n$  – концентрація електронів в  $n$ -області.

### 17.2.5. Зворотнє зміщення

Через те, що поле від зовнішнього джерела  $U_0$  при зворотньому зміщенні на діоді співпадає з напрямком поля всередині



**Рис.17.5.** Енергетична діаграма (а) і розподіл електричного поля (б) в  $p$ - $n$  переході. Штрихові лінії – випадок відсутності зовнішньої напруги. Суцільні лінії – до діода прикладена зворотня напруга  $U_0$ .

$p$  –  $n$  переходу, то напруга  $U_0$  буде підсилювати напругу на переході  $U_{pn} \approx W_{pn}/e$ . В результаті цього висота потенційного бар'єру між  $p$  - і  $n$ - областями стане  $U_{pn} + U_0$  (рис.17.5). Тоді у випадку різко

несиметричного бар'єру його ширину  $x_1$  і максимальну напруженість поля  $E_{m_1}$  можна оцінити за формулами (17.10) і (17.11):

$$x_1 \cong x_{n_1} \approx \left( \frac{2\varepsilon\varepsilon_0(U_{pn}+U_0)}{eN_d} \right)^{1/2}, \quad (17.19)$$

$$E_{m_1} \cong \left( \frac{2eN_d(U_{pn}+U_0)}{\varepsilon\varepsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (17.20)$$

**Зауваження.** Із збільшенням  $U_0$  максимальна напруженість  $E_m$  зростає. Проте для кожного напівпровідникового матеріалу існує граничне значення напруженості електричного поля  $E_i$ , перевищувати яке не слід. В полі, напруженість якого  $E_i$ , для Si і GaAs вона досягає значень  $\sim 3 \cdot 10^5$  В/см, електрони і дірки набувають таку велику енергію, що здатні при зіткненні з атомами кристалічної ґратки напівпровідника створювати нові електрони і дірки. Напруженість  $E_i$  отримала назву напруженості пробою. Напругу пробою  $p-n$ -переходу можна визначити за формулою (17.11), а саме:

$$U_i \cong \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_i^2}{2eN_d}. \quad (17.21)$$

Якщо  $N_d \cong 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $E_i = 3 \cdot 10^5$  В/см,  $\varepsilon = 12$ , то  $U_i = 3$  В, а якщо  $N_d \cong 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , то  $U_i = 3000$  В.

**Зворотній струм.** Коли до  $p-n$  переходу зовнішня напруга не прикладена, то струм неосновних носіїв заряду врівноважується зустрічним потоком “гарячих” основних носіїв заряду. Але коли до  $p-n$  переходу прикладене зворотнє зміщення і висота бар'єру  $W_{pn}$  збільшиться, то “гарячі” носії вже не в стані подолати бар'єр. На потік неосновних носіїв прикладена напруга ніяк не впливає. Тому зворотній струм визначається потоком неосновних носіїв заряду (17.16) і дуже різко залежить від температури.

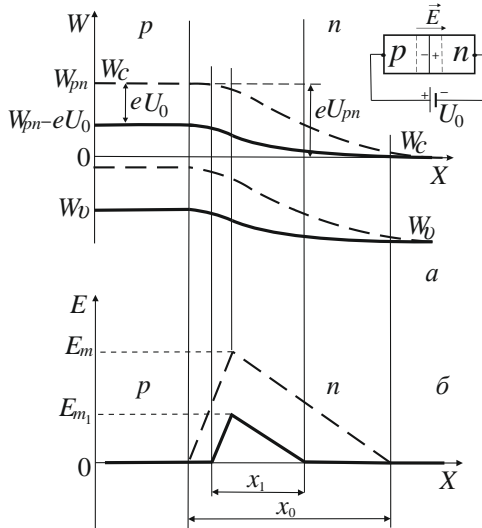
### 11.2.6. Пряме зміщення

На рис.17.6 показаний  $p-n$  перехід, до якого прикладене пряме зміщення. Поле від зовнішнього джерела  $U_0$  направлене назустріч полю, яке існує всередині  $p-n$  області. Значить, спад напруги від зовнішнього джерела  $U_0$  вираховується із бар'єрної різниці потенціалів  $U_{pn}$ , яка існувала до прикладання зовнішнього зміщення. В результаті висота потенційного бар'єру між  $p$  — і

$n$  – областями стане дорівнювати  $U_{pn} - U_0$ , а висота енергетичного бар'єру відповідно

$$e(U_{pn} - U_0) = W_{pn} - eU_0.$$

При відсутності зміщення із  $n$  – в  $p$  – область “прориваються”



**Рис.17.6.** Енергетична діаграма (а) і розподіл напруженості електричного поля (б) в  $p$ – $n$  переході. Штрихові лінії – випадок відсутності зовнішньої напруги.

Суцільні лінії – до діода прикладене пряме зміщення.

тільки електрони, енергія яких більша висоти бар'єру  $eU_{pn}$  (формула 17.18). Їхня концентрація дуже мала. Струм  $j_n$ , який вони створюють, дорівнює струму насичення  $j_{ns}$  (17.14) і врівноважує його. Якщо висота бар'єру зменшується на величину  $eU_0$ , то тепер вже із  $n$  – в  $p$  – область здатні “прорватись” всі електрони, енергія яких більша висоти бар'єру  $W_{pn} - eU_0$ . Концентрація таких електронів згідно (17.18) дорівнює:

$$n_1 \cong n_n \exp \left\{ - \frac{W_{pn} - eU_0}{kT} \right\}.$$

Таким чином, число електронів, здатних подолати бар'єр, що понизився, зростає в  $\frac{n_1}{n_n} = \exp\{eU_0/(kT)\}$  раз.



Наприклад: при  $U_0 = 1$  В,  $T = 300$  К,  $\frac{n_1}{n_n} \cong 6 \cdot 10^{16}$  раз. Струм, який утворюють ці електрони, в стільки ж раз зростає і складає тепер

$$j_{n1} = j_{ns} \exp\{eU_0/(kT)\}.$$

На струм насичення  $j_{ns}$  неосновних носіїв пряме зміщення (так же як і зворотнє) суттєво не впливає. Таким чином, електронна складова струму через  $p - n$ -перехід при його прямому включенні буде:

$$j_n(U_0) = j_{n1} - j_{ns} = j_{ns} (\exp\{\frac{eU_0}{kT}\} - 1), \quad (17.22)$$

Аналогічно діркова складова прямого струму

$$j_p(U_0) = j_{ps} (\exp\{\frac{eU_0}{kT}\} - 1), \quad (17.23)$$

Повний струм через  $p - n$ -перехід дорівнює сумі електронної і діркової складових і дорівнює

$$j(U_0) = j_n(U_0) + j_p(U_0) = j_s (\exp\{\frac{eU_0}{kT}\} - 1), \quad (17.24)$$

де  $j_s = j_{ns} + j_{ps}$ .

**Зауваження: 1)** Із (17.22) і (17.23) видно, що

$$\frac{j_p(U_0)}{j_n(U_0)} = \frac{j_{ps}}{j_{ns}}.$$

В різко несиметричному переході (сильно легованою є  $p$ -область переходу)  $j_{ps} \gg j_{ns}$ . Значить, при любых зміщеннях в такому переході основний вклад в загальний струм в області бар'єру вносять дірки.

**2)** Формула (17.24) описує залежність струму через перехід від прикладеної напруги при любых зміщеннях і прямих, і зворотніх. Тільки при прямій прикладеній напрузі величину  $U_0$  треба вважати додатною, а при зворотній – від'ємною.

**3)** При отриманні формули (17.24) вважалось, що вся прикладена до діода напруга  $U_0$  падає на  $p - n$  переході, тобто, що опір  $p - n$  переходу набагато більший, ніж всі інші послідовно ввімкнені з ним опори: опір  $n$ -області,  $p$ -області, опір контактів до діода і т. п. При зворотній напрузі таке припущення справедливе. Опір бар'єру ( $p - n$  переходу) є великий вже при нульовому зміщенні. При прямому зміщенні справа дещо інша, із збільшенням прямої напруги опір бар'єру різко зменшується! Значить не вся прикладена напруга

$U_0$  падає на  $p - n$  переході. Значна частина напруги падає на послідовно ввімкнених з переходом контактах,  $n - i$   $p$  –областях. Тому висота бар'єру  $p - n$  переходу знизиться не на  $eU_0$ , а на дещо меншу величину. В результаті ситуація, коли  $eU_0 > W_{pn}$

$(n_1 \cong n_n \exp\{-(W_{pn} - eU_0)/(kT)\} > n_n)$  стає неможливою.

Найбільше, чого можна добитись, збільшуючи пряму напругу на діоді, – це дуже сильно зменшити висоту бар'єру (як деколи говорять – “спрямити” бар'єр). Але досягнутий ефект вимагає, щоб густина струму через діод складала десятки і навіть сотні тисяч А/см<sup>2</sup>.

### 17.3. Питання на самопідготовку

1. Чим визначається глибина проникнення електричного поля в напівпровідник ?

2. Як визначається контактна різниця потенціалів  $p - i$   $n$  – областей напівпровідника?

3. Які  $p - n$  переходи називають різко несиметричними?

4. Які знаєте основні параметри  $p - n$  переходу і чим вони обумовлені?

5. Від чого суттєво залежить густина струму неосновних носіїв заряду через  $p - n$  перехід?

6. Що означає зворотнє зміщення для  $p - n$  – переходу?

7. Ширина бар'єру і струм через  $p - n$  – перехід при зворотньому зміщенні.

8. Що означає пряме зміщення для  $p - n$  переходу?

9. Висота бар'єру і струм через  $p - n$  перехід при прямому зміщенні.

10. Чим визначається максимальне значення висоти потенційного бар'єру  $p - n$  переходу?

11. Чим обумовлена бар'єрна ємність  $p - n$  переходу?

### 17.4. Методичні вказівки

Розв'язування задач необхідно починати з аналізу її умови. Зробити розумні припущення. Потім переглянути теоретичний матеріал даного посібника і вибрати формули та співвідношення, за

допомогою яких можна розв'язати задачу. Як правило, отриманий числовий результат розв'язаної задачі має оціночний характер і до цього треба відноситись з відповідним розумінням. Прочитайте ще раз методичні вказівки (16.4) даного посібника.

## 17. 5. Приклади розв'язування задач

**Задача 17.1.** Розрахувати глибину проникнення електричного поля приповерхневого бар'єру і максимальне значення напруженості цього поля в напівпровіднику GaAs. Розрахунки виконати для двох рівнів легування:  $N_{d_1} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $N_{d_2} = 10^{20} \text{ см}^{-3}$ . Прийняти, що для цих двох випадків легування приповерхнева різниця потенціалів однакова і дорівнює  $U_s = 0,2 \text{ В}$ .

**Розв'язок.** Скориставшись формулами (17.2) і (17.3), отримаємо для першого рівня легування:

$$x_1 \cong \left( \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 U_s}{eN_{d_1}} \right)^{1/2} = \left( \frac{2 \cdot 12 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16}} \right)^{1/2} = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

$$\begin{aligned} E_{m1} &\cong \left( \frac{2eN_{d_1} U_s}{\varepsilon\varepsilon_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16} \cdot 0,2}{12 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \right)^{1/2} = \\ &= 2,5 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 25 \text{ В/см.} \end{aligned}$$

Аналогічно для другого рівня легування:

$$x_2 = \left( \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 U_s}{eN_{d_2}} \right)^{1/2} = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ см,}$$

$$E_{m2} \cong \left( \frac{2eN_{d_2} U_s}{\varepsilon\varepsilon_0} \right)^{1/2} = 25 \cdot 10^5 \text{ В/см.}$$

**Висновки:** Відстань між сусідніми атомами кристалічної ґратки в твердому тілі складає величину порядку  $5\text{\AA} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ . Тому в першому випадку легування поле приповерхневого бар'єру проникає в напівпровідник на глибину порядку 300000 атомних шарів. В другому випадку легування – 3 – 4 атомних шарів.

**Задача 17.2.** Виготовлений із кремнію  $p$  –  $n$ -перехід знаходиться при температурі 300 К;  $p$  – область переходу легована атомами бору (елемент III групи періодичної системи елементів), концентрація яких  $10^{21} \text{ м}^{-3}$ . Область  $n$  – переходу легована атомами фосфору (елемент V групи), концентрація яких  $10^{20} \text{ м}^{-3}$ . Розрахувати висоту потенційного бар'єру.

**Розв'язок.** Скористаємось формулою (17.6). Будемо вважати, що  $n \cong N_d$  і  $p \cong N_a$ , так як  $N_d \gg n_i$  і  $N_a \gg n_i$ .

Тоді

$$W_{pn} = kT \ln \frac{N_a N_d}{n_i^2}.$$

Враховуючи те, що згідно табл.12 додатків  $n_i = 1,1 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ , отримаємо:

$$U_{pn} = \frac{W_{pn}}{e} = 0,026 \cdot \ln \frac{10^{41}}{(1,1 \cdot 10^{16})^2} \text{ В} \approx 0,53 \text{ В}.$$

**Задача 17.3.** В кремнієвому різко несиметричному діоді, який призначений для випрямлення низьких напруг, концентрація донорів в  $n$  – області може складати  $\sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$ . Визначити ширину і максимальну напруженість електричного поля бар'єру.

**Розв'язок.** Згідно формул (17.10) і (17.11) і даних табл.12 додатків отримаємо:

$$x_n \cong \left( \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{pn}}{e N_d} \right)^{1/2} = \left( \frac{2 \cdot 12,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{23}} \right)^{1/2} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,12 \text{ мкм},$$

$$E_m \cong \left( \frac{2e N_d U_{pn}}{\varepsilon\varepsilon_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{23} \cdot 1,1}{12,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \right)^{1/2} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ В/м}.$$

**Задача 17.4.** В кремнієвому потужному високовольтному випрямляючому діоді концентрація донорів в  $n$  – області  $N_d = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , концентрація акцепторів в  $p$  – області  $N_a = 10^{18} \text{ см}^{-3}$  (різко несиметричний перехід). Визначити ширину і максимальну напруженість електричного поля бар'єру.

**Розв'язок.** Як і в попередній задачі скористаємось формулами (17.10) і (17.11) і даними табл.12 додатків. При цьому згадаємо, що напруга на бар'єрі  $U_{pn}$  (в вольтах) чисельно дорівнює енергетичній

висоті бар'єру, яка приблизно дорівнює ширині забороненої зони  $W_g$  (в електрон-вольтах). Розрахунки дають: ширину бар'єру

$$x_n \cong \left( \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{pn}}{eN_d} \right)^{1/2} = \left( \frac{2 \cdot 12,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{19}} \right)^{1/2} = 1,23 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 12,3 \text{ мкм};$$

максимальну напруженість електричного поля на границі розділу  $p$  – і  $n$  –областей

$$E_m \cong \left( \frac{2eN_d U_{pn}}{\varepsilon\varepsilon_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{19} \cdot 1,1}{12,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \right)^{1/2} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ В/м}.$$

**Задача 17.5.** В різко несиметричному  $p$  –  $n$  переході ( $N_a \gg N_d$ ) максимальна напруженість електричного поля в переході  $E_m \cong 1,8 \cdot 10^5 \text{ В/м}$ . Оцінити ширину  $p$  –  $n$  переходу.

**Розв'язок.** В різко несиметричному  $p$  –  $n$  переході практично вся напруга на бар'єрі

$U_{pn}$  падає на  $n$ -область. Тому функція  $E(x)$  має вид показаний на рисунку 17.7. Враховуючи, що  $|E(x)| = \frac{du}{dx}$ , отримаємо, що  $U_{pn} \cong E_m \cdot x_n/2$ . Згідно формули (17.5)  $U_{pn} \approx W_g/e$ , а тому

$$x_n \cong \frac{2W_g}{eE_m} = \frac{2 \cdot 1,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,8 \cdot 10^5} \text{ м} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 12 \text{ мкм}.$$

**Задача 17.6.** Кремнієвий різко несиметричний  $p$  –  $n$  перехід містить концентрацію донорів в слабо легованій області  $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а концентрацію акцепторів в сильно легованій області  $N_a = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Оцінити густину дифузійних струмів електронів і дірок через  $p$  –  $n$  перехід.

**Розв'язок.** Для розв'язування задачі скористаємось формулами (17.12) і (17.13) і даними таблиці 12 додатків. Щоб

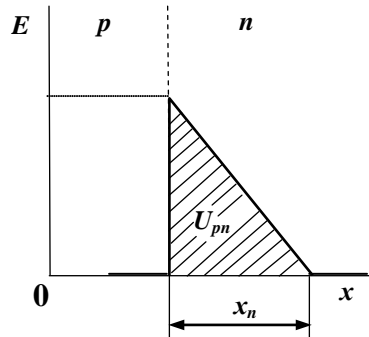


Рис. 17.7.

розрахувати величини струмів, необхідно знати (оцінити) значення градієнтів концентрацій  $dp/dx$  і  $dn/dx$ . Для розрахунку цих похідних будемо враховувати, що  $N_a \gg N_d$  і тому перехід є різко несиметричним. В цьому випадку ширина переходу  $x \cong x_n$ , тобто електричне поле переходу зосереджене в основному у  $n$ -області. Згідно формули (17.10):

$$x_n \cong \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 U_{pn}}{eN_d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{22}}} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Тоді середні значення градієнтів концентрацій будуть:

$$\frac{dn}{dx} \cong \frac{N_d}{x_n} = \frac{10^{22}}{4 \cdot 10^{-7}} = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-4},$$

$$\frac{dp}{dx} \cong \frac{N_a}{x_n} = \frac{10^{24}}{4 \cdot 10^{-7}} = 2,5 \cdot 10^{30} \text{ м}^{-4}$$

і відповідні густини струмів дорівнюватимуть (величини коефіцієнтів дифузії беруться із табл.12 додатків):

$$j_{Dn} = eD_n \frac{dn}{dx} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 34 \cdot 10^{-4} \cdot 2,5 \cdot 10^{28} \cong$$

$$\cong 1,36 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2 = 1,36 \cdot 10^3 \text{ А/см}^2;$$

$$j_{Dp} = eD_p \frac{dp}{dx} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 13 \cdot 10^{-4} \cdot 2,5 \cdot 10^{30} \cong$$

$$\cong 52 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2 = 52 \cdot 10^3 \text{ А/см}^2.$$

Повна густина дифузійного струму буде дорівнювати:

$$j_D = j_{Dn} + j_{Dp} = 53,36 \cdot 10^3 \text{ А/см}^2.$$

**Висновок.** З ростом рівня легування, густина дифузійного струму збільшується, так як  $N_d$  і  $N_a$  зростають, а ширина області об'ємного заряду (ширина  $p$ - $n$  переходу) зменшується. Для реальних рівнів легування  $N \sim 10^{23} \div 10^{25} \text{ м}^{-3}$  величина  $j_D$  може складати мільйони  $\text{А/см}^2$ .

**Задача 17.7.** Оцінити величину густини дрейфового струму неосновних носіїв заряду із  $p$  – в  $n$  – область германієвого, кремнієвого і арсенід галієвого діодів при кімнатній температурі. Час життя електронів  $\tau_n = 10^{-6}$  с, концентрацію акцепторів в  $p$  – області  $N_a = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ .

**Розв’язок.** Густина дрейфового струму будемо розраховувати за формулою (17.14). При цьому використаємо дані табл.12 додатків. Розрахунки дають:

**Для германієвого діода**

$$j_{ns} = \frac{en_i^2}{N_a} \sqrt{\frac{D_n}{\tau_n}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (2,4 \cdot 10^{19})^2}{10^{22}} \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}}} =$$

$$= 0,92 \text{ А/м}^2 \cong 1 \text{ мкА/мм}^2.$$

**Для кремнієвого –**

$$j_{ns} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (1,1 \cdot 10^{16})^2}{10^{22}} \sqrt{\frac{3,4 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}}} =$$

$$= 1,13 \cdot 10^{-7} \text{ А/м}^2 \cong 10^{-7} \text{ мкА/мм}^2.$$

**Для арсенід галієвого –**

$$j_{ns} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (1,4 \cdot 10^{13})^2}{10^{22}} \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}}} =$$

$$= 5 \cdot 10^{-13} \text{ А/м}^2 = 5 \cdot 10^{-13} \text{ мкА/мм}^2.$$

**Висновок.** Густина дрейфового струму неосновних носіїв заряду через германієвий  $p$  –  $n$  перехід в  $5 \cdot 10^{13}$  раз більша, ніж через арсенід галієвий перехід. Це обумовлено в основному тим, що  $j_{ns} \sim n_i^2$ .

**Задача 17.8.** Приймаючи густина струму насичення неосновних носіїв заряду при кімнатній температурі ( $T_0 = 300 \text{ К}$ ) за умовну одиницю, розрахувати збільшення цього струму при температурі  $80^\circ \text{C}$  ( $353 \text{ К}$ ),  $150^\circ \text{C}$  ( $423 \text{ К}$ ),  $250^\circ \text{C}$  ( $523 \text{ К}$ ) для германієвого, кремнієвого і арсенід галієвого  $p$  –  $n$  переходів.

**Розв’язок.** Згідно формули (17.16) густина струму насичення неосновних носіїв:

$$j_s \sim n_i^2 \sim \exp \left\{ -\frac{W_g}{kT} \right\},$$

де  $W_g$  – ширина забороненої зони напівпровідника. Тоді відношення струмів, яке необхідно знайти, буде дорівнювати:

$$\frac{j_s(T)}{j_s(T_0)} = \frac{\exp \left\{ -\frac{W_g}{kT} \right\}}{\exp \left\{ -\frac{W_g}{kT_0} \right\}} = \exp \left\{ \frac{W_g}{k} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}.$$

Таблиця 1

$T, K$ $p-n$ перехід	300	353	423	523
Ge	1	65	$3,3 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^5$
Si	1	592	$2,3 \cdot 10^5$	$7,45 \cdot 10^7$
GaAs	1	$3,4 \cdot 10^3$	$6,8 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^{10}$

Таблиця 2

$T, K$	300	353	423	523
$p-n$ перехід	$j_s, \text{mA/cm}^2$			
Ge	0,1	6,5	330	$1,4 \cdot 10^4$
Si	$10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	0,75
GaAs	$5 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-4}$

Скориставшись даними табл.12 додатків для германієвого  $p - n$  переходу при  $T = 353 \text{ K}$  отримаємо:



$$\frac{j_s(353K)}{j_s(300K)} = \exp \left\{ \frac{0,72}{8,625 \cdot 10^{-3}} \left( \frac{1}{300} - \frac{1}{353} \right) \right\} = 65.$$

Результати розрахунків для різних температур та інших  $p-n$  переходів приведені в табл. 1.

З урахуванням результатів задачі (17.7) і даних табл. 1 приведемо значення сили струму  $j_s$  в абсолютних величинах. Із табл. 2 видно, що при  $T = 80^\circ\text{C}$  (353K) значення  $j_s$  для германієвого діода складає  $\sim 6,5 \text{ mA/cm}^2$ , що є значною величиною. Тому температура  $+80^\circ\text{C}$  є максимально можлива робоча температура для германієвих діодів.

Кремнієві  $p-n$ -структури зберігають працездатність до температури  $+150^\circ\text{C}$  (423K). При такій температурі густина струму насичення в кремнієвих діодах зростає порівняно з кімнатною в 230000 раз. Проте ця густина струму все таки значно менша, ніж аналогічна величина в германієвих  $p-n$ -структурах при кімнатній температурі.

Арсенід-галієві діоди можуть працювати при підвищенні температури до  $+250^\circ\text{C}$  (523K). При цьому величина  $j_s$  зростає порівняно з її значенням при кімнатній температурі в  $10^{10}$  раз і є всього  $5 \cdot 10^{-4} \text{ mA/cm}^2$ .

Можемо зробити висновок, що чим більша ширина забороненої зони  $W_g$  матеріалу, з якого виготовлений діод, тим вища гранична температура роботи діода і тим менше значення густини струму  $j_s$ .

**Задача 17.9.** У потужного кремнієвого високовольтного різко несиметричного ( $N_a \gg N_d$ ) випрямляючого діода площа переходу  $S = 20 \text{ cm}^2$ ,  $N_d = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ . Розрахувати ємність переходу при відсутності зовнішньої зворотньої напруги  $U_0$  на діоді, а також при  $U_0 = 1000 \text{ V}$ .

**Розв'язок.** Якщо представити, що  $p-n$  перехід представляє собою плоский конденсатор, то ємність такого конденсатора можна розрахувати за формулою:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{x},$$

де  $S$  – площа переходу,  $x$  – ширина  $p$  –  $n$  переходу. Для різконесиметричного  $p$  –  $n$  переходу  $x$  можна розрахувати за формулою (17.19) і тоді:

$$C = \left( \frac{e \varepsilon \varepsilon_0 N_d}{2(U_{pn} + U_0)} \right)^{1/2} \cdot S.$$

Якщо  $U_0 = 0$ , то

$$C = \left( \frac{e \varepsilon \varepsilon_0 N_d}{2U_{pn}} \right)^{1/2} \cdot S.$$

Прийнявши згідно табл.12 додатків,  $U_{pn} = 1,1$  В;  $\varepsilon = 12,5$  отримаємо: при  $U_0 = 0$

$$C = \left( \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 12,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{19}}{2 \cdot 1,1} \right)^{1/2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \Phi \approx \\ \approx 1,8 \cdot 10^{-8} \Phi = 18000 \text{ пФ};$$

при  $U_0 = 1000$  В,  $C = 6 \cdot 10^{-10} \Phi = 600 \text{ пФ}$ .

**Задача 17.10.** Площа  $p$  –  $n$  переходу кремнієвого діода  $S = 20 \text{ см}^2$ ,  $N_d = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . При кімнатній температурі і напрузі на діоді  $U_0 = 100$  В типова величина зворотнього струму  $I_s = 0,5 \text{ мА}$ . Порівняти активний і реактивний опори  $p$  –  $n$  переходу для частот  $\nu_1 = 50 \text{ Гц}$  і  $\nu_2 = 400 \text{ Гц}$ .

**Розв'язок.** Активний опір  $p$  –  $n$  переходу знайдемо згідно закону Ома за формулою:

$$R = \frac{U_0}{I_s} = \frac{100}{0,5 \cdot 10^{-3}} \text{ Ом} = 2 \cdot 10^5 \text{ Ом}.$$

Реактивний опір  $p$  –  $n$  переходу будемо знаходити за формулою:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}.$$

Згідно розв'язку задачі (17.9) ємність  $p$  –  $n$  переходу знайдемо за формулою:

$$C = \left( \frac{e\epsilon\epsilon_0 N_d}{2(U_{pn} + U_0)} \right)^{1/2} \cdot S.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$C = \left( \frac{1,6 \cdot 12,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{2(1 + 100)} \right)^{1/2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \Phi \approx 2 \cdot 10^{-9} \Phi = 2 \text{ нФ}.$$

Тоді для  $\nu_1 = 50$  Гц реактивний опір буде:

$$Z_{C_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ Ом} > R,$$

а для  $\nu_2 = 400$  Гц

$$Z_{C_2} = \frac{1}{2\pi \cdot 400 \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = 2 \cdot 10^5 \text{ Ом} \approx R.$$

**Висновок.** Порівнюючи  $Z_C$  і  $R$ , бачимо, що при  $\nu \geq 400$  Гц опір діоду буде визначатись не зворотнім струмом, а ємністю структури. Правда, якщо діод призначений для роботи в колі промислової частоти (50 Гц), то наявність такої ємності особливої ролі не грає. Для струмів надвисокої частоти використовується діоди, площа переходу яких складає  $10^{-4} \sim 10^{-6} \text{ см}^2$ , а ємність  $\sim 0,01$  нФ.

**Задача 17.11.** Варікапи (від англійського variable capacitor) – змінний конденсатор представляє собою  $p - n$  перехід, ємність якого змінюється в залежності від прикладеної напруги (див. задачу 17.9). Найважливішим параметром варікапа є коефіцієнт зміни ємності  $K_C = C_{\max}/C_{\min}$ , де  $C_{\max}$  – максимальна,  $C_{\min}$  – мінімальна ємності діода. Мінімальна зворотня напруга на варікапі  $U_0 = 0$ . Максимальна напруга на  $p - n$  переході обмежується процесами ударної іонізації і називається напругою пробою  $U_i$ . Напруженість електричного поля  $E_i$  при  $U_0 = U_i$  складає  $\sim 3 \cdot 10^5 \text{ В/см}$ . Оцінити значення  $K_C$  для різконесиметричного кремнієвого варікапа, якщо  $N_d$  змінюється в межах  $10^{15} - 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .

**Розв'язок.** Згідно розв'язку задачі (17.9) максимальна ємність варікапа буде:

$$C_{\max} = \left( \frac{e\epsilon\epsilon_0 N_d}{2U_{pn}} \right)^{1/2} \cdot S,$$

а мінімальна –

$$C_{min} = \left( \frac{e\epsilon\epsilon_0 N_d}{2(U_{pn} + U_i)} \right)^{1/2} \cdot S \approx \left( \frac{e\epsilon\epsilon_0 N_d}{2U_i} \right)^{1/2} \cdot S.$$

Тоді

$$K_C = \frac{C_{max}}{C_{min}} = \left( \frac{U_i}{U_{pn}} \right)^{1/2}.$$

Із формули (17.3) отримаємо, що

$$E_m \cong E_i = \left( \frac{2eN_d U_i}{\epsilon\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad \text{і} \quad U_i = E_i^2 \frac{\epsilon\epsilon_0}{2eN_d}.$$

Тоді

$$K_C = \left( \frac{\epsilon\epsilon_0 E_i^2}{2eU_{pn}N_d} \right)^{1/2}.$$

Використавши дані таблиці 12 додатків, отримаємо, що для  $N_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$

$$K_C = \left( \frac{12,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \cdot 10^{14}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,1 \cdot 10^{21}} \right)^{1/2} \cong 17,$$

а для  $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $K_C = 5$ . В реальних варіантах величина  $K_C$  знаходиться в межах від 2 до 15.

**Задача 17.12.** Дослідити залежність опору  $p$ - $n$  переходу  $R_{pn}$  від величини прямого зміщення  $U_0$  для кремнієвого діода. Для такого діода площа  $p$ - $n$  переходу  $S = 0,1 \text{ см}^2$ , густина струму насичення при зворотньому зміщенні  $j_s = 10^{-7} \text{ А/см}^2$ . Температура кімнатна.

**Розв'язок.** Згідно формули (17.24) при прямому зміщенні через діод буде протікати струм:

$$I = j(U_0) \cdot S = S j_s \left( \exp \left\{ \frac{eU_0}{kT} \right\} - 1 \right).$$

Якщо  $U_0 = 0,01 \text{ В}$ , то

$$I = 10^{-1} \cdot 10^{-7} \cdot \left( \exp \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} - 1 \right) \text{А} =$$

$$= 4,7 \cdot 10^{-9} \text{А} \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{А}.$$

І тоді опір  $p - n$ -переходу буде дорівнювати:

$$R_{pn} = \frac{U_0}{I} \cong \frac{0,01}{5 \cdot 10^{-9}} \approx 2 \cdot 10^6 \text{Ом}.$$

При  $U_0 = 0,1 \text{ В}$  струм  $I = 5 \cdot 10^{-7} \text{ А}$ , а  $R_{pn} = 2 \cdot 10^5 \text{ Ом}$ .  
Для інших значень  $U_0$  розраховані значення  $R_{pn}$  приведені в таблиці 3.

При напрузі на діоді  $U_0 = 0,7 \text{ В}$  (якщо допустити, що вся прикладена напруга падає на самому  $p - n$  бар'єрі) струм через діод був би  $\sim 50000 \text{ А}$ , густина струму через діод  $- 50000 \text{ А/см}^2$ , а опір бар'єру  $R_{pn} = 0,00014 \text{ Ом}$ . Опір  $R \sim 10^{-4} \text{ Ом}$  є малий і такої величини

Таблиця 3

$U_0, \text{В}$	$I, \text{А}$	$R_{pn}, \text{Ом}$	$U_0, \text{В}$	$I, \text{А}$	$R_{pn}, \text{Ом}$
0,2	$2 \cdot 10^{-5}$	$10^4$	0,6	200	0,003
0,4	$5 \cdot 10^{-2}$	8	0,7	$5 \cdot 10^3$	0,00014

опір можуть мати  $p - i$  та  $n - i$  області діода і навіть контакти. Це значить, що не вся прикладена напруга  $U_0 = 0,7 \text{ В}$  падає безпосередньо на  $p - n$  перехіді. Значна частина цієї напруги буде падати на увімкнених послідовно з переходом контактах,  $n - i$  та  $p - i$  областях. Значить, висота бар'єру  $U_{pn}$  знизиться не на  $0,7 \text{ В}$ , а на меншу величину і густина струму через діод буде значно менша  $50000 \text{ А/см}^2$ .

**Задача 17.13.** Різкий  $p - n$  перехід, який виготовлений із кремнію, знаходиться при температурі 300 К. Спочатку напруга зміщення відсутня. Потім до переходу прикладається така зворотня напруга, що струм через діод стає 1 мА. Концентрація домішок, якими легували кремній, по обидві сторони переходу складає  $10^{21} \text{ м}^{-3}$ . Площа поперечного перерізу переходу  $10^{-6} \text{ м}^2$ . Оцінити час, за який напруга зміщення зросте до 10 В.

**Розв'язок.** Невідомий час оцінимо за формулою

$$t = \frac{q - q_0}{I},$$

де  $q$  – заряд переходу, коли зворотня напруга дорівнює 10 В, а  $q_0$  – заряд переходу, коли ця ж напруга відсутня,  $I$  – струм через діод. Щоб розрахувати заряди, необхідно знати ширину  $p - n$  переходу. Для цього скористаємось формулою (17.9). Але попередньо розрахуємо контактну різницю потенціалів за формулою (17.6), прийнявши  $n = N_d$ ,  $p = N_a$  і  $n_i = 1,1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  (див. табл.12 додатків). Тоді

$$U_{pn} = \frac{W_{pn}}{e} = \frac{kT}{e} \ln \frac{N_d^2}{n_i^2} = 0,026 \cdot \ln \frac{10^{42}}{(1,1)^2 \cdot 10^{32}} \text{ В} = 0,594 \text{ В}$$

і

$$x = \left( \frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{e} \left( \frac{N_a + N_d}{N_a N_d} \right) U_{pn} \right)^{1/2} = \left( \frac{4\varepsilon\varepsilon_0 U_{pn}}{e N_d} \right)^{1/2} =$$

$$= \left( \frac{4 \cdot 12,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,594}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{21}} \right)^{1/2} = 1,28 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 1,28 \text{ мкм}.$$

Так як  $N_a = N_d$ , то  $x_n = x_p = x/2$ , то заряд

$$q_0 = x_n S N_d e =$$

$$= \frac{x}{2} SN_d e = \frac{1,28 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{21} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2} = 1,02 \cdot 10^{-10} \text{ Кл.}$$

Якщо прикладена зворотня напруга, то

$$x_1 = \sqrt{\frac{4\epsilon\epsilon_0}{e} \cdot \frac{U_{pn} + U_0}{N_d}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10,594}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{21}}} = 5,41 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 5,41 \text{ мкм}$$

і заряд

$$q = \frac{x_1}{2} SN_d e = \frac{5,4 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{21} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 4,33 \cdot 10^{-10} \text{ Кл.}$$

Тоді

$$t = \frac{(4,33 - 1,02) \cdot 10^{-10}}{10^{-3}} = 0,33 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 0,33 \text{ мкс.}$$

## 17.6. Задачі

**17.14.** Германій  $n$ -типу з концентрацією іонізованих донорів  $10^{17} \text{ см}^{-3}$  утворює контакт з германієм  $p$ -типу, що має концентрацію іонізованих донорів  $10^{14} \text{ см}^{-3}$ . Знайти положення рівня Фермі відносно дна зони провідності в кожному матеріалі при температурі 300 К, а також контактну різницю потенціалів.

**17.15.** Знайти величину контактної різниці потенціалів, яка виникає в германієвому  $p$ - $n$  переході при температурі 300 К, якщо  $N_a = N_d = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ .

**17.16.** Знайти ширину германієвого  $p$ - $n$  переходу, якщо концентрація донорів в  $n$ -області дорівнює концентрації акцепторів в  $p$ -області і складає величину порядку  $10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Температура кімнатна.

**17.17.**  $p$  – і  $n$  – області кремнієвого діода з різким переходом мають питомий опір 0,013 і 44,5 Ом·см відповідно. В умовах термодинамічної рівноваги при кімнатній температурі визначити висоту потенційного бар'єру  $W_{pn}$  та його ширину.

**17.18.** Є два діоди, один із яких виготовлений із кремнію, а другий – із германію. Вирахуйте: **а)** висоту потенційного бар'єру  $W_{pn}$  в обох діодах, вважаючи, що концентрація домішок  $N_a = 10^{23} \text{ м}^{-3}$  і  $N_d = 10^{20} \text{ м}^{-3}$  в них однакова; **б)** ширину області переходу в кожному діоді. Температура кімнатна.

**17.19.** Германієвий  $p$ – $n$  перехід, отриманий із матеріалів, що леговані акцепторами і донорами, концентрації яких  $N_a = 10^{23} \text{ м}^{-3}$  і  $N_d = 10^{23} \text{ м}^{-3}$ . Розрахувати ширину області переходу, якщо максимальна напруженість електричного поля в ньому  $E_m = 10^7 \text{ В/м}$ .

**17.20.** Кремнієвий  $p$  –  $n$  перехід, що знаходиться при кімнатній температурі, має концентрацію домішок  $N_a = 10^{24} \text{ м}^{-3}$  і  $N_d = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ . Розрахувати висоту потенційного бар'єру  $W_{pn}$  та максимальну напруженість електричного поля на границі розділу  $p$  – і  $n$  – областей.

**17.21.** Поясніть, чи можлива така ситуація, коли в  $p$ – $n$  –переході висота потенційного бар'єру  $W_{pn}$  буде більша за ширину забороненої зони  $W_g$ ?

**17.22.** Є германієвий  $p$ – $n$  перехід. Концентрація акцепторів в  $p$  – області  $N_a = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ , концентрація донорів в  $n$ – області  $N_d = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ . Площа поперечного перерізу переходу  $S = 10 \text{ мм}^2$ . Температура переходу  $T = 300 \text{ К}$ . Розрахувати: **а)** величину контактної різниці потенціалів на переході; **б)** ширину  $p$  –  $n$  переходу; **в)** величину бар'єрної ємності; **г)** максимальну



напруженість електричного поля на границі розділу  $p$  – і  $n$  –областей.

**17.23.** Кремнієвий  $p$  –  $n$  перехід знаходиться при кімнатній температурі і має концентрацію акцепторів в  $p$  –області  $N_a = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , а концентрацію донорів в  $n$  –області  $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Час життя  $\tau$  електронів і дірок прийняти  $10^{-6}$  с. Площа поперечного перерізу переходу  $S = 25 \text{ мм}^2$ . Оцінити: **а)** величину бар'єрної ємності; **б)** величину заряду цієї ємності; **в)** силу струму через  $p$ –  $n$  перехід при його зворотньому включенні.

**17.24.** Діоди при зворотньому зміщенні часто використовують як змінні конденсатори. Оцініть як змінюється бар'єрна ємність діода з різким переходом при збільшенні модуля зміщення на 1 В, якщо відомо, що при  $U_0 = 5 \text{ В}$  бар'єрна ємність  $C_{бар} = 20 \text{ пФ}$  (див. розв'язок задачі (17.9)).

**17.25.** Є германієвий діод з такими параметрами:  $N_a = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ,  $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , площа поперечного перерізу  $S = 2 \text{ мм}^2$ ,  $T = 300 \text{ К}$ , час життя дірок  $\tau_p = 10^{-6}$  с. Розрахувати: рівноважні концентрації носіїв заряду в  $p$  – і  $n$  –областях; величину контактної різниці потенціалів  $U_{pn}$ ; зворотній струм насичення, нехтуючи струмом електронів (так як  $N_a \gg N_d$ ).

## **18. АТОМНЕ ЯДРО. РАДІОАКТИВНІСТЬ.**

### **ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ**

#### **18. 1. Питання теми**

1. Будова атомних ядер.
2. Радіоактивність, закон радіоактивного розпаду.
3. Ядерні реакції поділу і синтезу ядер.

## 18. 2. Основні визначення та формули

1. Для позначення ядер застосовують символи  ${}_Z X^A$  або  ${}_Z^A X$ , де  $X$  – хімічний символ даного елемента,  $Z$  – його зарядове число, яке дорівнює числу протонів, що входять до складу ядра,  $A$  – масове число, що дорівнює сумі числа протонів  $Z$  і числа нейтронів  $N$ , що входять в склад ядра.

### 2. Енергія зв'язку ядра

$$W_{зв} = \Delta \cdot c^2, \quad (18.1)$$

де  $\Delta = Zm_p + Nm_n - m_{я}$  – дефект маси ядра,  $m_p$  – маса спокою протона,  $m_n$  – маса спокою нейтрона,  $m_{я}$  – маса спокою ядра,  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

### 3. Енергія зв'язку ядра в MeV (мегаелектронвольтах)

$$W_{зв} = \Delta \cdot 931,44 \text{ MeV}, \quad (18.2)$$

де 931,4 Мев – енергія, що відповідає 1 атомній одиниці масі (1 а.о.м. =  $1,66 \cdot 10^{-27}$  кг),  $\Delta$  – дефект маси виражений в а.о.м.

### 4. Питома енергія зв'язку ядра

$$W_{пит} = \frac{W_{зв}}{A}. \quad (18.3)$$

### 5. Закон радіоактивного розпаду

$$N = N_0 \exp\{-\lambda t\}, \quad (18.4)$$

де  $N_0$  – початкова кількість ядер в момент часу  $t = 0$ ,  $N$  – кількість ядер, що ще не розпались на даний момент часу  $t$ ,  $\lambda$  – постійна (стала) радіоактивного розпаду (ймовірність розпаду ядер за одиницю часу).

**Зауваження:** Якщо радіоактивний ізотоп має декілька видів радіоактивності, то загальна постійна розпаду  $\lambda = \sum_k \lambda_k$ , де сумування проводиться по всіх видах радіоактивності,  $\lambda_k$  є парціальною сталою розпаду.

6. Період напіврозпаду (час, за який розпадається половина початкової кількості ядер)

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (18.5)$$

7. Середній час життя ядер

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}. \quad (18.6)$$

8. Активність радіоактивної речовини – це кількість ядер, які розпадаються за одиницю часу:

$$a = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N. \quad (18.7)$$

**Зауваження:** За одиницю активності в системі СІ прийнято один розпад за одну секунду (один Беккерель – 1 Бк). Широко застосовується позасистемна одиниця – 1 Кюрі (Ки). 1 Ки – активність такого радіоактивного зразка, в якому відбувається  $3,7 \cdot 10^{10}$  розпадів за секунду ( $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$ ). Така кількість розпадів має місце в 1 г чистого радію ( ${}_{88}\text{Ra}^{226}$ ).

9. Енергія ядерної реакції (або тепловий ефект реакції)

$$Q = (\sum m_1 - \sum m_2) \cdot c^2, \quad (18.8)$$

де  $\sum m_1$  і  $\sum m_2$  - суми мас спокою ядер до і після реакції, відповідно.

**Зауваження:** Якщо  $\sum m_1$  і  $\sum m_2$  виразити в а.о.м., то

$$Q = (\sum m_1 - \sum m_2) \cdot 931,44 \text{ Мев}. \quad (18.9)$$

### 18.3. Питання на самопідготовку

1. Сучасні уявлення про будову атомного ядра.
2. Що таке дефект маси ядра?
3. Що таке енергія зв'язку ядра? Як вона практично визначається?
4. Накресліть приблизний графік залежності питомої енергії зв'язку від масового числа ядра. За допомогою графіка покажіть про можливість двох типів ядерних реакцій.
5. Які існують види радіоактивності?

6. Закон радіоактивного розпаду. Які є характеристики радіоактивного розпаду?
7. Дати визначення активності радіоактивної речовини. В яких фізичних одиницях вимірюється активність радіоактивної речовини?
8. Отримання енергії при поділі важких ядер. Принцип дії атомної бомби.
9. Отримання енергії при синтезі легких ядер. Принцип дії водневої (термоядерної) бомби.
10. Отримання енергії в ядерних реакторах на атомних електростанціях.

## 18.4. Методичні вказівки

1. Для розрахунку дефекту мас в а.о.м. потрібно вміти знаходити маси ядер ізотопів в а.о.м. за допомогою таблиці 14 додатків. Наприклад: знайдемо масу ядра урану  ${}_{92}\text{U}^{235}$ . В першій колонці таблиці 14 знаходимо цей ізотоп урану. В третій колонці "Надлишок маси атома  $M - A$ , а.о.м." знаходимо, що для цього ізотопу урану  $M - A = 0,04393$  а.о.м. Так як масове число цього ізотопу урану  $A = 235$ , то маса атома  $M = 235,04393$  а.о.м. До складу атома входить ядро і електрони. Атом ізотопу  ${}_{92}\text{U}^{235}$  має 92 електрони, сумарна маса яких  $92 \cdot 5,488 \cdot 10^{-4}$  а.о.м.  $= 0,05049$  а.о.м. Тоді маса ядра  ${}_{92}\text{U}^{235}$  буде дорівнювати  $235,04393 - 0,05049 = 234,99344$  а.о.м. В багатьох випадках масою всіх електронів атома нехтують порівняно з масою ядра цього атома. При цьому відносна похибка для ізотопу  ${}_{92}\text{U}^{235}$  буде:

$$\delta = \frac{0,05049}{234,99344} \cdot 100\% = 0,02\% .$$

Маса ядра ізотопу гелію  ${}_2\text{He}^4$  буде:

$$m = 4,002604 - 2 \cdot 5,488 \cdot 10^{-4} = 4,0015064 \text{ а.о.м.}$$

Якщо знехтувати масою двох електронів і прийняти, що маса ядра ізотопу гелію  ${}^4_2\text{He}$  буде 4,002604 а.о.м., то відносна похибка визначення маси ядра буде:

$$\delta = \frac{2 \cdot 5,486 \cdot 10^{-4}}{4,0015064} \cdot 100\% = 0,027\%.$$

2. Якщо згідно умови задачі час розпаду  $\Delta t \ll T$  (періоду напіврозпаду) даного радіоактивного ізотопу, то число ядер, які ще не розпались, можна вважати практично незмінним на протязі цього проміжку часу  $\Delta t$  і таким, що дорівнює числу ядер на початку проміжку часу  $\Delta t$ . Тоді число ядер  $\Delta N$ , які розпались за проміжок часу  $\Delta t$ , можна знаходити за формулою

$$\Delta N = \lambda \cdot N \cdot \Delta t. \quad (18.10)$$

## 18. 5. Приклади розв'язування задач

**Задача 18.1.** Скільки ядер ізотопу  $\text{U}^{235}$  міститься в 10 г природного урану? Природний уран містить 99,27% ядер  $\text{U}^{238}$ , 0,721% ядер  $\text{U}^{235}$  і 0,0055% ядер  $\text{U}^{234}$ .

**Розв'язок:** Число атомів (а значить і ядер) в масі  $m$  природної суміші дорівнює

$$\frac{m}{\overline{M}} \cdot N_A,$$

де  $N_A$  – число Авогадро,  $\overline{M}$  – атомна маса природної суміші ізотопів урану, яка визначається як

$$\overline{M} = aM_{238} + bM_{235} + cM_{234}.$$

В цій формулі  $a, b, c$  – відносний вміст ізотопів урану  $\text{U}^{238}$ ,  $\text{U}^{235}$ ,  $\text{U}^{234}$  в природній суміші, відповідно:  $M_{238}$ ,  $M_{235}$ ,  $M_{234}$  –

атомні маси ізотопів урану. Тоді число ядер ізотопу  $\text{U}^{235}$  в 10 г природного урану буде:

$$N = \frac{10 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 0,00721}{(238 + 0,05076) \cdot 0,9927 + (235 + 0,04393) \cdot 0,00721 + (234 + 0,04090) \cdot 0,000055} =$$

$$= 1,824 \cdot 10^{20} \text{ ядер } \text{U}^{235}.$$

**Задача 18.2.** Визначити питому енергію зв'язку ядра ізоотопу  ${}_8\text{O}^{17}$ .

**Розв'язок:** Знайдемо дефект маси цього ядра. Для цього скористаємось даними табл.14. Тоді

$$\Delta = 8 \cdot (1 + 0,007825) + 9 \cdot (1 + 0,008665) - (17 - 0,000867) =$$

$$= 8 \cdot 0,007825 + 9 \cdot 0,008665 + 0,000867 = 0,141452 \text{ а.о.м.}$$

За формулою (18.2) знаходимо енергію зв'язку ядра  ${}_8\text{O}^{17}$ :

$$W_{36} = 0,141452 \cdot 931,44 \text{ MeV} = 131,75 \text{ MeV},$$

а за формулою (18.3) – питому енергію зв'язку:

$$W_{\text{num}} = \frac{131,75}{17} = 7,75 \text{ MeV/нуклон.}$$

**Задача 18.3.** Визначити, яка кількість ядер в  $m_0 = 1,0$  мг радіоактивного ізоотопу церію  ${}_{58}\text{Ce}^{144}$  розпадається протягом проміжків часу: 1)  $\Delta t_1 = 1\text{с}$ ; 2)  $\Delta t_2 = 1$  рік. Період напіврозпаду ізоотопу  ${}_{58}\text{Ce}^{144}$   $T = 285$  діб.

**Розв'язок:** Задача розв'язується за допомогою закону радіоактивного розпаду (18.4).

1) Так як  $\Delta t_1 \ll T$ , то згідно методичних вказівок (формула 18.10), число ядер, що розпались на протязі проміжку часу  $\Delta t_1$  дорівнює  $\Delta N_1 = \lambda N_0 \cdot \Delta t_1 = \frac{N_0 \Delta t_1 \ln 2}{T}$ , де  $N_0 = \frac{m_0}{M} N_A$  – початкове число ядер. Тут  $M$  – молярна маса церію,  $N_A$  – число Авогадро. Тоді

$$\Delta N_1 = \frac{N_A m_0 \Delta t_1 \ln 2}{TM}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\Delta N_1 = \frac{6.022 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 0.693}{285 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 144} = 1,17 \cdot 10^{11} \text{ ядер}.$$

2) Оскільки  $\Delta t_2 \sim T$ , то для розв'язку задачі скористаємося формулою (18.4). Тоді

$$\begin{aligned} \Delta N_2 &= N_0 - N_2 = \frac{N_A m_0}{M} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{\Delta t_2 \ln 2}{T} \right\} \right) = \\ &= \frac{6.022 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-3}}{144} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{365 \cdot \ln 2}{285} \right\} \right) = 2,46 \cdot 10^{18} \text{ ядер}. \end{aligned}$$

**Задача 18.4.** Знайти активність радону  $_{86}\text{Rn}^{222}$ , який утворився із  $m = 1,00$  г радію  $_{88}\text{Ra}^{226}$  за одну добу.

**Розв'язок:** Із табл.13 знаходимо, що періоди напіврозпаду радію і радону дорівнюють відповідно  $T_1 = 1620$  років і  $T_2 = 3,8$  доби. Так як проміжок часу  $\Delta t = 1$  доба  $\ll T_1$ , то кількість ядер радону, що утворились внаслідок розпаду ядер радію згідно (18.10) буде:

$$N = a \Delta t,$$

де  $a = 1\text{Ки} = 3,7 \cdot 10^{10}$  Бк – активність 1 г чистого радію  $_{88}\text{Ra}^{226}$ ,

$\Delta t = 1$  доба. Тоді активність радону згідно (18.7) буде дорівнювати

$$\begin{aligned} a_{Rn} &= \frac{N \ln 2}{T_2} = \frac{a \cdot \Delta t \cdot \ln 2}{T_2} = \frac{3,7 \cdot 10^{10} \cdot 1 \cdot 0,693}{3,8} \text{ Бк} = \\ &= 0,675 \cdot 10^{10} \text{ Бк} = 0,18 \text{ Ки}. \end{aligned}$$

**Задача 18.5.** Допустима межа забрудненості радіонуклідами території по  $\text{Cs}^{137}$ , яка придатна для проживання, дорівнює  $40 \text{ мкКи/км}^2$ . Перевести цю допустиму дозу в одиниці вимірювання  $\text{мг/км}^2$ . Період напіврозпаду  $\text{Cs}^{137}$  дорівнює 31 рік.

**Розв'язок:** Із умови задачі зрозуміло, що активність  $\text{Cs}^{137}$  на  $1 \text{ км}^2$  території дорівнює  $a = 40 \text{ млКи}$ . За формулою (18.7) знаходимо, що таку активність створюють

$$N = \frac{a}{\lambda} = \frac{aT}{\ln 2} \text{ ядер } \text{Cs}^{137}.$$

Ця кількість ядер  $\text{Cs}^{137}$  має масу

$$\begin{aligned} m &= N \cdot 137 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = \\ &= \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 3,7 \cdot 10^{10} \cdot 31 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 137 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{0,693} \text{ кг} = \\ &= 4,75 \cdot 10^{-7} \text{ кг} = 0,475 \text{ мг}. \end{aligned}$$

**Відповідь:** Допустима межа проживання на забрудненій радіонуклідами території по  $\text{Cs}^{137}$  складає  $0,475 \text{ мг/км}^2$ .

**Задача 18.6.** Розрахувати енергію, яка виділяється в реакції  ${}_2\text{He}^4 + {}_4\text{Be}^9 \rightarrow {}_6\text{C}^{12} + {}_0n^1$ .

**Розв'язок:** Розрахуємо дефект маси реакції. Для цього за допомогою табл.14 додатків знаходимо маси ядер, які приймають участь в реакції і які утворились в результаті реакції.

$$\text{Маса } {}_2\text{He}^4 = 4,002604 \text{ а.о.м.},$$

$$\text{маса } {}_4\text{Be}^9 = 9,012186 \text{ а.о.м.},$$

$$\Sigma m_1 = 13,014790 \text{ а.о.м.}$$

$$\text{Маса } {}_6\text{C}^{12} = 12,000000 \text{ а.о.м.},$$

$$\text{маса } {}_0n^1 = 1,008665 \text{ а.о.м.},$$

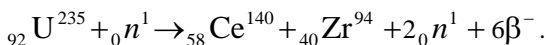
$$\Sigma m_2 = 13,008665 \text{ а.о.м.}$$

Тоді за формулою (18.9) знаходимо тепловий ефект реакції:

$$Q = (13,014790 - 13,008665) \cdot 931,44 \text{ MeB} = 5,70 \text{ MeB}.$$

**Задача 18.7.** Один із варіантів реакції поділу ядер урану  ${}_{92}\text{U}^{235}$  такий:





Визначити тепловий ефект реакції (використавши дані табл.14 додатків), а також енергію, яка приходить на один нуклон, що приймає участь в реакції.

**Розв'язок:** Розрахуємо дефект маси реакції.

До поділу:	Після поділу:
${}_{92}\text{U}^{235} - 235,0439 \text{ а.о.м.}$	${}_{58}\text{Ce}^{140} - 139,9054 \text{ а.о.м.}$
${}_0n^1 - 1,0087 \text{ а.о.м.}$	${}_{40}\text{Zr}^{94} - 93,9036 \text{ а.о.м.}$
<hr/>	$2{}_0n^1 - 2,0173 \text{ а.о.м.}$
$\Sigma m_1 = 236,0526 \text{ а.о.м.}$	$6\beta^- - 0,0033 \text{ а.о.м.}$
	<hr/>
	$\Sigma m_2 = 235,8296 \text{ а.о.м.}$

Тепловий ефект реакції визначимо за формулою (18.9):

$$Q = (236,0526 - 235,8296) \cdot 931,44 \text{ MeV} = 207,7 \text{ MeV}.$$

На один нуклон, що приймає участь в реакції приходить енергія:

$$q = \frac{Q}{236} = \frac{207,7}{236} = 0,88 \frac{\text{MeV}}{\text{нуклон}}.$$

## 18.6. Задачі

**18.8.** Експерименти розсіювання заряджених частинок на ядрах показали, що в першому наближенні ядро можна вважати кулею, радіус якої визначається за формулою  $r = 1,4 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см}$ . На які властивості ядерних сил вказує ця формула?

**18.9.** У якого хімічного елемента радіус ядра приблизно вдвічі більший, ніж у вуглецю?

**18.10.** Відомо, що густина ядерної речовини величина порядку  $10^{14} \text{ г/см}^3$ . Оцінити радіус кулі, яка б при такій густині, мала б масу, що дорівнювала б масі Землі.

**18.11.** Згідно мезонної теорії ядерних сил взаємодія між нуклонами в ядрі здійснюється шляхом обміну віртуальними піонами,

маса яких  $m_{\pi}c^2 \approx 140 \text{ MeV}$ . За допомогою співвідношення невизначеностей оцінити радіус дії ядерних сил.

**18.12.** Яка будова ядер  ${}_2\text{He}^4$ ,  ${}_3\text{Li}^6$ ,  ${}_{14}\text{Si}^{30}$ ,  ${}_{92}\text{U}^{238}$ ,  ${}_{92}\text{U}^{235}$ ?

**18.13.** Чим відрізняються ядра ізоотопів берилію  ${}_4\text{Be}^7$ ,  ${}_4\text{Be}^8$ ,  ${}_4\text{Be}^9$ ?

**18.14.** Один грам ізоотопу урану  ${}_{92}\text{U}^{238}$  випромінює 12200  $\alpha$ -частинок за одну секунду. Використовуючи ці дані, визначити період напіврозпаду цього ізоотопу урану.

**18.15.** Стала розпаду ізоотопу  ${}_{82}\text{Pb}^{210}$  дорівнює  $10^{-9} \text{ с}^{-1}$ . Знайти час, за який розпадається  $2/5$  початкової кількості ядер цього ізоотопу.

**18.16.** Розрахувати активність 1 г ізоотопу  ${}_{92}\text{U}^{238}$ .

**18.17.** Яка доля початкової кількості радіоактивних ядер розпадається за час, який дорівнює середньому часу життя цих ядер?

**18.18.** Яка кількість кожного із елементів  $\text{U}^{238}$  і  $\text{Th}^{232}$  буде мати активність, що дорівнює 1 мКи?

**18.19.** В таблиці приведені дані залежності активності зразка  ${}_{88}\text{Ra}^{223}$  від часу. Побудувати графік цієї залежності і за допомогою цього графіка визначити період напіврозпаду і середній час життя

Час, дні	0	10	20	30	40	50	60	80
Активність $a \cdot 10^{-4}$ , кількість розпадів за хвилину	30	17	9,0	5,0	3,0	1,50	1,0	0,3

ядер цього ізоотопу.

**18.20.** Ізотоп стронцію ( ${}_{38}\text{Sr}^{90}$ ) випромінює  $\beta^-$  – частинки. Через який проміжок часу розпадається 90% початкової кількості стронцію?

**18.21.** Зразок руди містить уран  $\text{U}^{238}$  і свинець  $\text{Pb}^{206}$  в такій пропорції, що на кожний грам урану  $\text{U}^{238}$  приходить 0,85 г ізоотопу  $\text{Pb}^{206}$ . Визначити вік даного зразка руди.

**18.22.** Визначити активність радіоактивного ізотопу  $\text{Ag}^{37}$  через а) один день, б) 1000 днів після його виготовлення, якщо початкова активність  $a = 100 \text{ мКі}$ .

**18.23.** Період напіврозпаду ізотопу  ${}_{84}\text{Po}^{210}$  дорівнює 138,4 дня. Визначити активність цього препарату через рік, якщо його початкова кількість складала 1,0 мкг.

**18.24.** На скільки відсотків зменшиться активність ізотопу  $\text{U}^{235}$  за час  $\Delta t$ ? Розглянути випадки: 1)  $\Delta t_1 = 100$  років; 2)  $\Delta t_2 = T$ , де  $T$  період напіврозпаду  $\text{U}^{235}$ ; 3)  $\Delta t_3 = 10^9$  років.

**18.25.** Ампула з радіоактивним препаратом  $\text{Na}^{24}$  охолоджується постійним струменем повітря. На початку досліду повітря нагрівалось на  $\Delta t_0 = 2^\circ\text{C}$ . Через який час цей струмінь повітря буде нагріватись на  $\Delta t_1 = 1,8^\circ\text{C}$ ?

**18.26.** Атомний підводний човен постійно споживає потужність 60 МВт. Скільки урану  ${}_{92}\text{U}^{235}$  витрачається на борту цього човна за добу?

**18.27.** Яка кількість металічного урану  ${}_{92}\text{U}^{235}$  необхідна для неперервної роботи атомного реактора з потужністю 100 кВт?

**18.28.** Коли спалюють вугілля, то виділяється енергія 7500 ккал/кг. Яка кількість вугілля енергетично еквівалентна 1 кг урану  ${}_{92}\text{U}^{235}$ ?

**18.29.** Вважають, що в деяких зірках енергія виділяється в ядерній реакції синтезу (злиття) трьох  $\alpha$  – частинок в ядро вуглецю  ${}_{6}\text{C}^{12}$ . Яка енергія виділяється при такому злитті ядер?

## 19. ВІДПОВІДІ

### 1. Електростатичне поле у вакуумі

- 1.11. 9 кН.  
1.12.  $4,2 \cdot 10^{42}$ .  
1.13. 23 нН.  
1.14.  $q = 13462,7$  Кл.  
1.15.  $a = 2,53 \cdot 10^8$  м/с<sup>2</sup>.  
1.16. Посередині відрізка, який з'єднує обидва заряди;  
 $q' = -q/4$ .  
1.18.  $q' = -q/\sqrt{3}$ .  
1.19.  $Q = q(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4})$ .  
1.22. а)  $\varphi = 6q/(4\pi\epsilon_0 a)$ ,  $\vec{E} = 0$ ; б)  $\varphi = 0$ ,  $\vec{E} = 0$ .  
1.23. Так, є.  $\varphi(x, y, z) = -(ax + by + cz) = -\vec{E}\vec{r}$   
1.24.  $E = ax$ ,  $\rho = a\epsilon_0$ .  
1.25. Не може.  
1.26. Не може.  
1.27.  $E = 6$  В/м,  $\alpha \approx 132^\circ$ .  
1.28. а)  $E = 2\sqrt{6}$  В/м<sup>2</sup>, б)  $\gamma \approx 145^\circ$ .  
1.29.  $\vec{E} = -\vec{a}$ .  
1.30. а)  $\vec{E} = -2a(x\vec{i} - y\vec{j})$ ;  
б)  $\vec{E} = -2a(y\vec{i} + x\vec{j})$ ,  $\vec{i}$  і  $\vec{j}$  – орти осей  $x$ ,  $y$ .  
1.31. 1 В/м.  
1.32. 0.  
1.34. а)  $E_n \approx 100$  В/м; б)  $\Phi_E = 40,6$  В/м.  
1.35.  $\rho = (1 + 4y + 9z^2)\epsilon_0$ .  
1.36.  $\rho = 3a\epsilon_0$ ;  $\Phi_E = 3aV$ .

- 1.37.  $\rho = 4\varepsilon_0 ar$ .
- 1.38.  $E_x = \rho x / \varepsilon_0$  при  $|x| < a/2$ ;  
 $E_x = \rho a / (2\varepsilon_0)$  при  $x > a/2$  і  
 $E_x = -\rho a / (2\varepsilon_0)$  при  $x < -a/2$ .  
 $\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$  при  $|x| \leq a/2$ ;  
 $\varphi(x) = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}(x - \frac{a}{4})$  при  $x \geq a/2$ ;  
 $\varphi(x) = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}(x + \frac{a}{4})$  при  $x \leq -a/2$ .
- 1.39.  $\rho = 0,443 \text{ нКл/м}^3$ .
- 1.41.  $E \approx (\varphi_1 - \varphi_2)/l = 10 \text{ В/м}$ , вектор  $\vec{E}$  направлений від площини 2 до площини 1.
- 1.42.  $E_A = -50 \text{ В/м}$ ,  $E_B = 150 \text{ В/м}$ ,  $E_C = 50 \text{ В/м}$ .
- 1.43. а)  $\sigma_1 > |\sigma_2|$ ; б)  $\varphi_4 - \varphi_3 = -400 \text{ В}$ .
- 1.44.  $a = \sqrt{3}b$ ,  $r = 2b$ ,  $\varphi = 60^\circ$ .
- 1.45.  $E = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 r \sqrt{a^2 + r^2}}$  а)  $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ ;  
 в)  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ , де  $q = 2a\lambda$ .
- 1.46.  $E = \frac{2\lambda_1 d}{\pi\varepsilon_0(4h^2 + d^2)} = 100 \text{ В/м}$ .
- 1.47.  $\Delta\varphi = \frac{R_1\sigma_1}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \approx 108 \text{ В}$ .
- 1.48.  $E(r) = \frac{R_1\sigma_1 + R_2\sigma_2}{\varepsilon_0 r} \approx 0,18 \text{ МВ/м}$ .

$$1.49. \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 - a^2}};$$

при  $r \gg a$  напруженість –  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

$$1.50. \quad E = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 x}. \text{ Вектор } \vec{E} \text{ направлений під кутом } 45^\circ \text{ до}$$

нитки.

$$1.51. \quad E_m = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 a} = 7,2 \text{ кВ/м.}$$

$$1.52. \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 a} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1 |\lambda_2|} = 200 \text{ В/м.}$$

$$1.53. \quad E = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a} = 100 \text{ В/м.}$$

$$1.54. \quad E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 200 \text{ В/м.}$$

$$1.55. \quad \Delta\varphi = 150 \text{ В.}$$

$$1.56. \quad E = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

$$1.57. \quad E = 0.$$

$$1.58. \quad |\Phi| = \lambda R / (2\epsilon_0) = 50 \text{ В}\cdot\text{м.}$$

$$1.59. \quad E = qb / (8\pi^2 \epsilon_0 R^3), \text{ вектор } \vec{E} \text{ направлений від центра кільця вздовж лінії, яка з'єднує центр кільця з прорізом.}$$

$$1.60. \quad \varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0(b^2 - a^2)} (\sqrt{b^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + x^2}),$$

$$E_x = \frac{qx}{2\pi\epsilon_0(b^2 - a^2)} \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right).$$

При  $|x| \gg b$  – поле точкового заряду.

1.61.  $E_A = 33,6 \text{ В/м.}$

1.62.  $F = \frac{\pi \sigma_1 \sigma_2 R^2}{2 \epsilon_0} = 44 \text{ мН.}$

1.64.  $\vec{E} = 0, \quad \varphi = \sigma R / \epsilon_0 = 20 \text{ В.}$

1.65.  $E = qS / (16\pi^2 \epsilon_0 R^4)$ , вектор  $\vec{E}$ , направлений від центра сфери вздовж лінії, яка з'єднує центр сфери і отвір.

1.66.  $q = 5,92 \cdot 10^5 \text{ Кл, } \varphi = 8,2 \cdot 10^8 \text{ В.}$

1.67.  $\varphi = \frac{3q}{8\pi \epsilon_0 R} = 10^5 \text{ В, } \vec{E} = 0.$

1.68.  $E = \sigma / (8 \epsilon_0).$

1.69.  $\vec{E} = \frac{\rho}{3} \vec{a}$ , де  $\vec{a} = \overrightarrow{OO'}$ . Поле однорідне.

1.70. 1)  $A = 0$ ; 2)  $A = qq_1 / (\pi \epsilon_0 l).$

1.71.  $A = q\vec{E}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$

1.72.  $A = 2 pE.$

1.73.  $A = \frac{qp}{4\pi \epsilon_0 r^2} = 5,75 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} = 360 \text{ еВ.}$

1.74.  $r = 0,14 \text{ мм.}$

1.75. Над електроном на відстані  $0,017 \text{ мм}$  від нього.

1.76. Відстань від заряду  $q_1$  дорівнює

$x = l / (\pm \sqrt{\frac{q_2}{q_1}})$ . Знак "+" - відповідає одноіменним зарядам, знак "-" - різноіменним.

1.77. а)  $E = 0$ ; б)  $E = \frac{q}{\pi \epsilon_0 a^2} = 128 \text{ В/м;}$   
 $E = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 a^2} = 64 \text{ В/м; } E = 0.$

1.78.  $E_A = 3,84 \cdot 10^{11} \text{ В/м; } E_B = 3,78 \cdot 10^{11} \text{ В/м.}$

1.79. а)  $F = \frac{q_1 q_2}{2\pi \epsilon_0 r l} = 0,7 \text{ нН;}$  б)  $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r(r+l)} = 0,35 \text{ нН.}$

- 1.80.**  $A = \frac{q_1^2}{2\varepsilon_0 S} = 5,1 \text{ мДж.}$
- 1.81.**  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0 r} = 9 \text{ кВ/м.}$
- 1.82.**  $E_{\max} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2} = 20 \text{ кВ/м.}$
- 1.83.**  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}} \right) = 28,2 \text{ В/м.}$
- 1.84.** а)  $A_{AB} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q_1 - q_2}{r} + \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right) = 1,7 \text{ мкДж;}$   
 б)  $A_{CD} = 0$ ; в)  $A_{AB} = 0$ ;  $A_{CD} = 11 \text{ мкДж.}$
- 1.85.** а)  $A = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 a} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \right) = 2,64 \text{ мкДж;}$   
 б)  $A = 0.$
- 1.86.** а)  $\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln R_2 / R_1} = 3,6 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м;}$   
 б)  $\sigma_1 = \frac{\lambda}{2\pi R_1} = 2,9 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2$ ;  $\sigma_2 = 1,44 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2$ ;  
 в)  $E_1 = \sigma_1 / \varepsilon_0 = 33 \text{ кВ/м; } E_2 = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)} = 21,6 \text{ кВ/м; } E_3 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_2} = 16,2 \text{ кВ/м, зовні}$   
 циліндрів  $E = 0.$
- 1.87.**  $a = \frac{eU}{m_e \ln(D/d)} \cdot \frac{1}{r} = 2,3 \cdot 10^{14} \text{ м/с}^2$ ;  
 $v = \sqrt{\frac{2eU \ln(2r/d)}{m_e \ln(D/d)}} = 4,5 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$
- 1.88.** а)  $E = \frac{2U}{l \ln \frac{l-r}{r}} = 4352 \text{ В/м;}$  б)  $E = \frac{Ul}{2R_1 R_2 \ln \frac{l-r}{r}} = 311 \text{ В/м.}$
- 1.89.**  $E = 500 \text{ В/м.}$
- 1.90.**  $10 \text{ В/м; } 17,8 \text{ В/м}$
- 1.91.** Підказка: врахувати роль статичного заряду, який виникає на пір'ї птахів.
- 1.92.** Ні. По лінії напруженості буде направлено тільки прискорення заряду.



## 2. Діелектрики та провідники в електричному полі

- 2.18.  $P = (\varepsilon - 1)D/\varepsilon = 12 \text{ нКл/м}^2$ .
- 2.19. а)  $\rho' = -12a$ ,  $\rho = 18a$ ; б)  $\varepsilon = 3$ .
- 2.20. а) зменшується в  $\varepsilon$  раз; б) не змінюється;  
в) зменшується в  $\varepsilon$  раз.
- 2.21. а)  $E = 50 \text{ В/м}$ ,  $D = 0,88 \text{ нКл/м}^2$ ; б)  $P = 0,44 \text{ нКл/м}^2$ ;  
в)  $\sigma' = \pm 0,44 \text{ нКл/м}^2$ .
- 2.22.  $E_2 = 5,2 \text{ В/м}$ ;  $\alpha_2 = 106^\circ$ ;  $\sigma' = -64 \text{ пКл/м}^2$ .
- 2.23.  $\sigma = 5,3 \text{ мкКл/м}^2$ ;  $\sigma' = 4,4 \text{ мкКл/м}^2$ .
- 2.25.  $\sigma'_{\max} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = 3,5 \text{ нКл/м}^2$ ;  $\sigma' = \sigma'_{\max} / 2 =$   
 $= 1,75 \text{ нКл/м}^2$ .
- 2.26.  $q' = \pi\varepsilon_0(\varepsilon - 1)R^2 E = 15 \text{ пКл}$ .
- 2.27.  $P = 2,39 \text{ нКл/м}^2$ , кут між вектором  $\vec{P}$  і напрямком нормалі до площини пластинки дорівнює  $106^\circ$ .
- 2.28.  $\sigma' = -5,22 \text{ нКл/м}^2$ .
- 2.29.  $|\vec{D}| = 0,468 \text{ нКл/м}^2$ , кут між вектором  $\vec{D}$  і напрямком нормалі до поверхні пластинки дорівнює  $101^\circ$ .
- 2.30.  $|\vec{E}| = 263 \text{ В/м}$ . Кут між вектором  $\vec{E}$  і напрямком нормалі до поверхні пластинки дорівнює  $116,6^\circ$ .
- 2.31.  $\sigma' = -13,34 \text{ нКл/м}^2$ .
- 2.32.  $94^\circ$ .
- 2.33.  $\sigma' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2} |\vec{D}| \cos \alpha = -11,5 \text{ нКл/м}^2$ .
- 2.34.  $|\vec{E}| = 1619 \text{ В/м}$ , кут між вектором  $\vec{E}$  і напрямком нормалі до поверхні пластинки дорівнює  $173^\circ$ .
- 2.35.  $q'_{\text{внутр.}} = -q(\varepsilon - 1)/\varepsilon$ ,  $q'_{\text{зовн.}} = q(\varepsilon - 1)/\varepsilon$ .
- 2.36.  $\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r}$ ;  $q' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q$ .

$$2.37. \quad E = 5,2 \text{ В/м}; \alpha = 74^\circ; \sigma' = 64 \text{ пКл/м}^2.$$

$$2.38. \quad \Phi_E = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \pi R^2 E_0 \cos \alpha = 5,4 \text{ мВм}.$$

$$2.39. \quad \oint_{\Gamma} \vec{D} d\vec{l} = -(\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E_0 l \sin \alpha = -5,3 \text{ пКл/м}.$$

$$2.40. \quad U = \sigma d / (2\varepsilon_0) = 20 \text{ В}.$$

$$2.41. \quad E = \frac{2qh}{4\pi\varepsilon_0(S^2 + h^2)^{3/2}} = 11,4 \text{ кВ/м}.$$

$$2.42. \quad \text{а) } F = \frac{q_1^2 - q_2^2}{4\pi\varepsilon_0(d_1 - d_2)^2} = 1,25 \text{ мН}; \text{ б) Не зміниться.}$$

$$2.43. \quad E = \frac{q\sqrt{26 - 2\sqrt{5}}}{20\pi\varepsilon_0 h^2} = 33,4 \text{ кВ/м}.$$

$$2.44. \quad Q = -q/2.$$

$$2.45. \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{d} + \frac{Q}{R} \right).$$

$$2.46. \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{d} + \frac{Q}{R} \right), \text{ якщо } d > R,$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{R} + \frac{Q}{R} \right), \text{ якщо } d < R.$$

$$2.47. \quad 1) \text{ Ні. } 2) \text{ Зовні ні, всередині буде змінюватись.}$$

$$2.48. \quad q_2 = -\frac{b}{a} q_1,$$

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \begin{cases} \frac{1 - b/a}{r} & \text{при } r \geq b, \\ \frac{1}{r} - \frac{1}{a} & \text{при } a \leq r \leq b, \\ 0 & \text{при } 0 \leq r \leq a. \end{cases}$$

$$2.49. \quad E = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r < R_1, \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{R_1(R_2 - R_3)}{R_2(R_3 - R_1)}, & \text{якщо } R_1 < r < R_2, \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{R_3(R_2 - R_1)}{R_2(R_3 - R_1)}, & \text{якщо } R_2 < r < R_3, \\ 0, & \text{якщо } r > R_3. \end{cases}$$

$$2.51. \quad A = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l} = 2,25 \text{ мДж}.$$

$$2.52. \quad \sigma = -\frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{3/2}}.$$

$$2.53. \quad \text{а) } \sigma = \frac{-q}{2\pi a^2} = -1 \text{ мКл/м}^2;$$

$$\text{б) } \sigma = -\frac{qa}{2\pi r^3} = -0,226 \text{ мКл/м}^2.$$

$$2.54. \quad \vec{E}' = 0, \quad \sigma_1 = \sigma - \varepsilon_0 E_0 = 5 \text{ нКл/м}^2,$$

$$\sigma_2 = \sigma + \varepsilon_0 E_0 = 15 \text{ нКл/м}^2,$$

зліва від пластинки  $E' = E_0 - \sigma/\varepsilon_0 = -564 \text{ В/м}$ ,

справа від пластинки  $E'' = E_0 + \sigma/\varepsilon_0 = 1785 \text{ В/м}$ .

$$2.55. \quad \text{а) } \varphi_A - \varphi_C = \varphi_C - \varphi_D = \varphi_D - \varphi_B = U/3;$$

$$\text{б) не має; в) } E_{AC} = E_{CD} = E_{DB} = U/d.$$

$$2.56. \quad \text{а) } \varphi_A - \varphi_C = \varphi_D - \varphi_B = U/3, \quad \varphi_C - \varphi_D = 0;$$

б) С – заряджена негативно, D – заряджена позитивно, заряди такої ж величини як і на пластинах А і В;

$$\text{в) } E_{AC} = E_{DB} = U/d, \quad E_{CD} = 0.$$

$$2.57. \quad \text{а) } \varphi_A - \varphi_C = \varphi_C - \varphi_D = U/3; \quad \varphi_D - \varphi_B = 0;$$

б) На пластині С заряду не має. На пластині D заряд негативний і за величиною дорівнює заряду на пластині А;

$$\text{в) } E_{AC} = E_{CD} = U/d; \quad E_{DB} = 0.$$

$$2.58. \quad \text{а) } \varphi_A - \varphi_C = \varphi_C - \varphi_D = 0, \quad \varphi_D - \varphi_B = U/3;$$

б) На пластині С заряду не має. На пластині D є позитивний заряд, який за величиною дорівнює заряду на пластині А;

$$\text{в) } E_{AC} = E_{CD} = 0; \quad E_{DB} = U/d.$$

$$2.59. \quad \text{а) } \varphi_A - \varphi_C = \varphi_C - \varphi_D = U/2, \quad \varphi_D - \varphi_B = 0;$$

б) На пластині С заряду не має. Пластина D заряджена негативно і її заряд буде за величиною в 1,5 рази більший від заряду на

пластині В до проведення маніпуляцій між пластинами D і В;

в)  $E_{AC} = E_{CD} = 3U / 2d$ ;  $E_{DB} = 0$ .

**2.60.**

а)  $\varphi_A - \varphi_C = \varphi_D - \varphi_B = U/2 = 45\text{В}$ ;  $\varphi_D - \varphi_B = 0$ ;

б) На пластині С негативний заряд, на пластині D позитивний заряд, які у 3/2 рази більші величини зарядів на пластинах А і В,  $|\sigma_C| = |\sigma_D| = 3\varepsilon_0 U/(2d) \cong 40 \text{ нКл/м}^2$ ;

в)  $E_{AC} = E_{DB} = 3U / (2d) = 4,5 \text{ кВ/м}$ ;  $E_{CD} = 0$ .

**2.61.**

а)  $\varphi_A - \varphi_C = \varphi_D - \varphi_B = U / 6 = 15 \text{ В}$ ,

$\varphi_C - \varphi_D = -U/3 = -30 \text{ В}$ ;

б) На пластині С негативний заряд, на пластині D позитивний заряд.  $|\sigma_C| = |\sigma_D| = \varepsilon_0 U/d \cong 26,6 \text{ нКл/м}^2$

в)  $E_{AC} = E_{DB} = U / 2d = 1500 \text{ В/м}$ ;

$E_{CD} = -U / d = -3000 \text{ В/м}$ .

**2.62.**

Порошинки, які заряджені позитивно, і порошинки, які незаряджені, при всіх умовах будуть рухатись до проводу. Порошинки, які заряджені негативно, будуть рухатись до труби, якщо вони знаходяться далеко від проводу, і до проводу, якщо вони знаходяться ближче до проводу для певної відстані.

**2.63.**

Електроємність провідника має бути більшою від електроємності електроскопа, як мінімум в 19 раз.

**2.65.**

Збільшиться приблизно у два рази.

**2.66.**

Збільшиться приблизно в три рази порівняно з ємністю конденсатора без коробки.

**2.67.**

$$E = \frac{U\varepsilon}{(\varepsilon + 1)h} = 175 \text{ кВ/м}.$$

**2.68.**

$$U = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon h - (\varepsilon - 1)d)}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 69 \text{ В}.$$

**2.69.**

1)  $E_1 = 13,33 \text{ кВ/м}$ ; 2)  $E_1 = 6,66 \text{ кВ/м}$ ;

3)  $D_1 = D_2 = 118 \text{ нКл/м}^2$ ; 4)  $P = 59 \text{ нКл/м}^2$ .

**2.70.**

а) Величина наведених зарядів не зміниться.

б) Величина наведених зарядів збільшиться у 2 рази.

2.71. 1)  $\Delta\sigma = \sigma' = 17,7 \text{ мкКл/м}^2$ ;

2) а)  $\Delta\sigma = 0$ , б)  $\sigma' = 2,53 \text{ мкКл/м}^2$ .

2.72. Збільшиться у 1,5 рази.

2.73. Ємність збільшиться на 200 пФ. Положення листа не впливає на результат в тому випадку, коли лист залишається паралельний обкладкам.

2.74.  $U_1 = \frac{C_2 \mathcal{E}}{C_2 + C_1}, U_2 = \frac{C_1 \mathcal{E}}{C_2 + C_1}$ .

2.75.  $C = 4 \pi \epsilon_0 (R_1 + d) \left( \frac{d}{\epsilon R_1} + \frac{R_2 - R_1 - d}{R_2} \right)^{-1} = 39 \text{ пФ}$ .

2.76. а)  $E_1 = 2\epsilon E_0 / (\epsilon + 1), E_2 = 2E_0 / (\epsilon + 1)$ ,

$D_1 = D_2 = 2\epsilon \epsilon_0 E_0 / (\epsilon + 1)$ ;

б)  $E_1 = E_0, E_2 = E_0 / \epsilon, D_1 = D_2 = \epsilon_0 E_0$ .

2.77. а)  $E_1 = E_2 = E_0, D_1 = \epsilon_0 E_0; D_2 = \epsilon D_1$ ;

б)  $E_1 = E_2 = 2E_0 / (\epsilon + 1), D_1 = 2\epsilon_0 E_0 / (\epsilon + 1)$ ,

$D_2 = \epsilon D_1$ .

2.78.  $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon + 1)r^2}$ .

2.79.  $U = \frac{Ed}{2} \ln \frac{D}{d} = 17,27 \text{ кВ}$ .

2.80. 1. а) Зросте в три рази; б) не зміниться;

в) зросте в три рази; г) зросте в три рази;

2. а) Не зміниться; б) зменшиться в три рази;

в) зменшиться в три рази; г) зменшиться в три рази.

2.82.  $W = \frac{2\pi\epsilon R^3 P^2}{3(\epsilon - 1)^2 \epsilon_0} = 5 \text{ мДж}$ .

- 2.83.  $W = \frac{q^2 d}{8\pi\epsilon_0 \epsilon R(R+d)} = 12 \text{ мкДж.}$
- 2.84. а)  $W_1 = 0,18, \text{ Дж, } W_2 = 0,09 \text{ Дж, } W_3 = 0,06 \text{ Дж;}$   
 б)  $W_1 = 0,605 \text{ Дж, } W_2 = 1,21 \text{ Дж, } W_3 = 1,815 \text{ Дж.}$
- 2.85.  $A = \frac{C_1 C_2 (C_1 - C_2)^2 U^2}{2(C_1 + C_2)^3} = 4,7 \text{ мДж.}$
- 2.86. Довести, що енергія конденсатора витрачається на поляризацію діелектрика.
- 2.88.  $\Delta W = \frac{(1 - \epsilon)\epsilon_0 S U^2}{2d} = -32 \text{ мкДж;}$   
 $A = \frac{(\epsilon - 1)\epsilon_0 S U^2}{2d} = 32 \text{ мкДж.}$
- 2.89.  $\Delta W = \frac{\epsilon(\epsilon - 1)\epsilon_0 S U^2}{2d} = 160 \text{ мкДж;}$   
 $A = \Delta W = 160 \text{ мкДж.}$
- 2.90.  $A = \frac{\epsilon_0 S d_2 U^2}{2(d_1 - d_2)^2} = 12 \text{ мкДж.}$
- 2.91.  $A = \frac{(\epsilon - 1)\epsilon\epsilon_0 d_2 S U^2}{2(d_2 + \epsilon(d_1 - d_2))^2} = 8,9 \text{ мкДж.}$
- 2.92.  $A = \frac{\epsilon_0 S d_2 U^2}{2d_1(d_1 - d_2)} = 8 \text{ мкДж.}$
- 2.93.  $A = |\Delta W| = \frac{(\epsilon - 1)\epsilon_0 S d_2 U^2}{2d_1(d_2 + \epsilon(d_1 - d_2))} = 6,4 \text{ мкДж.}$
- 2.94.  $A = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} (U_1 + U_2)^2 = 8,4 \text{ мДж.}$
- 2.95. а)  $\Delta W = \frac{C U^2}{2n(n-1)} = 0,04 \text{ Дж;}$   
 б)  $A_1 = \Delta W ; \text{ в) } A_2 = 2\Delta W = 0,08 \text{ Дж.}$

- 2.96.  $A = \frac{cU^2(\epsilon-1)^2}{2\epsilon(\epsilon+1)} = 67,5 \text{ мкДж.}$
- 2.97. Розійдуться на відстань  $r_1 = r/\sqrt[3]{4} \approx 2,52 \text{ см.}$
- 2.98.  $l = 0,39 \text{ Å}; E_1 = \frac{erl}{2\pi\epsilon_0\left(r+\frac{l}{2}\right)^2\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} = 4,16 \cdot 10^6 \text{ В/м;}$   
 $E_2 \cong \frac{el}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 2,08 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$
- 2.199. а)  $D_0 = \text{const}, E = E_0/2$ ; б)  $D = \epsilon D_0, E = E_0$ .
- 2.100. а)  $q = \sqrt{2\epsilon\epsilon_0 SF} = 163 \text{ нКл;}$   
 б)  $D = q/S = \sigma = 5,43 \text{ мкКл/м}^2$ .
- 2.101. а)  $E = 112 \text{ кВ/м;}$  б)  $E = -75 \text{ кВ/м.}$
- 2.102. а)  $E = 0$ ; б)  $E = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{d}{2} - b\right) = 3,22 \cdot 10^5 \text{ В/м;}$   
 в)  $E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \cong 6,78 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$
- 2.103.  $\Delta\varphi = \frac{\rho d^2}{8\epsilon\epsilon_0} = 21,2 \text{ В.}$
- 2.104.  $F = p \left| \frac{\partial E}{\partial x} \right| = \frac{pe}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^3} - \frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^3} \right) = 34 \text{ пН.}$
- 2.105.  $M_A = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 4,4 \cdot 10^{-23} \text{ Н} \cdot \text{м;}$   
 $M_B = \frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} = 8,8 \cdot 10^{-23} \text{ Н} \cdot \text{м.}$
- 2.106.  $F = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 r^2} = 14,4 \text{ мкКл.}$
- 2.107.  $F = \frac{\epsilon\epsilon_0 S U^2}{2d^2} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$
- 2.108.  $C = \frac{2\epsilon\epsilon_0 S}{d} = 1,06 \text{ нФ.}$
- 2.109.  $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 D^2}{4d} \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 408 \text{ пФ.}$
- 2.110.  $q = 2\pi(\epsilon + 1\epsilon_0)RU = 10 \text{ нКл.}$
- 2.111.  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 R(l-R)}{l-2R} = 0,584 \text{ пФ.}$
- 2.112. а)  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 R(2l-R)}{l-R} = 1,139 \text{ пФ;}$   
 б)  $C_0 = 4\pi\epsilon_0 R = 1,113 \text{ пФ; } \frac{C}{C_0} = 1,023$ .
- 2.113.  $U_6 = 7U = 2800 \text{ В.}$
- 2.114. Буде пробита.
- 2.115.  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 S}{2\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} = 210 \text{ пФ.}$

- 2.116.  $C = \frac{\pi \epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{l}{R-1}\right)} = 7,15 \text{ нФ.}$
- 2.117.  $C = \frac{\pi \epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{2l}{R-1}\right)} = 6,05 \text{ нФ, зменшиться у } 1,18 \text{ рази.}$
- 2.118. Якщо при замиканні ключа К відбувається перетікання зарядів, то енергія системи зменшується. Це означає, що ємність системи збільшується. Якщо перетікання зарядів відсутнє, то ємність системи не змінюється.
- 2.120.  $\omega = \frac{2q^2}{\pi^2 \epsilon_0 r^4} = 7,4 \cdot 10^{13} \text{ Дж/м}^3.$
- 2.121. а)  $\omega = 0$ ; б)  $\omega = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r_2^4} = 0,353 \text{ Дж/м}^3.$
- 2.122. 1)  $E_1 = 57,5 \text{ кВ/м;}$   
2)  $E_2 = 4E_1/9 = 25,6 \text{ кВ/м.}$
- 2.123.  $\sigma_1 = 8,0 \text{ нКл/м}^2$ ,  $E_1 = 90 \text{ В/см;}$   
 $\sigma_2 = 0,4 \text{ нКл/м}^2$ ,  $E_2 = 450 \text{ В/см.}$
- 2.124.  $\varphi = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \varphi_0 = 9 \text{ В.}$
- 2.125.  $\varphi = \frac{R_1}{R_2} \varphi_0 = 10 \text{ В.}$
- 2.126.  $W_2 = 20 \text{ мДж; } W = 120 \text{ мДж.}$

### 3. Закони постійного струму

- 3.11.  $v = MI/(N_A \rho S e) = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ м/с, } M - \text{молекулярна}$   
 $\text{маса міді, } \rho - \text{густина міді.}$
- 3.12.  $v = 10,4 \cdot 10^{-7} \text{ м/с.}$
- 3.13.  $t = \frac{e \rho N_A S l}{IM} = 3 \cdot 10^6 \text{ с} = 34,5 \text{ доби, де } \rho - \text{густина міді,}$   
 $M - \text{молекулярна маса міді, } e - \text{заряд електрона.}$
- 3.14. а) 15 Кл; б) 0,26 Кл.
- 3.15.  $440 \text{ А/мм}^2.$
- 3.16.  $1910 \text{ мкА/мм}^2$ ;  $3,82 \text{ мкА/мм}^2.$
- 3.17. У місцях з вузьким перерізом напруженість електричного поля більша.
- 3.18.  $q = \epsilon_0 I (\rho_2 - \rho_1) = 8 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 5 |e|.$
- 3.19.  $U_1 = 72/11 \text{ В; } U_2 = 36/11 \text{ В; } U_3 = 24/11 \text{ В.}$
- 3.20. 53,9 Ом.



$$3.21. \quad R = \frac{\rho}{2\pi d} = 160 \text{ Ом.}$$

$$3.22. \quad 1,31 \text{ Ом.}$$

$$3.23. \quad R = R_q \frac{n-1}{n} = 261 \text{ Ом.}$$

$$3.24. \quad 1000 \text{ В.}$$

$$3.25. \quad \text{а) } \delta = \frac{IR_A}{U - IR_A} = 0,1 \%; \text{ б) } 11 \%$$

$$3.26. \quad \text{а) } \delta = -\frac{U}{IR_V} = -0,3 \%; \text{ б) } -30 \%.$$

$$3.27. \quad R = \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2 - U_1}{I_1} = 25,58 \text{ Ом.}$$

$$3.28. \quad x = \frac{2Ll_1}{l} = 6,4 \text{ км.}$$

$$3.29. \quad I = \frac{UR_1}{R(R_2 + R_1) + R_2R_1} = 1,2 \text{ мА.}$$

$$3.30. \quad \text{а) } U_1 = 108 \text{ В; } U_2 = 72 \text{ В;}$$

$$\text{б) } U_1 = \frac{R_1(R_3 + 2R_2)U}{(R_2 + R_1)R_3 + 4R_1R_2} = 99 \text{ В, } U_2 = 81 \text{ В;}$$

$$\text{в) } R'_3 = 4 \text{ кОм, } R''_3 = 6 \text{ кОм.}$$

$$3.31. \quad U_1 = U \frac{xrl}{Rlx + rl^2 - Rx^2};$$

$$\text{а) } U_1 = 0; \text{ б) } U_1 = U;$$

$$\text{в) } U_1 = \frac{2rU}{R + 4r} < \frac{U}{2};$$

$$\text{г) } U_1 \approx \frac{U}{l}x; \text{ д) } U_1 \approx \frac{Url}{R(l-x)}.$$

$$\text{Якщо } x < l, \text{ то } U_1 \approx 0. \text{ Якщо } x = l, \text{ то } U_1 \approx U.$$

$$3.32. \quad U = \mathcal{E}/(n+1) = 2 \text{ В.}$$

- 3.33.  $t_2 = \frac{R_2(1 + \alpha t_1) - R_1}{\alpha R_1} = 49^\circ\text{C}.$
- 3.34.  $\alpha = \frac{\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2}{R_1 + R_2} = 0,0053 \text{ град}^{-1}.$
- 3.35.  $\frac{l_{Fe}}{l_C} = -\frac{\rho_C \alpha_C}{\rho_{Fe} \alpha_{Fe}} = 5,3.$
- 3.36.  $\mathcal{E} = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1}{I_1 + I_2} = 4,1 \text{ В}; r = \frac{U_1 - \mathcal{E}}{I_1} = 0,05 \text{ Ом}.$
- 3.37.  $q = \varepsilon \varepsilon_0 \rho I = 0,18 \text{ нКл}.$
- 3.38.  $U = \frac{\mathcal{E}(r_1 - r_2)}{r_1 + r_2} = 0,75 \text{ В}.$
- 3.39.  $\mathcal{E} = 36 \text{ В}.$
- 3.40.  $U = \frac{\mathcal{E}R}{2R + r}; \text{ а) } U = 2,93 \text{ В}; \text{ б) } U = 2,4 \text{ В}.$
- 3.41.  $U = \frac{r_1(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) - (r_2 + r_3)\mathcal{E}_1}{r_1 + r_2 + r_3} = 0,2 \text{ В}.$
- 3.42.  $I_1 = 100/63 \text{ А}; I_2 = 230/63 \text{ А}.$
- 3.43.  $I_1 = \frac{1}{3} \text{ А}; I_2 = \frac{2}{3} \text{ А}; I_3 = 1 \text{ А}.$
- 3.44. а)  $U_1 = 7/26 \text{ В}, U_2 = 33/26 \text{ В}, U_3 = 58/26 \text{ В};$   
б)  $U = 19/26 \text{ В}.$
- 3.45.  $I_1 = 1,5 \text{ А}; I_2 = 2,5 \text{ А}; I_3 = 4 \text{ А}.$
- 3.46.  $n_2 = \sqrt{\frac{NR}{r}} = 200; n_1 = \frac{N}{n_2} = 2;$   
 $I = \frac{\mathcal{E}n_2}{R + r \frac{n_2^2}{N}} = 20 \text{ А}; I_1 = \frac{I}{2} = \frac{\mathcal{E}}{2r} = 10 \text{ А}.$
- 3.47.  $\mathcal{E}_x = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)R_3}{R_1 + R_2} = 1,5 \text{ В}.$

- 3.48.  $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2} = 6 \text{ В.}$
- 3.49.  $I = 10 \text{ мА.}$
- 3.50.  $\mathcal{E}_2(R + R_1) = \mathcal{E}_1 R.$
- 3.51.  $U_2 = 3 \text{ В, } I_3 = 1 \text{ А.}$
- 3.52.  $R_2 = 3 \text{ Ом, } R_1 \text{ і } R_4 - \text{любі.}$
- 3.53.  $I = \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3) + \mathcal{E}_0 R_3}{R_2 R_3 + R(R_2 + R_3)} = \frac{5}{23} \text{ А.}$
- 3.54.  $\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + \frac{R_2(R_3 \mathcal{E}_1 - R_1 \mathcal{E}_2)}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3} = -1 \text{ В.}$
- 3.55.  $I_2 = 0,1 \text{ А.}$
- 3.56. а)  $U_2 = \frac{11}{8} U_1 = 3,3 \text{ В, б) } U_3 = \frac{9}{8} U_1 = 2,7 \text{ В,}$   
 в)  $U_4 = \frac{10}{8} U_1 = 3 \text{ В.}$
- 3.57.  $\mathcal{E} = \frac{r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1}{r_1 + r_2} = 6,5 \text{ В, } r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0,21 \text{ Ом.}$
- 3.58. а)  $\varphi_A - \varphi_B = \frac{132}{121} \text{ В; б) } \varphi_C - \varphi_B = -\frac{100}{121} \text{ В;}$   
 в)  $\varphi_C - \varphi_D = \frac{548}{121} \text{ В.}$
- 3.59.  $\varphi_1 - \varphi_2 = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) R_1 / (R_1 + R_2) - \mathcal{E}_1 = -4 \text{ В.}$
- 3.60.  $R = r_2 - r_1 = 0,4 \text{ Ом, } \Delta\varphi = 0 \text{ на клеммах джерела}$   
 із внутрішнім опором  $r_2$ .
- 3.61.  $\varphi_A - \varphi_B = \frac{R_1(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{R_1 + R_2} = 1 \text{ В.}$
- 3.62. а)  $\varphi_A - \varphi_B = \frac{326}{17} \text{ В; б) } \varphi_C - \varphi_D = -\frac{268}{17} \text{ В;}$   
 в)  $\varphi_K - \varphi_L = \frac{368}{17} \text{ В.}$
- 3.63.  $I_1 = 0,4 \text{ мА; } I_2 = 0,7 \text{ мА; } I_3 = 1,1 \text{ мА; } I_4 = 0.$
- 3.64.  $t = -RC \ln(1 - U/U_0) = 0,6 \text{ мкс.}$

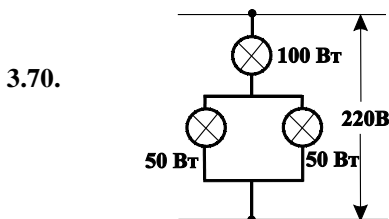
$$3.65. \quad \rho = \tau / (\varepsilon \varepsilon_0 \ln 2) = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

$$3.66. \quad P = \frac{(U - \varepsilon)^2}{r} = 4 \text{ Вт}.$$

$$3.67. \quad P = \frac{(U + \varepsilon)^2}{r} = 36 \text{ Вт}.$$

$$3.68. \quad D_{\min} = \sqrt{\frac{8l\rho P}{\pi n U^2}} \approx 3 \text{ см}.$$

$$3.69. \quad S = \frac{2l\rho P}{nU^2} = 8,1 \text{ мм}^2; \quad D = 0,32 \text{ см}.$$



$$3.71. \quad \text{a) } I = \frac{n\varepsilon \pm \sqrt{n^2 \varepsilon^2 - 4nrP}}{2n\varepsilon}; \quad I_1 = 8/3 \text{ А}; \quad I_2 = 2 \text{ А};$$

$$\text{б) } P_{\max} = n\varepsilon^2 / (4r) = 49/6 \text{ Вт}.$$

$$3.72. \quad 23,33 \text{ Ом}.$$

$$3.73. \quad Q = \frac{R\tau}{3} (I_1^2 + I_2^2 + I_1 I_2) = 24800 \text{ Дж}.$$

$$3.74. \quad \text{a) } A = Q = IUt = +2 \text{ Дж};$$

$$\text{б) } A = (\varphi_1 - \varphi_2)It = +2 \text{ Дж};$$

$$Q = I(\varphi_1 - \varphi_2 - \varepsilon)t = +0,7 \text{ Дж};$$

$$\text{в) } A = (\varphi_1 - \varphi_2)It = -2 \text{ Дж};$$

$$Q = I^2 r t = +0,6 \text{ Дж}.$$

$$3.75. \quad \text{a) } Q = q^2 R / \tau = 225 \text{ Дж}.$$

$$\text{б) } Q = 4q^2 R / (3\tau) = 300 \text{ Дж}.$$

$$\text{в) } Q = \frac{q^2 R \ln 2}{2\tau} = 78 \text{ Дж}.$$

$$3.77. \quad I_1 = \frac{1}{3} \text{ А}; \quad I_2 = \frac{2}{3} \text{ А}; \quad I_3 = 1 \text{ А}.$$

- 3.78.  $R_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 24 \text{ Ом.}$
- 3.79.  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 12 \text{ Ом;}$   
 $P_{\max} = \frac{(\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1)^2}{4 R_1 R_2 (R_1 + R_2)} = \text{Вт.}$
- 3.80.  $n = \sqrt{N r / R} = 2.$
- 3.81.  $Q = \frac{C \varepsilon^2 R_1}{2(R_1 + R_2)} = 150 \text{ мДж.}$
- 3.82. а)  $\Delta q = C U \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{\tau}{RC} \right\} \right) = 0,18 \text{ мКл;}$   
б)  $Q = \frac{C U^2}{2} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{\tau}{RC} \right\} \right) = 82 \text{ мДж.}$
- 3.83. а)  $A_1 = C U^2 / 4 = 63 \text{ мкДж;}$   
б)  $A_2 = -C U^2 / 2 = -125 \text{ мкДж.}$
- 3.84. а)  $A_1 = \frac{1}{2} C U^2 (\varepsilon - 1) / (2\varepsilon + 1) = 36 \text{ мкДж;}$   
б)  $A_2 = -C U^2 (\varepsilon - 1) / (2\varepsilon + 1) = -72 \text{ мкДж.}$
- 3.85.  $t = RC \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon - U} = 0,046 \text{ с.}$
- 3.86.  $R_0 = R / 4.$
- 3.87.  $R = R_0 / n^2.$
- 3.88.  $R = R_0 \cdot n^2.$
- 3.90.  $I = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) a v U}{d} \approx 0,13 \text{ мкА.}$
- 3.91.  $E \approx 0,1 \text{ В/м.}$
- 3.92.  $1,25 \text{ Ом}$
- 3.93.  $r_0 = 0,5 \text{ Ом; } \varepsilon_0 = 3,75 \text{ В.}$
- 3.94.  $1,5 \text{ А; } 0,5 \text{ А; } 1,0 \text{ А.}$
- 3.95.  $P = \frac{C U^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \rho} \approx 3,4 \text{ мВт.}$
- 3.96.  $20 \text{ А.}$
- 3.97. Вуглецева.
- 3.98.  $R = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} r_1 - r_2 = 0,1 \text{ Ом.}$

#### 4. Постійне магнітне поле

- 4.12. а)  $B_2 > B_1$ ; б)  $B_2 > B_1$ , в)  $\sin \alpha = \sqrt{3}/3$ ;  $\alpha = 35,3^\circ.$

- 4.13.**  $\frac{F_m}{F_e} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = (v/c)^2 = 1 \cdot 10^{-6}.$
- 4.14.** а) Нi; б) Так,  $\vec{j} = 0$ ; в) Так,  $\vec{j} = -a(\vec{i} + \vec{k}).$
- 4.15.** а)  $2\mu_0 I$ ; б) 0; в) 0; г)  $2\mu_0 I$ ; д)  $\mu_0 I.$
- 4.16.** а)  $B = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi R} = 5,2 \text{ мкТл};$
- б)  $B = \frac{\mu_0 I}{4R} = 15,7 \text{ мкТл};$
- в)  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left( \frac{\alpha}{2} + 1 \right) = 15 \text{ мкТл};$
- г)  $B = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi R} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 \text{ мкТл};$
- д)  $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( 1 + \frac{1}{\pi} \right) = 41 \text{ мкТл};$
- е)  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = 5 \text{ мкТл};$
- ж)  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right) = 0,6 \text{ мкТл};$
- з)  $B = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{5}\pi R} = 2,2 \text{ мкТл};$
- и)  $B = \frac{\mu_0 I \text{ctg} 14^\circ}{2\pi R} = 40 \text{ мкТл};$
- і)  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \text{tg} 14^\circ = 2,5 \text{ мкТл};$
- ї)  $B = \frac{\mu_0 I}{\pi R} \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{8} \right) = 0,67 \text{ мкТл}.$
- 4.17.** а)  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{2\pi - \varphi}{a} + \frac{\varphi}{b} \right) = 69 \text{ мкТл};$

- б)  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{3\pi}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b} \right) = 77 \text{ мкТл.}$
- 4.18. а)  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left( 1 + \frac{3\pi}{2} \right);$  б)  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (2 + \pi).$
- 4.19.  $B = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l} = 2 \text{ мкТл.}$
- 4.20.  $B = 0.$
- 4.21.  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (1 + \cos \alpha),$  де  $r$  – відстань від точки А;  
напрямок  $\vec{B}$  перпендикулярний до провідника 1.
- 4.22.  $B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a} = 18 \text{ мкТл.}$
- 4.23.  $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} = 34 \text{ мкТл.}$
- 4.24. Перпендикулярно до площини контуру:  
в точці А – до читача, в точці В – від читача.
- 4.25.  $B = \frac{\mu_0 I}{\pi R} \left( \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a} + \arcsin \frac{a}{R} \right) = 41,3 \text{ мкТл.}$
- 4.26. а)  $B = \frac{\mu_0 I c}{\pi a b} = 17 \text{ мкТл,}$   
б)  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left( 2\sqrt{\frac{a+c}{2c}} + 2\sqrt{\frac{b+c}{2c}} + \sqrt{2} \right) = 51 \text{ мкТл,}$   
де  $r = \frac{a+b-c}{2}, c = \sqrt{a^2 + b^2}.$
- 4.27.  $B = n\mu_0 I \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) / (2\pi R).$  При  $n \rightarrow \infty$   $B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$
- 4.28.  $B = 4\mu_0 I / (\pi d \sin \varphi) = 0,1 \text{ мТл.}$
- 4.29.  $B = (\pi - \varphi + \operatorname{tg}\varphi)\mu_0 I / (2\pi R) = 28 \text{ мкТл.}$
- 4.30.  $B = \frac{\mu_0 I N}{2(R_1 - R_2)} \ln \frac{R_1}{R_2} = 0,072 \text{ Тл.}$

4.31. а)  $B = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{1 + \eta^2}} = 0,61 \text{ мТл},$

б)  $B = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{4 + \eta^2}} = 0,562 \text{ мТл}.$

4.32. а) 8,8 мТл; б) 4,4 мТл.

4.33.  $\eta \cong \frac{N}{\pi} = 796.$

4.34.  $B \cong \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 R} \cdot \frac{h}{r},$  де  $r$  – відстань від прорізі.

4.35.  $B = 0$  при  $r < R$ ;  
 $B = \mu_0 I / (2\pi r)$  при  
 $r > R$ . Див.рис.4.1.

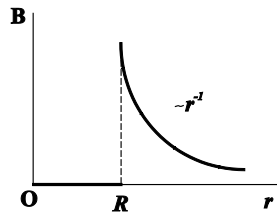


Рис.4.1.

4.36.  $B = \mu_0 j r / 2$  при  
 $r < R$ ;  $= \mu_0 j R^2 / (2r)$  при  
 $r > R$ . Див. рис.4.2.

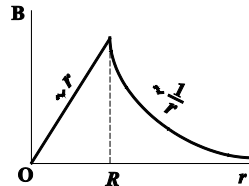


Рис.4.2.

4.37.  $B_{max} = \varepsilon_0 \mu_0 E v = 0,33 \text{ нТл}.$

4.38. а)  $F = \mu_0 I^2 l / (2\pi r) = 120 \text{ Н}$ ; б) Ні.

4.39.  $\vec{F}_{12} = I(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{B}; \quad |\vec{F}_{12}| = I|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|B; \quad \text{для}$   
замкнутого контуру  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$  і  $\vec{F} = 0$ .

4.40.  $p_m = \frac{2\pi}{\mu_0} B R^3 = 30 \text{ мАм}^2.$

4.41. а)  $F = 2\mu_0 I I_0 / (\pi(4\eta^2 - 1)) = 0,4 \text{ мкН};$



$$б) A = \frac{\mu_0 a I I_0}{\pi} \ln \frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} = 0,1 \text{ мкДж.}$$

$$4.42. \quad F = \frac{3}{2} \mu_0 \pi (N I r^2 / l^2)^2 = 0,05 \text{ мкН.}$$

$$4.43. \quad а) F = 0; \quad б) F = \frac{\mu_0 I p_m}{2\pi r^2} \quad \vec{F} \uparrow \downarrow \vec{r};$$

$$в) F = \frac{\mu_0 I p_m}{2\pi r^2}, \quad \vec{F} \uparrow \downarrow \vec{B}.$$

$$4.44. \quad F = \frac{3\mu_0 I R^2 x}{2(x^2 + R^2)^{5/2}}.$$

$$4.45. \quad а) W = -\frac{\mu_0 p_{m1} p_{m2}}{2\pi l^3};$$

$$F = -\frac{3\mu_0 p_{m1} p_{m2}}{2\pi l^4} - \text{сила притягання};$$

$$б) W = \frac{\mu_0 p_{m1} p_{m2}}{2\pi l^3};$$

$$F = \frac{3\mu_0 p_{m1} p_{m2}}{2\pi l^4} - \text{сила відштовхування}.$$

$$4.46. \quad F = 9 \text{ нН.}$$

4.47. Якщо провід, яким протікає струм  $I_3$ , розташований посередині, то розв'язку задача не має. Якщо цей провід розташований з краю, то пряма лінія, на якій індукція магнітного поля, що створюється струмами, дорівнює нулю, знаходиться на відстані  $\frac{2a}{3} = 2\text{см}$  від проводу зі струмом  $I_1$  між проводами зі струмами  $I_1$  і  $I_2$ .

$$4.48. \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\frac{I_1^2}{b^2} + \frac{I_2^2 + I_1 I_2}{a^2}} = 52 \text{ мкТл.}$$

$$4.49. \quad \Phi = \frac{\mu_0 I l \ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} = 0,55 \text{ мВб.}$$

$$4.50. \quad 346 \text{ мкТл}; 116 \text{ мкТл.}$$

$$4.51. \quad A = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi} \ln 2 = 31 \text{ мкДж.}$$

## 5. Магнітне поле в речовині

$$5.9. \quad B \text{ збільшиться в } \mu \text{ раз. } H \text{ не зміниться.}$$

$$5.10. \quad B_0 = 1,36 \text{ Тл}; J_0 = 1,08 \cdot 10^6 \text{ А/м.}$$

$$5.11. \quad B = 0,7 \text{ Тл}, H = 50 \text{ А/м}, \mu \approx 11000 \text{ відн.од.}$$

$$5.13. \quad H_c = NI/l = 6000 \text{ А/м.}$$

- 5.14. 1,25 Тл, 3979 від. од.
- 5.15. 0,64 Вб.
- 5.16. 1 виток/см.
- 5.17. 2340 Ампер·витків.
- 5.18. 1,4 Тл; 2230 відн. од.
- 5.19. 1194 А.
- 5.20.  $NI = 6000$  А·витків.
- 5.21.  $I_2 = 13,5$  А.
- 5.22. 4,1 А.
- 5.23. 0,75 мм.
- 5.24. 2,22 мм.
- 5.25. 2345 відн. од.
- 5.26. 2,35 мВб.
- 5.27. 1,7 мВб.
- 5.28.  $\mu = \pi D(\Phi_1 - \Phi_2)/(l_2 \Phi_2 - l_1 \Phi_1) + 1 = 314$ .
- 5.29.  $B_{осер.} = -B = -0,04$  Тл,  $H_{осер} = 31,8$  А/м,  
 $J = -3,19 \cdot 10^4$  А/м.
- 5.30.  $\Phi_B = 0$ ,  $\Phi_H = (B/\mu_0 - H)S = 99,45$  А·м,  
де  $H = 250$  А/м.
- 5.31.  $\mu = \pi d B / (\mu_0 NI - bB) = 3700$ .
- 5.32.  $\mu = 3840$ .
- 5.33. 12 Гн; 3 Гн.
- 5.34. 50 Дж/м<sup>2</sup>.
- 5.35. Збільшилась у 15 раз.
- 5.36. 1,5 Дж.
- 5.37. 1,66 Дж.
- 5.38. 0,5 Дж.
- 5.39. 3.
- 5.40. 4,63 Гн; 0,21 Дж.
- 5.41. 51 А/м, 255 мДж/м<sup>3</sup>.
- 5.42. а)  $\omega_2 = \omega_1/4$ ; б)  $\omega_2 = 4\omega_1$ .
- 5.43. В 4 рази.
- 5.44. а) і б) зменшиться в 4 рази.
- 5.45.  $Q = \frac{RL\varepsilon^2}{2R_0^2(R + R_0)} = 6$  мкДж.

- 5.46. а)  $H_1 = 800 \text{ А/м}$ ,  $B_1 = 1,475 \text{ Тл}$ ;  
 б)  $H_2 = 698 \text{ А/м}$ ,  $B_2 = 1,460 \text{ Тл}$ .
- 5.48.  $t = 0,01 \text{ с}$ .

## 6. Електромагнітна індукція

- 6.10. 2 В.
- 6.11. 0,3 Тл.
- 6.12. 16 В.
- 6.13.  $\mathcal{E}_{im} = 2\pi fBSN = 62,8 \text{ В}$ .
- 6.14. 600 об/хв.
- 6.15. 1 В.
- 6.16. 1 Н
- 6.17. У всіх випадках 1 мВ.
- 6.18. Буде, так як непрямолінійний шлях повинен бути нахиленим до горизонту.
- 6.19. Ні, так як поле навколо рамки неоднорідне.
- 6.20. 10 Вт.
- 6.21.  $U = \pi Bfl(l - 2l_1) = 5,3 \text{ мВ}$ .
- 6.22. 1) 0,3 В; 2) 3 Н; 3) 10 А; 4) 3 Вт; 5) 2 Вт; 6) 5 Вт.
- 6.23. 0,2 В.
- 6.24. 0,118 В.
- 6.25.  $I = \frac{\mu_0 n S d}{4\rho} \cdot \frac{dI}{dt} = 0,2 \text{ А}$ , де  $\rho$  – питомий опір міді.
- 6.26.  $E_m = \frac{kB_0 R}{2} = 10 \text{ мВ/м}$ .
- 6.27.  $\mathcal{E}_i = By\sqrt{\frac{8a}{b}}$ .
- 6.28.  $I = Blv / (R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}) = 50 \text{ мА}$ .
- 6.29. 0,01 Кл.
- 6.30. 3,14 мкКл.
- 6.31. 0,3 мВб.
- 6.32. 1,5 Тл.

- 6.33. 1) 6,7 мКл; 2) 18 мКл; 3) 25 мКл.
- 6.34.  $q = \frac{Bm}{16\rho d} = 41,3 \text{ мКл}$ , де  $\rho$  – питомий опір,  
 $d$  – густина міді.
- 6.35. 63 пКл.
- 6.36.  $I = 2\pi Rq / (\mu_0 (a_2 - a_1) \ln \frac{a_2}{a_1}) = 10 \text{ А}$ .
- 6.37.  $q = (Ba^2 / R) / (4 / \pi - 1) = 0,274 \text{ мКл}$ .
- 6.38.  $H = qR / (2\mu_0 NS) = 400 \text{ кА/м}$ .
- 6.39. а) однакова; б) в першому випадку більша.
- 6.40.  $q = \frac{\varepsilon L}{rR} = 6 \text{ мКл}$ .
- 6.41. 995 відн. од.
- 6.42.  $Q = \frac{\mu_0 S^2 \varepsilon}{4\pi \rho^2 l} = 0,0156 \text{ Кл}$ .
- 6.43. 1 мВ.
- 6.44. 4 В.
- 6.45.  $\Delta q = \frac{LIR_2}{R_1(R_1 + R_2)} = 10 \text{ мКл}$ .
- 6.46. 900 витків.
- 6.47.  $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d - R}{R} = 2,4 \text{ мГн}$ .
- 6.48. 3 мГн.
- 6.49. 30 В.
- 6.50. 20 мГн.
- 6.51.  $L_{12} = qR/I = 5 \text{ нГн}$ .
- 6.52.  $Q = \frac{a^2 t_0^3}{3R} = 0,144 \text{ Дж}$ .
- 6.53.  $I = \varepsilon t / L = 3t$ , де  $t$  – час, що відраховується від моменту включення. Коли струм значно зросте, навіть малий омичний опір кола буде грати принципіальну роль. Внаслідок наявності опору наростання струму сповільниться, а потім припиниться.
- 6.54.  $L_{12} = QR_1 R_2 / \varepsilon = 0,5 \text{ Гн}$ .

- 6.55.  $\Phi = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 I_1}{l_2} = 50 \text{ мкВб.}$
- 6.56.  $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2} = 0,6 \text{ Гн.}$
- 6.57.  $L_{12} = (\mu_0 \pi R_2^2 / 2 R_1) \cos \alpha.$
- 6.58. а)  $L = L_1 + L_2 + 2 L_{12};$  б)  $L = L_1 + L_2 - 2 L_{12};$   
в)  $L = L_1 + L_2.$
- 6.59.  $L_{12} = (\mu_0 / 4\pi)(2 \pi^2 R_1^2 R_2^2 / l^3).$
- 6.60. а)  $B = 4\rho q / (Sd) = 0,714 \text{ Тл,}$  де  $q$  – кількість заряду, яка протекла через дросель за час 0,525 с,  $\rho$  – питомий опір міді; б)  $\mu = 427 \text{ відн. од.}$
- 6.61. а)  $n_{\text{Cu}} = \frac{2\rho_{\text{Cu}} I_{\text{max}}}{\pi a B S} = 1 \text{ об/с;}$   
б)  $n_{\text{Al}} = n_{\text{Cu}} \frac{\rho_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Cu}}} = 1,625 \text{ об/с.}$
- 4.62.  $E = \frac{B_0 R}{\tau} = 5 \text{ мВ.}$
- 4.63.  $B_{\text{max}} = \pi \epsilon_0 \mu_0 r v E_0 = 1,54 \text{ пТл.}$
- 6.64. а)  $L = L_1 + L_2 + \sqrt{L_1 L_2} = 0,25 \text{ Гн;}$   
б)  $N = N_1 \sqrt{\frac{L}{L_1}} = 250 \text{ витків.}$
- 6.65.  $\Delta W = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi} \ln 2 = 31 \text{ мкДж.}$
- 6.66.  $B = \frac{8\rho q}{\pi r d^2} = 11 \text{ мТл.}$
- 6.67.  $E = \frac{a r^2}{2b} = 12,5 \cdot 10^{-5} \text{ В/м.}$
- 6.68.  $E(x) = \frac{\pi \mu_0 v N_1 I_0}{l_1} \cdot x \cdot \cos(2\pi v t) = 2x \cos(2\pi v t) \text{ В/м,}$  де  $x$  – відстань від осі соленоїда;  $U_{\text{max}} = 4\pi r_1 r_2 N_2 \cdot B = 126 \text{ мВ.}$

## 7. Гармонічні коливання

- 7.7. 6,28 см/с; 19,7 см/с<sup>2</sup>.
- 7.8. 4 с, 3,14 см/с, 4,93 см/с<sup>2</sup>.
- 7.9.  $t_1 = 0,6 \text{ с, } 12 \text{ с, } 18 \text{ с, ...; } t_2 = 3 \text{ с, } 9 \text{ с, } 15 \text{ с, } 21 \text{ с, ...}$
- 7.10. 13,6 см/с.
- 7.11.  $x = 5 \sin(\pi t + \pi/6) \text{ см.}$
- 7.12. 3,1 см; 4,1 с.

7.13  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -29 \text{ см}, v_x = -81 \text{ см/с}, \text{ де}$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_{x0}/\omega_0)^2}, \varphi_0 = \arctg(-v_{x0}/(\omega_0 x_0)) = -\pi/4.$$

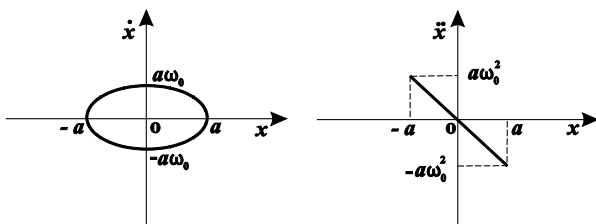
7.14 а)  $t_1 = T/12$ ; б)  $t_2 = T/6$ .

7.15. а)  $\langle v \rangle = 0,40 \text{ м/с}$ ; б)  $\langle v \rangle = 0,57 \text{ м/с}$ ; в)  $\langle v \rangle = 0,23 \text{ м/с}$ .

7.16. Через 1 с.

7.17.  $t = T/6$ .

7.18.



$$\dot{x}(x) = \pm \omega_0 \sqrt{a^2 - x^2}; \quad \ddot{x}(x) = -a\omega_0^2 x.$$

7.19.  $A = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_0)^2} = 0,9$ ;  $\varphi_0 = 0,233\pi$ .

7.20. В першому в 1,11 рази швидше.

7.21. а)  $\langle v \rangle = 3A/T_0 = 0,5 \text{ м/с}$ ; б)  $\langle v \rangle = 6A/T_0 = 1,0 \text{ м/с}$ .

7.22. 0,6 м.

7.23. Період зменшиться в 1,8 рази.

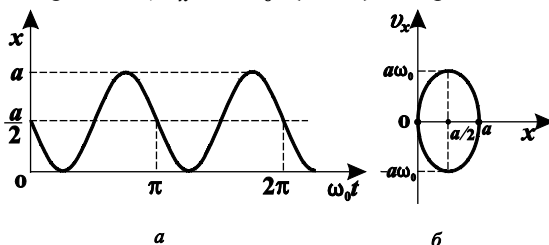
7.24.  $k = (m/2)\omega_0^2 \approx 2,3 \text{ кН/м}$ .

7.25. 2,5 Гц.

7.26.  $F = 2\pi^2 f^2 m a = 31,6 \text{ Н}$ .

7.27. а)  $T_0 = 0,2 \text{ с}, A = 0,01 \text{ м}$ , б)  $x = 0,01 (1 - \cos 10\pi t) \text{ м}$ .

7.29. а) Амплітуда дорівнює  $a/2$ , період  $T_0 = \pi/\omega_0$ , див. рис.а; б)  $v_x^2 = 4\omega_0^2 x(a-x)$  див. рис.б.

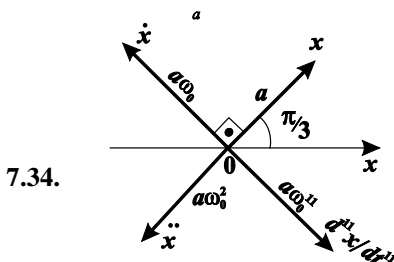
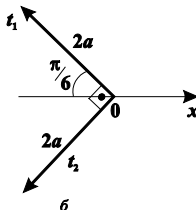
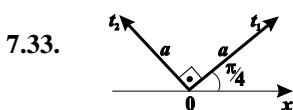


7.30. а)  $T = 2T_0$ ; б)  $a = 3g$ .

7.31.  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho g S}} = 1 \text{ с}$ , де  $\rho$  – густина ртуті,

$g$  – прискорення вільного падіння.

7.32.  $l = \frac{g T_0^2}{4\pi^2} = 2,24 \text{ м}$ .



Кожне диференціювання по часу „збільшує” фазу на  $\pi/2$ .

7.35. в) і д) – ні, інші випадки – так; для а)  $x_0 = 0$ ,

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \omega = \omega_0, \operatorname{tg} \varphi_0 = -a_2/a_1;$$

б)  $x_0 = a/2$ ,  $A = |a/2|$ ,  $\omega = 2\omega_0$ ,  $\varphi_0 = 0$ ;

г)  $x_0 = 3$ ,  $A = 4$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\varphi_0 = -2\pi/3$ .

7.36.  $x = 5\sqrt{5} \cos(10\pi t + \pi/3) \text{ см}$ .

7.37. а) 7 см; б) 5 см.

7.38. а) 7; б) 7.

7.39.  $A = 4,6 \text{ см}$ ,  $\varphi_0 = 62^\circ 46'$ .

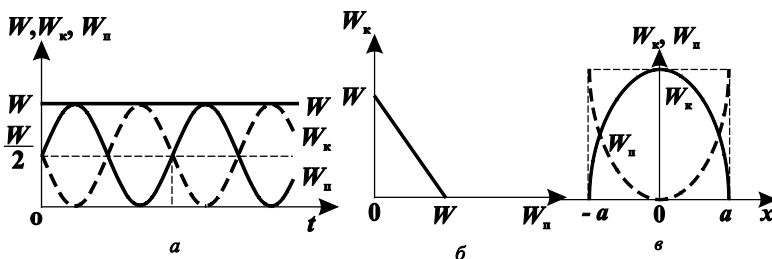
7.40.  $\Delta\varphi = 2\pi/3$ .

7.41.  $v_6 = 1 \text{ Гц}$ ;  $T_6 = 1 \text{ с}$ ; 100.

7.42.  $2,73 A\omega_0$ .

7.43.  $0,82 \text{ см}$ ;  $\pi/4$ .

- 7.44.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1.$
- 7.45.  $2y^2 - x = 1.$
- 7.46.  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1.$
- 7.47.  $y = -4x.$
- 7.48. а) и б) нї; в) так;  $\omega_0 = \sqrt{k/m}.$
- 7.50. 197 мкН, 4,93 мкДж.
- 7.51.  $x = 16 \sin(\pi t + \pi/3)$  мм.
- 7.52.  $x = 1,5$  см.
- 7.53. 805 Н/м.
- 7.54. а)  $W = 25$  мкДж,  $A = 2,5$  см,  $\dot{x}_m = 5$  м/с;  
 б)  $W = 64$  мкДж,  $A = 4$  см,  $\dot{x}_m = 8$  м/с;  
 в)  $W = 89$  мкДж,  $A = \sqrt{89}/2$  см,  $\dot{x}_m = \sqrt{89}$  см/с.
- 7.55. а)  $x(t) = -2,5 \sin 2t$  см, б)  $x(t) = -4 \cos 2t$  см;  
 в)  $x(t) = (-4 \cos 2t + 2,5 \sin 2t)$  см.
- 7.56. а)  $W_k = 25 \cos^2 2t$  мкДж,  $W_n = 25 \sin^2 2t$  мкДж;  
 б)  $W_k = 64 \sin^2 2t$  мкДж,  $W_n = 64 \cos^2 2t$  мкДж.
- 7.57.  $A = \sqrt{2W/k}; \quad \dot{x}_m = \sqrt{2W/m}.$
- 7.58.



- 7.59. а) 1/3; б) 1; в) 3.
- 7.60. а) 15; б) 3; в) 0.
- 7.61.  $\nu_0 = 5,45 \cdot 10^{14}$  Гц;  $T_0 = 1,83 \cdot 10^{-15}$  с.
- 7.62.  $I_m = 4$  А.



- 7.63.  $U = 100 \cos 2000\pi t$  В;  
 $I = 15,7 \cos(2000\pi t + \pi/2)$  мА;  $U_1 = 70,7$  В,  
 $I_1 = -11,1$  мА,  $U_2 = 0$ ,  $I_2 = -15,7$  мА;  $U_3 = 100$  В;  
 $I_3 = 0$ .
- 7.64. 0,2 мс; 10 мГн;  $I = -157 \sin 10^4 \pi t$ , мА.
- 7.65. а)  $T_0 = 0,7$  мс; б)  $I_m = 8$  А.
- 7.66. 1.
- 7.67. а) Дорівнює нулю; б)  $\frac{CR^2 I_{max}^2}{2}$ .
- 7.68.  $q_1 = 0,5 (1 + \cos 10^4 t)$  мКл, на тому конденсаторі, який був заряджений;  $q_2 = 0,5 (1 - \cos 10^4 t)$  мКл на іншому.

## 8. Згасаючі та вимушені коливання

- 8.16.  $x = 6,7 \cdot e^{-0,4t} \cdot \sin(\pi t/2)$  см;  $x(T/8) = 3,88$  см.
- 8.17. 7,85 м/с; 2,88 м/с; 1,06 м/с.
- 8.18.  $x = 40 \cdot e^{-0,4t} \cos(\pi t/4 - \pi/6)$  см.
- 8.19.  $x = 0$ , або  $x = 8$  см.
- 8.20. 1,22.
- 8.21. 0,023.
- 8.22.  $\lambda = 2 \ln(\varphi_1/\varphi_2) = 0,1$ ;  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\right)} = 2$  с,  
де  $g$  – прискорення вільного падіння.
- 8.23. 173 коливань, 172 с.
- 8.24. 20 с.
- 8.25. 3,3 с.
- 8.26.  $\beta = 0,100$  с<sup>-1</sup>,  $\tau = 10,0$  с.
- 8.27.  $Q = 195$ .
- 8.28.  $\omega_0 = 103$  рад/с.
- 8.29.  $\lambda = 1/25$ ;  $Q = 78,5$ .
- 8.30. 488 Г; 0,81.
- 8.31.  $\delta T = 0,5\%$ .
- 8.32. а)  $a_0 \omega_3$ ; б)  $t_n = \frac{1}{\omega_3} \left( \arctg \frac{\omega_3}{\beta} + \pi n \right)$ , де  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

- 8.33. а)  $\dot{x} = -\beta a_0$ ,  $\ddot{x} = (\beta^2 - \omega_3^2) a_0$ ;  
 б)  $t_n = \frac{1}{\omega_3} (\operatorname{arctg} \frac{\omega_3^2 - \beta^2}{2\beta\omega_3} + \pi n)$ , де  $n = 0, 1, 2, \dots$
- 8.34.  $\lambda = 2\pi n \lambda_0 \sqrt{4\pi^2 + \lambda_0^2(1 - n^2)} = 3,3$ ;  
 $n' = \sqrt{1 + 4\pi^2 / \lambda_0^2} = 4,3$  рази.
- 8.35.  $T = \sqrt{(4\pi^2 + \lambda^2) \Delta x / g} = 0,7$  с.
- 8.36.  $Q = \pi n / \ln \eta = 400$ .
- 8.37.  $S = A_0(1 + \exp\{-\lambda / 2\}) / (1 - \exp\{-\lambda / 2\}) = 4,0$  м.
- 8.38.  $\lambda = \frac{2\pi \ln(\frac{\varphi_0}{\varphi})}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)^2 - 1}} = 0,0184$ .
- 8.39.  $t_2 = t_1 \frac{\ln(\frac{A_0}{A_2})}{\ln(\frac{A_0}{A_1})} = 24,6$  с.
- 8.40.  $\beta = \omega_3 \sqrt{\eta^2 - 1} = 9,6$  с<sup>-1</sup>.
- 8.41. а)  $t_1 = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \eta = 112$  с;  
 б)  $t_2 = \sqrt{\frac{l(4\pi^2 / \lambda^2 + 1)}{g}} \frac{\ln \eta}{2} = 1,13$  с, де  $g$  –  
 прискорення вільного падіння.
- 8.42.  $Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4g\tau^2}{l \ln^2 \eta} - 1} = 118$ .
- 8.43. 112 с.
- 8.44. а)  $\beta = 0,01$  с<sup>-1</sup>; б)  $\lambda = 0,01$ ; в)  $Q = 314$ ;  
 г)  $-\Delta W / W = 0,02$ .

- 8.45.  $t = \frac{\sqrt{n}}{\lambda v} = 14,4 \text{ с.}$
- 8.46.  $\lambda = 0,053.$
- 8.47.  $I = 70 \text{ мА.}$
- 8.48.  $t_n = (3/4 + n)\pi \text{ мс, } n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- 8.49.  $n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{CR^2}} - 1 = 3,18.$
- 8.50.  $U = 60 \cdot e^{-1250t} \cdot \cos 2215\pi t, \text{ В.}$
- 8.51.  $U = -19,4 \text{ В.}$
- 8.52.  $8 \text{ мс; } 0,7; U = 80 \exp \{-87t\} \cdot \cos 250\pi t \text{ В;}$   
 $U = -56,5 \text{ В.}$
- 8.53.  $0,22; 11,1 \text{ Ом.}$
- 8.54.  $C = \frac{2\mu_0 \delta S^2}{\pi \rho^2 l} = 0,78 \text{ мкФ, де } \rho - \text{питомий опір міді.}$
- 8.55.  $\lambda = \pi / \sqrt{\frac{\pi \mu_0 d^4}{64 C \rho^2 l} - \frac{1}{4}} = 0,017.$
- 8.56.  $\text{в } 1,04 \text{ рази.}$
- 8.57.  $0,12\%.$
- 8.58. а)  $Q = 5; \text{ б) } \Delta Q / Q = CR^2 / (8L) \approx 0,5\% .$
- 8.59. а)  $t_n = \frac{\pi n}{\omega_3}; \text{ б) } t_n = \frac{1}{\omega_3} \arctg \frac{\beta}{\omega_3} + \pi n,$   
 тут  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- 8.60.  $t = \frac{Q}{\pi v} \ln \eta = 0,5 \text{ мс.}$
- 8.61.  $N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{CR}} - 1 = 16.$
- 8.62.  $6,8 \text{ мс.}$
- 8.63. а)  $W = W_0 \exp \{-2\pi v_0 t / Q\}; \text{ б) } 50 \%$

- 8.64. а)  $W_0 = \frac{\varepsilon^2 (L + CR_1^2)}{2(R_1 + R_2)^2} = 200 \text{ мкДж},$   
 б)  $W = W_0 \exp\{-R_1 t / L\} = 27 \text{ мкДж}.$
- 8.65. а)  $W_0 = \frac{\varepsilon^2 (L + CR^2)}{2(r + R)^2} = 2 \text{ мДж};$   
 б)  $W = W_0 \exp\{-Rt / L\} = 0,1 \text{ мДж}.$
- 8.66.  $t = \frac{Q}{2\pi\nu_0} \ln \eta = 1 \text{ мс}.$
- 8.67.  $Q = \frac{U_m^2}{2P} \sqrt{\frac{C}{L}} = 100.$
- 8.68.  $\overline{P} = RI_m^2 / 2 = 20 \text{ мВт}.$
- 8.69.  $\overline{P} = 0,5RCU_m^2 / L = 5 \text{ мВт}.$
- 8.70. а)  $T = 2\pi / \omega_0$ ; б)  $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ; в)  $T = 2\pi / \omega.$
- 8.71.  $v = 11,2 \text{ м/с} = 40 \text{ км/год}.$
- 8.72.  $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} = 255 \text{ с}^{-1}.$
- 8.73. а)  $P_{\text{взм}} = -F_0 A \omega \cos \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi(\omega));$   
 б)  $A_{\text{взм}} = \pi A F_0 \sin \varphi(\omega);$  в)  $A_{\text{тертя}} = -A_{\text{взм}}.$
- 8.74. 1)  $x = 0,07 \exp\{-1,6t\} \cdot \sin 10,5\pi t \text{ м},$   
 2)  $F = 0,07 \sin 10\pi t, \text{ Н}.$
- 8.75. Енергія  $W$  зменшиться у два рази;  
 $\tau = 1/(2\pi\Delta\nu) = 0,16 \text{ с}.$
- 8.76.  $\eta = \frac{\pi}{\lambda} (1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}) = 2,1.$
- 8.77.  $A = \pi a F_0 \sin \varphi, A_{\text{тертя}} = -A.$
- 8.78.  $Q \geq 5.$

8.79.  $Q = 2,5.$

8.80.  $U_1 \approx (v_0 / v_1)^2 U_m = 10 \text{ мВ}.$

8.81.  $R = U_m / I_m = 10 \text{ Ом}; L = U_m / (2\pi v_1 I_1) = 0,1 \text{ Гн};$   
 $C = 1 / ((2\pi v_0)^2 L) = v_1 I_1 / (2\pi v_0^2 U_m) = 0,1 \text{ мкФ}.$

8.82.  $I_m = 4,5 \text{ А}; \psi = -60^\circ; U_c = I_m / (\omega C) = 0,65 \text{ кВ};$

$$U_L = I_m \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 0,50 \text{ кВ}.$$

8.83.  $\Delta\varphi = -60^\circ = -1,05 \text{ рад}.$

8.84.  $U = 463 \text{ В}.$

8.85.  $v_0 = 30 \text{ кГц}; Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{12 v_1^3 v_2}{(v_1^2 - v_1 v_2)^2}} - 1 = 2.$

8.86.  $Q = \sqrt{\frac{4\pi v_p^2 L^2}{R^2}} + \frac{1}{4} \approx 4.$

8.87.  $C = \frac{1}{\pi v_0 R \sqrt{4Q^2 + 1}} = 32 \text{ мкФ}.$

8.88.  $\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{1 + (1,1 - 1/1,1)^2 \cdot (Q^2 + 0,25)};$

a)  $\frac{I_1}{I_2} = 19;$  б)  $\frac{I_1}{I_2} = 2,1.$

8.89.  $C = 1 / (\omega^2 L) = 28 \text{ мкФ};$

$$U_L = U_m \sqrt{1 + (\omega L / R)^2} = 0,54 \text{ кВ};$$

$$U_C = U_m \omega L / R = 0,51 \text{ кВ}.$$

8.90.  $Q = \sqrt{n^2 - 1/4}.$

8.91.  $Q = \sqrt{\frac{\eta^2 - 1}{(n-1)^2}} - \frac{1}{4}.$

$$8.92. \quad \text{a) } \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}; \quad \text{б) } Q = \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 (n^2 - 1)}{(\omega_2 - \omega_1)^2}} - \frac{1}{4}.$$

$$8.94. \quad Q = 1 / (2\pi \nu_p RC) = 50.$$

$$8.95. \quad \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{2\Delta U}{U_m}} = 4,5 \cdot 10^{-6}.$$

$$8.96. \quad \lambda = \pi \sqrt{\frac{a^3 \ln 3}{2d}} = 74 \text{ см.}$$

$$8.97. \quad U_1 = \sqrt{(U_2 - U_3)^2 + U_4^2} = 5,0 \text{ В.}$$

$$8.98. \quad < P > = U_4^2 / (2R) = 45 \text{ Вт.}$$

$$8.99. \quad \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{\pi} \%.$$

$$8.100. \quad S = \frac{2A_1}{1 - \exp\left\{-\frac{\lambda}{4}\right\}} = 2002 \text{ мм.}$$

$$8.101. \quad \text{a) } \delta = \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\ln \eta}{2\pi} \right)^2} - 1 \right) \cdot 100\% = 3,2\%.$$

$$\text{б) } \tan \omega t = -\frac{\beta}{\omega} = -\frac{\ln \eta}{2\pi},$$

$$\omega t = 165^\circ 38', \text{ якщо початкова фаза } \alpha = 0;$$

$$\omega t = 75^\circ 38', \text{ якщо початкова фаза } \alpha = \pi/2.$$

$$\text{в) } \tan \omega t = \frac{\pi}{\ln \eta} \left( 1 - \left( \frac{\ln \eta}{2\pi} \right)^2 \right), \quad \omega t = 241^\circ 16', \text{ якщо початкова}$$

$$\text{фаза } \alpha = 0; \quad \omega t = 151^\circ 16', \text{ якщо початкова фаза } \alpha = \pi/2.$$

$$8.102. \quad \text{a) } \lambda = 0,625; \quad \text{б) } \frac{W_H}{W_E} = \frac{L}{CR^2} = 25.$$

$$8.103. \quad I_0 = U_0 / \sqrt{L/C}, \text{ де } \sqrt{L/C} - \text{характеристичний або хвильовий опір.}$$

$$8.104. \quad R = 2L/t = 40 \text{ Ом.}$$

$$8.105. \quad N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{CR^2}} - 1 = 15.$$

$$8.106. \quad t = \frac{4L}{R} = 20 \text{ мкс.}$$

- 8.107. а) Ні; б) Так.
- 8.108.  $\lambda = \frac{2\pi P}{U_m^2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,018.$
- 8.109.  $\nu = 1600 \text{ Гц}.$
- 8.110.  $\beta = \Delta\omega/(2\sqrt{3}) = 29 \text{ с}^{-1}.$
- 8.111.  $\lambda \approx \frac{\pi U_m}{U_{\text{рез}}} = 0,2.$
- 8.112.  $Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_0^2 + v^2}{v_0^2 - v^2}} = 7,6.$
- 8.113.  $R = 10 \text{ Ом}; \tau = 2L/R = 0,2 \text{ с}.$

## 9. Хвилі

- 9.12. Обидві.
- 9.13. Частота залишається без змін, довжина хвилі збільшується у 2 рази.
- 9.14.  $\Delta x = \lambda/2.$
- 9.16.  $[\alpha] = \text{м}^2/\text{с}^2, f$  може описувати плоску хвилю, яка розповсюджується вздовж осі  $X$  із швидкістю  $1,2 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$
- 9.17. Плоску хвилю, яка розповсюджується вздовж осі  $X$  із швидкістю  $v = \omega/k.$
- 9.19.  $d \ll \sqrt{L\lambda} = 2,4 \text{ мм}.$
- 9.20. Для біжучої хвилі:  

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1); \Delta\varphi_{13} = \frac{2\pi}{\lambda}(x_3 - x_1);$$
для стоячої хвилі:  $\Delta\varphi_{12} = 0, \Delta\varphi_{13} = \pi.$
- 9.21.  $350 \text{ м/с}; 0,785 \text{ м/с}.$
- 9.22.  $\pi$
- 9.23.  $5 \text{ см}$
- 9.24.  $0,48 \text{ м}$
- 9.25. а)  $0,63 \text{ м/с},$  б)  $2,9 \cdot 10^{-4},$  в)  $1,9 \cdot 10^{-3}.$
- 9.26. 1)  $315 \text{ с}^{-1};$  2)  $330 \text{ м/с};$  3)  $105 \text{ см};$  4)  $99 \text{ см/с}.$
- 9.27.  $S_1 = 10 \sin(0,5\pi t - \pi) \text{ см}, S_2 = 10 \sin\left(2\pi - \frac{\pi x}{600}\right) \text{ см}.$

- 9.28.  $0,04 \text{ м}$
- 9.29.  $S = 0; \dot{S} = 7,85 \text{ см/с}; \ddot{S} = 0.$
- 9.30.  $S(660 \text{ м}, 4 \text{ с}) = -2,5 \text{ см}.$
- 9.31.  $333 \text{ м/с}.$
- 9.32.  $S(15 \text{ м}, 0,1 \text{ с}) = 10 \text{ см}.$
- 9.33. а)  $S(0,0) = 20 \text{ мкм}, \dot{S}(0,0) = 0;$   
 б)  $S(20 \text{ м}, 0,1 \text{ с}) = -10 \text{ мкм}; \dot{S}(20 \text{ м}, 0,1 \text{ с}) = 5,44 \text{ мм/с}.$
- 9.34.  $v_{\parallel} = 2 \text{ км/с}; v_{\perp} = 1,2 \text{ км/с}.$
- 9.35.  $\vec{j} = (\rho A^2 \omega^3 / k) \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) \vec{i}.$
- 9.36. а) вузли:  $x = 3,9,15, \dots \text{ см},$  пучності:  $x = 0,6,12,18, \dots \text{ см},$   
 б) вузли:  $x = 0,6,12,18, \dots \text{ см},$  пучності:  $x = 3,9,15, \dots \text{ см}.$
- 9.37. а) збільшиться в чотири рази, б) збільшиться у вісім раз.
- 9.38.  $\Delta p_0 = 1,62 \text{ Па}.$
- 9.39.  $\Delta p_{01} = 0,83 \text{ Па}, \Delta p_{02} = 0,083 \text{ Па}.$
- 9.40.  $I_1 = 5,71 \cdot 10^{-10} \text{ Вт/м}^2, L_1 = 27,6 \text{ дБ};$   
 $I_2 = 1,86 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/м}^2, L_2 = 2,7 \text{ дБ};$
- 9.41.  $L_2 = L_1 + 20 \lg(r_1 / r_2) = 35,5 \text{ дБ}.$
- 9.42.  $I_1 / I_2 = 10^{0,1 \Delta L} = 1000 \text{ раз}.$
- 9.43.  $L(n) = L + 10 \lg n$ , якщо  $n = 2$ , то  $L(2) = 63 \text{ дБ}$ , а  
 якщо  $n = 10$ , то  $L(10) = 70 \text{ дБ}.$
- 9.44. За кривими рис.9.1 знаходимо, що перший тон не чутний,  $L_{N_2} = 20 \text{ фон}, L_{N_3} = 40 \text{ фон}.$
- 9.45.  $L_1 = 64 \text{ дБ}; L_2 = 50 \text{ дБ}; L_3 = 50 \text{ дБ}; L_4 = 56 \text{ дБ}; L_5 = 77 \text{ дБ}.$
- 9.46. В 650 раз.
- 9.47.  $I_N = 30 \text{ фон}.$
- 9.48. а)  $I = 6 \cdot 10^{-13} \text{ Вт/м}^2, L = -4 \text{ дБ}, L_N = 0;$   
 б)  $I = 0,65 \text{ Вт/м}^2, L = 116 \text{ дБ}, L_N = 120 \text{ фон}.$



- 9.49.  $L_N = 50$  фОн.
- 9.50.  $N = 3,14$  мВт.
- 9.51.  $A = \frac{1}{2\pi v} \left( \frac{2I}{\rho v_{\parallel}} \right)^{1/2}$ ; а)  $A_{min} \sim 6 \cdot 10^{-11}$  м;  
 б)  $A_{max} \sim 3 \cdot 10^{-5}$  м = 0,03 мм.
- 9.52.  $\frac{(\Delta p_0)_e}{(\Delta p_0)_n} = \left( \frac{v_{\parallel e} \rho_e}{v_{\parallel n} \rho_n} \right)^{1/2} = \left( \frac{1,450 \cdot 10^6}{332 \cdot 1,29} \right)^{1/2} = 58.$
- 9.53. а)  $\Delta p_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\rho' v_{\parallel} N / 2\pi} = 4,9$  Па,  
 $\frac{\Delta p_0}{p} = 4,9 \cdot 10^{-5}$ ;  
 б)  $A = \Delta p_0 / (2\pi v \rho' v_{\parallel}) = 3$  мкМ,  
 $A/\lambda = A v / v = 5,4 \cdot 10^{-6}.$
- 9.54. 46 мА/м;  $1,73 \cdot 10^8$  м/с.
- 9.55.  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + kx + \alpha),$   
 $\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t + kx + \alpha + \pi).$
- 9.56. а)  $\vec{H} = \vec{k} E_0 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \cdot \cos kx = -0,30 \vec{k};$   
 б)  $\vec{H} = \vec{k} E_0 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} \cdot \cos(ckt_0 - kx) = 0,18 \vec{k}, \vec{k} - \text{орт}$   
 осі Z.
- 9.57.  $\Delta \lambda = (1/\sqrt{\epsilon} - 1) c/v = -50$  м.
- 9.58. 2 мкВ/м, 5,3 нА/м; 1,62 мкВ/м, 4,3 нА/м.
- 9.59. а) 18,8 В/м; б) 1,57 мДж/м<sup>3</sup>; в) 0,47 Вт/м<sup>2</sup>.
- 9.60.  $\mathcal{E}_{ind} = -l E_0 [\cos \omega t - \cos(\omega t - \omega l/c)] =$   
 $= 25 \cos(\omega t - 2\pi/3)$  мВ, де  $\omega l/c = \pi/3,$   
 c-швидкість світла в вакуумі.
- 9.61.  $j/j_{3M} = \sigma / (2\pi \epsilon \epsilon_0 v) = 2.$
- 9.62.  $\vec{\Pi} = 0,38 \cos^2(\omega t + \alpha) \cdot \vec{j},$  Вт/м<sup>2</sup>;  $\vec{j}$  - орт,  
 направлений вздовж осі ОУ.
- 9.63. 26.
- 9.64.  $P = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 r^2 = 11$  нВт.
- 9.65. а)  $\frac{2e^3 B}{3\epsilon_0 c^3 m_e^2} = 1,38 \cdot 10^{-11};$  б)  $\tau = \frac{0,03 \pi \epsilon_0 c^3 m_e^2}{e^4 B^2} = 0,026$  с;  
 в)  $m_e^2 c^2 (-\ln 0,99) / (80 \pi e^3 B) = 7,25 \cdot 10^8$  об.

- 9.66.  $\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} = 5 \cdot 10^{-15} \text{ Вт.}$
- 9.67.  $A = \frac{\Delta p_0}{2\pi\nu v_{\parallel} \rho'} = 9,3 \cdot 10^{-4} \text{ мм, де } v_{\parallel} - \text{ швидкість звуку в повітрі, } \rho' - \text{ густина повітря при нормальних умовах.}$
- 9.68. а)  $\frac{I_2}{I_1} = 10^{0,1\Delta L} = 1,26$ ; б)  $\frac{\Delta p_{02}}{\Delta p_{01}} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 1,122$ .
- 9.69. а)  $L_2 = 10 \left( 2 \log \frac{r_1}{r_2} + 0,1L_1 \right) = 39,5 \text{ дБ};$   
 б)  $r_3 = r_1 \sqrt{10^{0,1L_1}} = 474 \text{ м.}$
- 9.70. а)  $16 \text{ мВт/м}^2, 8 \text{ мВт/м}^2; 1,6 \text{ мкВт/м}^2, 0,8 \text{ мкВт/м}^2;$   
 б)  $2,45 \text{ В/м}, 24,5 \text{ мВ/м};$  в)  $2,7 \cdot 10^{-11} \text{ Па}, 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ Па.}$
- 9.71. а)  $H_0 = 46 \text{ мА/м};$  б)  $v = 1,7 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$
- 9.72.  $p = \epsilon_0 E_0^2 = 2,2 \cdot 10^{-16} \text{ Па.}$

## 10. Інтерференція електромагнітних хвиль

- 10.11.  $A = a\sqrt{N}.$
- 10.12. Пульсує з періодом 10 с.
- 10.13.  $I = \frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2\langle\cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi)\rangle,$   
 де значок  $\langle \rangle$  означає усереднення по часу,  $I_1 = \frac{1}{2}E_1^2,$   
 $I_2 = \frac{1}{2}E_2^2.$  Останній член дорівнює нулю при будь-якому значенні кута  $\varphi$  тоді, коли  $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$ , тобто коливання повинні бути взаємно перпендикулярні.
- 10.14. 4 мм.
- 10.15. 1,33 м.
- 10.16.  $\Delta = \lambda_0,$  де  $\lambda_0$  – довжина хвилі світла у вакуумі.
- 10.17. 1) max; 2) min.
- 10.18. 15 м
- 10.19. 1,41 мм.
- 10.20. 6 км, 400 м.
- 10.21.  $\sin \theta_{\max} = m/2$ , де  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , тобто  $\theta_{\max} = 0,$   
 30, 90, 150, 180, 210, 270, 330°.

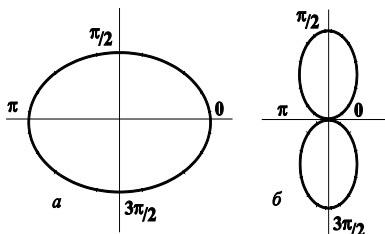
- 10.22 1. а)  $\varphi = (2\pi/\lambda)d \sin \theta$ ; б)  $\varphi = (2\pi/\lambda)d \sin \theta + \varphi_0$ ;  
 2.  $I(\theta) = 4I_0 \cos^2((\pi/\lambda)d \sin \theta + \varphi_0/2)$ , звідки

$$\text{а) } I(\theta) = 4I_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right) \text{ і}$$

$$\text{б) } I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}(\sin \theta + 1)\right);$$

3. а)  $I(\theta) = 4I_0(1 - (\pi d/\lambda)^2 \sin^2 \theta)$  і  
 б)  $I(\theta) = 4I_0(\pi d/\lambda)^2 \sin^2 \theta$ .

Полярні діаграми направленості випромінювання джерел показані на рисунках.



- 10.23. У 1,3 рази.  
 10.24. 1,8, 3,6 і 5,4 мм.  
 10.25.  $d = (2m + 1) \cdot 0,127 \text{ мкм}$ , де  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ .  
 10.26.  $\theta = \pi - \frac{\lambda(r+a)}{2r(n-1)\Delta x} = 179^\circ 44'$ .  
 10.27. 6 мкм.  
 10.28. Картина зміститься в сторону перекритої щілини на 10 смуг.  
 10.29. 0,6 мкм.  
 10.30. а)  $\alpha = (r + a)\lambda / (2r(n-1) \cdot \Delta x) = 14,3'$ ; б) 7.  
 10.31.  $\Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} = 0,5 \text{ мм}$ ;  $N' = \frac{4L(n-1)^2 \alpha^2}{\lambda} = 10$ .  
 Може спостерігатись  $N = 9$  смуг: одна центральна і чотири смуги по обидві сторони від центральної.  
 10.32.  $N' = \frac{l(n-1)\alpha}{\lambda} = 40$ , буде спостерігатись  
 $N = 39$  смуг, якщо екран буде віддалений від біпризми на відстань  $L = 20 \text{ м}$ . Інтерференційні

смуги щезнуть, якщо екран віддалити від біпризми на відстань не менше, ніж  $2L = 40$  м.

**10.33.** а)  $\alpha = \lambda(r + a)/(2r\Delta x) = 10'$ , б)  $N = 5$ .

**10.34.**  $x = \frac{5\lambda(a + r)}{2r\alpha} = 2,8$  мм.

**10.35.** 0,64 мкм.

**10.36.**  $h = \frac{\lambda F}{\Delta x} = 0,6$  мм.

**10.37.**  $L > \frac{D\Delta x}{\lambda} = 50$  м; Максимальне число смуг  $N = D/(2\Delta x) = 59$  отримується при віддаленні екрана від лінзи на відстань  $\frac{L-F}{2} = 24,75$  м.

**10.39.**  $d < \frac{\lambda}{4n} = 0,1$  мкм.

**10.40.**  $d = \frac{3\lambda_c}{2n} = \frac{\lambda_{\text{ч}}}{n} = 0,45$  мкм, де  $\lambda_c = 0,4$  мкм, а  $\lambda_{\text{ч}} = 0,6$  мкм.

**10.41.** 0,1 мкм.

**10.42.** 0,6 мкм.

**10.43.**  $d = \frac{(2k+1)\lambda}{4\sqrt{n}}, k = 0, 1, 2, \dots$

**10.44.**  $d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{0,55}{4 \cdot 1,2}$  мкм = 0,115 мкм.

**10.45.** а)  $d = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}, k=0,1,2,3,\dots, d_1 = 0,113$  мкм,

$d_2 = 0,338$  мкм,  $d_3 = 0,564$  мкм, ...;

б)  $d = \frac{(k+1)\lambda}{2n}, k = 0,1,2,3,\dots,$

$d_1 = 0,226$  мкм,  $d_2 = 0,451$  мкм,  $d_3 = 0,677$  мкм.

**10.46.**  $d = \frac{\lambda}{2(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_2})} =$   
 $= 13,2$  мкм.

- 10.47.  $\varphi = \frac{\lambda}{2\Delta x \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \approx 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ град} = 12''.$
- 10.48.  $\varphi = \frac{\lambda}{2n\Delta x} \approx 8''.$
- 10.49. 0,56 см.
- 10.50.  $r_k = \sqrt{(2k-1)R\lambda/2}, k=1,2,3\dots$
- 10.51.  $R = 2r_5^2/(\lambda(10-1)) = 9,1 \text{ м};$   
 $r_3 = \sqrt{R\lambda(6-1)/2} = 3,7 \text{ мм}.$
- 10.52.  $\lambda = \frac{\Delta l^2}{8R} = 0,675 \text{ мкм}.$
- 10.54.  $\Delta l = \frac{\sqrt{41} - \sqrt{39}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \text{ мм} \approx 0,31 \text{ мм}.$
- 10.55.  $R = \frac{2r_3^2}{5\lambda_c} = 1 \text{ м}, \lambda_{\text{ч}} = \frac{5r_5^2\lambda_c}{9r_3^2} = 0,697 \text{ мкм}.$
- 10.56.  $r = \sqrt{\frac{R\lambda}{n}} = 0,63 \text{ мм}.$
- 10.57.  $r_k = \sqrt{\frac{k\lambda}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}; r_5 = \sqrt{\frac{5 \cdot 0,589 \cdot 10^{-3}}{\frac{1}{10^3} + \frac{1}{1,2 \cdot 10^3}}} = 1,27 \text{ мм}.$
- 10.58.  $r_k = \sqrt{\frac{k\lambda}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}}; r_5 = 4,2 \text{ мм}.$
- 10.59. В червоному.
- 10.61.  $2\varphi \approx 2\alpha(n-1)a/(r+a)$ , де  $\alpha$  – заломлений кут призми,  $r$  – відстань від джерела світла до біпризми,  $a$  – відстань від біпризми до екрану,  $n$  – показник заломлення матеріалу біпризми.
- 10.62. а)  $t_{\text{коз}} \approx 4 \cdot 10^{-14} \text{ с};$  б)  $l_{\text{коз}} \approx 0,01 \text{ мм};$  в)  $\rho_{\text{коз}} \approx 0,3 \text{ мм};$   
г)  $V_{\text{коз}} \approx 0,001 \text{ мм}^3.$
- 10.63. 0,05 мм.

**10.64.** 0,2 мм.

**10.65.** 30 смуг.

**10.66.**  $d_{\max} \sim \frac{\lambda^2}{2n\Delta\lambda} + \frac{\lambda}{4n} \sim 1,2 \text{ мм для } \lambda = 0,7 \text{ мкм.}$

**10.67.** 1)  $\Delta x = \frac{\lambda}{2\varphi} = 0,47 \text{ мм};$  2)  $L = \frac{\lambda^2}{2\varphi\Delta\lambda} = 513 \text{ см},$

3)  $N = L/\Delta x = \lambda / \Delta\lambda = 10922 \text{ смуги.}$

**10.68.** б)  $\Delta x = \lambda \frac{l(a-F) - aF}{ad} = 1,075 \text{ мм};$

в)  $b < \frac{\lambda(l-a)a}{4dl} = 0,024 \text{ мм};$

г)  $N = \frac{2d^2(l+a)}{\lambda a(l-a)} = 21 \text{ смуга.}$

**10.69.**  $\Delta = \frac{c}{\Delta v} = 30 \text{ м.}$

**10.70.**  $L = \frac{D}{2\alpha(n_1 + n_2 - 2)} \approx 270 \text{ см};$

$\Delta x = \frac{\lambda}{\alpha(n_1 + n_2 - 2)} \approx 45 \text{ мкм};$

$N = \frac{D\alpha(n_1 + n_2 - 2)(1 - (n_1 - 1)\alpha^2)}{2\lambda} = 670.$

**10.71.**  $\Delta = 0.$

**10.72.** 0,1 мкм.

**10.73.**  $l = 2,5 \text{ см.}$

**10.74.**  $\Delta\lambda = 13 \text{ нм.}$

**10.75.**  $t_{\text{коз}} \approx 20 \text{ нс}; l_{\text{коз}} \approx 6 \text{ км.}$

**10.76.**  $t_{\text{коз}} \approx 3 \text{ нс}; \Delta\lambda \approx 0,5 \text{ пм.}$

## 11. Дифракція електромагнітних хвиль

- 11.10. 5; світлим.
- 11.11. 1,58 мм.
- 11.12. Зменшиться в 4 рази.
- 11.13. 7,5 мм.
- 11.14.  $\lambda = 0,506$  мкм.
- 11.15. Так як число відкритих зон Френеля  $k = \frac{d^2 l}{4b(l-b)\lambda} = 3$ ,  
то освітленість в центрі дифракційної картини при наявності ширми більша, ніж при її відсутності приблизно в чотири рази.
- 11.16. а)  $4I_0, 2I_0$ ; б)  $I_0$ .
- 11.17. а)  $I = 2I_0$ ; б)  $I = I_0$ .
- 11.18. а)  $I = I_0/2$ ; б)  $I = I_0/4$ .
- 11.19. а)  $k_{min} = 8$ ; б)  $b = ar^2/(a\lambda k_{min} - r^2) = 10$  м;  
в)  $r \leq \sqrt{a\lambda} = 0,74$  мм.
- 11.20. 1 мм.
- 11.21. 167 м.
- 11.22.  $r_{min} = \sqrt{\lambda b/3} = 0,5$  мм.
- 11.23.  $E_p = \frac{1}{2}(E_1 - E_2 + E_3 - E_4) - \frac{1}{2}E_4 + \frac{1}{2}E_5 +$   
 $+ \left(\frac{1}{2}E_5 - E_6 + \frac{1}{2}E_7\right) + \dots \approx 0$ .  
В точці Р буде мінімум освітленості.
- 11.24.  $\Delta l = \frac{8b_1^2\lambda}{D^2 - 8b_1\lambda} = 15$  см.
- 11.25.  $2^\circ 45'$ .
- 11.26. 141.
- 11.27. 1) min ; 2) max .
- 11.28.  $17^\circ 8'$ ;  $36^\circ 5'$ ;  $62^\circ \dots$  .
- 11.29.  $33^\circ$ ;  $27^\circ$ .
- 11.30.  $30^\circ$ .
- 11.31.  $\delta\varphi = 10^{-2}$  рад  $\approx 34'$ ,  $\delta x = 2$  мм.
- 11.32.  $L = \frac{2a\lambda}{b} = 2$  мм.

- 11.33.  $N = \frac{2b}{\lambda} - 1 = 11.$
- 11.34. 103.
- 11.35.  $5,8 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$
- 11.36.  $\lambda = \frac{d \sin \Delta \varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta \varphi}} = 0,478 \text{ мкм.}$
- 11.37. а) 3; б) 5.
- 11.38.  $k = \frac{d}{b} n = 3n, n = 1, 2, 3, \dots$
- 11.39.  $2k + 1 = 9, k = 4.$
- 11.40. 1,15 мкм.
- 11.41. Не можуть.
- 11.42.  $k = \frac{d}{b} n, n = 1, 2, 3, \dots$
- 11.43.  $\lambda_2 = 648,1 \text{ нм.}$
- 11.44. 2,8 мкм; 3570.
- 11.45. При  $k = 2; \lambda = 600 \text{ нм.}$
- 11.46.  $5\lambda.$
- 11.47.  $\lambda_2 = \frac{3\lambda_1 \sin \varphi_2}{2 \sin \varphi_1} = 0,545 \text{ мкм.}$
- 11.48. а)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 6,6'$ ; б)  $\varphi_3 - \varphi_2 = -55,2'$ .
- 11.49. 0,534 мкм.
- 11.50. 600 штрихів/мм.
- 11.51.  $D_\varphi = \frac{k}{\sqrt{d^2 - k^2 \lambda^2}} = 0,63 \frac{\text{рад}}{\text{мкм}} = 130 \frac{\text{кут.сек.}}{\text{нм}}.$
- 11.52. 0,8 мкм.
- 11.53.  $5100 \text{ \AA}.$
- 11.54.  $4 \cdot 10^5 \text{ рад/м.}$
- 11.55. 1)  $D_\varphi = 81 \text{ кут.с/нм; 2) } D_l = 0,197 \text{ мм/нм;}$   
3)  $D_l^{-1} = 5,08 \text{ нм/мм.}$
- 11.56. Біля 0,12 мм.
- 11.57. а) не будуть; б) будуть.
- 11.58.  $D_\varphi = \frac{k}{d \sqrt{1 - k^2 \lambda^2 / d^2}}:$  а)  $1,09 \cdot 10^{-3} \text{ рад/нм,}$   
б)  $1,14 \cdot 10^{-3} \text{ рад/нм, в) } 1,54 \cdot 10^{-3} \text{ рад/нм.}$
- 11.59. 1)  $D_l = \frac{kF}{\sqrt{d^2 - k^2 \lambda^2}};$  2) а) 1,09 мм/нм;



- б) 1,23 мм/мм; в) 1,56 мм/мм; 3)  $D_l = 1$  мм/мм.
- 11.60. 1)  $\Delta x = 733$  мм; 2) а)  $D_l = 1,2$  мм/мм; б)  $R = 10^5$ .
- 11.61.  $\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{N\sqrt{d^2 - 4\lambda^2}} = 11''$ .
- 11.62.  $\Delta\varphi = 22^\circ$ .
- 11.63.  $\Delta\varphi = 4,8^\circ$ .
- 11.64. 0,7 мм.
- 11.65.  $\Delta x = D_l \delta\lambda = \frac{F\lambda}{l} = 3,3$  мкм.
- 11.66.  $R_1 = 12000$  Ом,  $R_2 = 48000$  Ом.
- 11.67. Ні.
- 11.68.  $N_{min} = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = 490$ .
- 11.69. 22 мкм.
- 11.70. 3.
- 11.71. 0,24 Å.
- 11.72.  $L_{min} = \frac{d\lambda_1}{k(\lambda_2 - \lambda_1)} = 10$  мм.
- 11.73. 28,3 мм<sup>2</sup>.
- 11.74. 4; мінімум.
- 11.75. зменшиться в 4 рази.
- 11.76.  $b_{max} = r^2 / (2\lambda) = 1,0$  м.
- 11.77. а, б – світла цятка; в) – темна цятка.
- 11.78. Зменшиться.
- 11.79. а) 3; б) 5.
- 11.80.  $30^\circ$ ;  $22^\circ 8'$ .
- 11.81.  $\lambda \approx \frac{b\Delta x}{2F} = 630$  нм.
- 11.82. а) 6,6'; б)  $-55'$ .
- 11.83.  $\Delta\lambda = \frac{d \sin \Delta\varphi}{2\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \Delta\varphi}} = 0,438$  мкм.
- 11.84.  $\Delta x = \frac{2\lambda L}{b} = 2$  см.
- 11.85.  $\lambda \cong \frac{d \cdot \theta}{m_2 - m_1} \approx 524$  нм.
- 11.86. 7.
- 11.87. 7 см.
- 11.88.  $D_\varphi = 0,3$  рад/мкм.
- 11.89.  $D_\varphi = \frac{1}{d\sqrt{1 - (\lambda/d)^2}} = 0,407$  рад/мкм;  $D_l = 650$  мм/мкм.
- 11.90. а)  $N = 982$ ;  $l = 9,8$  мм; б)  $N = 491$ ;  $l = 4,9$  мм.

11.91.  $R = 24000; \delta\lambda = 0,02 \text{ нм.}$

## 12. Теплове випромінювання та зовнішній фотоелектр

12.16.  $R = b(\omega_2 - \omega_1).$

12.17.  $R = r_0 / \alpha .$

12.18. а)  $\alpha(\omega, T) = 0, r(\omega, T) = 0;$

б)  $\alpha(\omega, T) = 1, r(\omega, T) = f(\omega, T)$ , де  $f(\omega, T)$  – універсальна функція Кірхгофа.

12.20.  $7,4 \cdot 10^{21} \text{ кВт} \cdot \text{год.}$

12.21.  $\sigma \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/(с} \cdot \text{м}^2 \text{K}^4), \text{ За сучасними даними}$

$$\sigma \approx (5,6687 \pm 0,0010) \cdot 10^{-8} \text{ Дж/(с} \cdot \text{м}^2 \text{K}^4).$$

12.22. 6000 К.

12.23. Збільшилась би.

12.24. Біля  $10^{11}$  років.

12.25. 394 К (121°C).

12.26. 
$$\Delta T = 2T \cdot \frac{1/\sqrt{1,033} - 1}{1/\sqrt{1,033} + 1} = -4,68 \text{ К.}$$

12.27. 1000 К.

12.28. у 10/3 рази.

12.29. 2647 К.

12.30. 0,4 см<sup>2</sup>.

12.31. Збільшиться в 1,06 раз.

12.32. 5,35 кВт.

12.33. 1,87 кВт.

12.34. 
$$\eta = 1 - \frac{\pi \sigma T^4 d^2}{4N_0} \approx 80\%.$$

12.35. 
$$I = \frac{\pi \sigma T^4 a l d}{U} \approx 36 \text{ мА.}$$

12.36. 
$$d_2 = d_1 \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \sqrt[3]{\frac{a_1 \rho_2 T_1}{a_2 \rho_1 T_2}} = 0,063 \text{ мм.}$$

12.37.  $t = (\eta^3 - 1) c \rho d / (18 \sigma T_0^3) = 3 \text{ години, де } c - \text{питома теплоємність, } \rho - \text{густина міді.}$

12.38.  $\lambda_m = 3,4 \text{ мкм.}$

- 12.39.  $73,1 \text{ МВт/м}^2$ .
- 12.40.  $6 \text{ см}^2$ .
- 12.41. У 81 раз; від 2,9 мкм до 0,97 мкм; у 243 рази.
- 12.42. 290 К.
- 12.43. Збільшилась на  $\Delta\lambda = 0,23 \text{ мкм}$ .
- 12.44. Зменшиться у 2 рази.
- 12.45.  $T_2 = \frac{bT_1}{b+T_1\Delta\lambda} = 1,75 \cdot 10^3 \text{ К}$ .
- 12.46. а)  $10^{-6} \text{ м}$  – інфрачервона область; б)  $5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  – область видимого світла; в)  $3 \cdot 10^{-9} \text{ м}$  – область рентгенівських променів.
- 12.47. 2,7 К.
- 12.48. Збільшилась в  $\sqrt{\eta} = 1,9$  рази.
- 12.49. а) Перетворити формулу Віна  $U(\omega, T)$  на  $U(\lambda, T)$ .  
Із умови  $\frac{dU(\lambda, T)}{d\lambda} = 0$  отримати, що  $\lambda_m \sim 1/T$ .  
б) у формулу Віна  $U(\lambda, T)$  підставити  $\lambda = \lambda_m \sim 1/T$  і переконатись, що  $U(\lambda_m, T) \sim T^5$ .
- 12.51. а)  $\lambda = 1,105 \text{ мкм}$ ; б)  $y_2 - y_1 = 0,36$ .  
в)  $\frac{\Delta R_2}{\Delta R_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 \frac{1 - y_2}{1 - y_1} = 4,94$ .
- 12.52.  $3,1 \text{ кВт/м}^2$ .
- 12.53. В 4,78 рази.
- 12.54. 412 Вт.
- 12.55.  $\Delta\lambda = 16 \text{ Å}$ .
- 12.56.  $x = \left(\frac{\lambda_6}{\lambda_5}\right)^5 \exp\left\{\frac{hc}{kT}\left(\frac{1}{\lambda_6} - \frac{1}{\lambda_5}\right)\right\} = 2,87$ ,  
де  $\lambda_5 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ ,  $\lambda_6 = (\lambda_3 + \lambda_4)/2$ .
- 12.57.  $\Delta R = \frac{8\pi^2 c^2 \hbar T^4 \eta}{b^4 (\exp\{2\pi c \hbar / kb\} - 1)} = 0,60 \text{ Вт/см}^2$ ,  
де  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .
- 12.58.  $T < \frac{hc}{\lambda k \ln 100} = 4166 \text{ К}$  (для  $\lambda = 0,75 \text{ мкм}$ ).

- 12.59.  $\lambda \leq \frac{hc}{2kT \ln 10} = 1,56 \text{ мкм.}$
- 12.60. 519 нм; 546 нм; 677 нм; 689 нм.
- 12.61.  $A = 4,5 \text{ eB}; v_{max} = 9,1 \cdot 10^5 \text{ м/с};$   
 $W_{\kappa.max} = 3,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2 \text{ eB.}$
- 12.62.  $U = 1,75 \text{ В.}$
- 12.63.  $\lambda = 204 \text{ нм}; \lambda_0 = 234 \text{ нм.}$
- 12.64. 4,5 eB.
- 12.65.  $3,42 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$
- 12.66.  $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с.}$
- 12.67. 2,5 В.
- 12.68. а) 0,66 і 0,235 мкм; б)  $5,5 \cdot 10^5 \text{ м/с (Zn)}, 3,3 \cdot 10^5 \text{ м/с}$   
 (Ag), із нікелю не вилітають.
- 12.69.  $\lambda_0 = (hc / A)(\eta - n) / (\eta - 1) = 0,26 \text{ мкм.}$
- 12.70.  $A = hc \frac{(\eta^2 - \lambda_2 / \lambda_1)}{\lambda_2 (\eta^2 - 1)} = 1,88 \text{ eB.}$
- 12.71.  $n = \frac{N\tau\lambda S}{4\pi\hbar c L^2} = 4 \cdot 10^5 \text{ фотонів.}$
- 12.72.  $T = \sqrt[4]{\frac{3cp_0}{4\sigma}} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ К.}$
- 12.73.  $p = 4\sigma T^4 / (3c) \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ Па.}$
- 12.74.  $p = 1,65 \cdot 10^{13} \text{ Па} = 163 \text{ Матм.}$
- 12.75.  $n = \lambda N / (2\pi\hbar c) = 6 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-1}.$
- 12.76. а)  $\langle j \rangle = \frac{N\lambda}{4\pi\hbar c r^2} = 5,9 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1};$   
 б)  $\langle n \rangle = \langle j \rangle / c, r = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{N\lambda}{\pi\hbar\langle n \rangle}} = 8,9 \text{ м.}$
- 12.77. а)  $j = \frac{N\lambda}{4\pi\hbar c r^2} = 1,1 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1};$   
 б)  $j = \frac{N(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{12\pi\hbar c r^2} = 1,0 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1}.$
- 12.78. 2,07 eB/c; 4,13 кеВ/c; 310кеВ/c.

12.79.  $v = c / \sqrt{1 + (m_e \lambda c / h)^2} = 0,77c = 2,3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$

де  $m_e$  – маса спокою електрона.

12.80.  $F = \frac{IS}{c}(1 + \rho)\cos^2 \varphi = 50 \text{ нН}.$

12.81.  $\langle p \rangle = 4(1 + \rho)W / (\pi d^2 c \tau) = 4,9 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 49 \text{ атм}.$

12.82.  $p = \frac{I}{c}(1 + \rho)\cos^2 \varphi = 0,6 \text{ нН/см}^2 = 6 \text{ мкПа}.$

12.84.  $F = \pi R^2 I / c = 0,18 \text{ мкН}.$

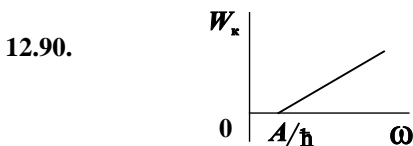
12.85. Біля  $10^{-7} \text{ Па}.$

12.86.  $N = I_H / |e|.$

12.87.  $N = 3,1 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$

12.88. Залежність лінійна. Кутовий коефіцієнт визначається квантовим виходом фотоефекту.

12.89.  $I_H \sim E^2.$



12.93.  $\beta = hcj / (e\lambda) = 0,02.$

12.94. Зменшиться на  $\Delta T = \frac{T\Delta\lambda}{T + \Delta\lambda} \cong 280 \text{ К}.$

12.95.  $I_2 = I_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 \sqrt{\frac{a_2(1 + \alpha(T_1 - 273))}{a_1(1 + \alpha(T_2 - 273))}} = 8,66 A.$

12.96.  $5747 \text{ К}.$

12.97.  $b = \frac{hc}{4,965k} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К};$  Вказівка: розв'язком рівняння

$\frac{x}{5} = 1 - e^{-x}$  можна вважати  $x_0 \cong 4,965.$

12.98.  $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4} \cdot$  Вказівка: скористатись значенням деяких визначених інтегралів (табл.3).

12.99.  $\langle \omega \rangle = 3,834 \frac{kT}{h} = 1,51 \cdot 10^{15} \text{ рад/с}.$  Вказівка: скористатись значенням деяких визначених інтегралів (табл.3).

12.100.  $T = \frac{0,37hc}{k\langle \lambda \rangle} = 3434 \text{ К}.$  Вказівка: скористатись значенням деяких визначених інтегралів (табл.3).

- 12.101.  $n = \int_0^\infty \frac{u(\omega, T) d\omega}{\hbar \omega} = 0,2437 \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3 = 5,48 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$ .  
Вказівка: скористатись значенням деяких визначених інтегралів (табл.3).
- 12.102. а)  $4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ ; б)  $9 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ ; в)  $0,63 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ .
- 12.103. Світловий тиск більший в 11,2 рази.
- 12.104.  $p = \frac{4\sigma T^4}{3c} = 2,52 \cdot 10^{16} \text{ Па} = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ атм}$ .
- 12.105. Збільшилась би.
- 12.106. 10.
- 12.107. 4 нН.
- 12.108.  $n = \frac{p\lambda}{\hbar c} = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$ .
- 12.109.  $p = w(1 + \rho) \cos^2 \varphi = 4 \text{ мкПа}$ .
- 12.110.  $8,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .
- 12.111. Ні.
- 12.112. 60%.
- 12.113. 6,0 В.
- 12.114. Із умови  $\hbar c / \lambda = A_{\text{CS}} + e(U_{\text{конт}} + U_0)$  знаходимо  $U_{\text{конт}} = +0,315 \text{ В}$ . Полярність контактної різниці потенціалів співпадає із полярністю зовнішньої затримуючої напруги.
- 12.115.  $\lambda_1 = 0,2318 \text{ мкм}$ ;  $\lambda_2 = 0,2455 \text{ мкм}$ ;  $\lambda_3 = 0,2667 \text{ мкм}$ .
- 12.116.  $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_e W_K(1 + W_K/(2m_e c^2))}} = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,5 \text{ пм}$ .
- 12.117.  $F = \frac{2IS}{c} \cos^2 \varphi = 3,75 \cdot 10^{-8} \text{ Н} = 37,5 \text{ нН}$ .

### 13. Будова атома

- 13.9.  $1,43 \cdot 10^{-16} \text{ с}$ ;  $4,4 \cdot 10^{16} \text{ рад/с}$ .
- 13.10. 0,97 еВ.
- 13.11.  $3645 \text{ Å}$ ;  $6561 \text{ Å}$ .
- 13.12.  $2,12 \text{ Å}$ .
- 13.13.  $P_1:P_2=2^8:1=256:1$ .
- 13.14. Зменшиться в  $n^3 = 8$  раз.
- 13.15.  $\omega = Z^2 \frac{m_e e^4}{\hbar^3 n^2} = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ рад/с}$ .

- 13.16  $B = \frac{\mu_0 e^7 m_e^2}{256 \pi^4 \epsilon_0^3 \hbar^5} = 12,5 \text{ Тл.}$
- 13.17.  $p_{m_1} = \mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл.}$
- 13.18. 949 Å; 972 Å; 1025 Å; 1215 Å.
- 13.19. а) 4; б) 3.
- 13.20.  $\lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1872,4 \text{ нм, серії Пашена } \lambda_{4 \rightarrow 3}.$
- 13.21. 5410 Å, 10140 Å і 11570 Å.
- 13.22. а) 6570 Å, 4870 Å, 4340 Å; б)  $N = 1945.$
- 13.23.  $973 \text{ Å} < \lambda \leq 1026 \text{ Å.}$
- 13.24. 121,57 нм; 102,57 нм; 656,47 нм.
- 13.25. серії Брекетта,  $\lambda_{8 \rightarrow 4}.$
- 13.26. серії Брекетта,  $\lambda_{5 \rightarrow 4}, \lambda = 4,05 \text{ мкм.}$
- 13.27. серії Пашена,  $\lambda_{5 \rightarrow 3}.$
- 13.28. серії Бальмера,  $\lambda_{3 \rightarrow 2} = 0,656 \text{ мкм.}$
- 13.29. Серія Брекетта,  $\lambda_{6 \rightarrow 4} = 26244 \text{ Å.}$
- 13.30. 0,0305 мкм.
- 13.31.  $n = \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{4 \lambda_1 \lambda_2 R_\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} = 5.$
- 13.32.  $R = \frac{88}{15 Z^2 \Delta \lambda} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}.$
- 13.33. у  $\text{Li}^{++}.$
- 13.34. 1025 Å; 1215 Å; 6561 Å.
- 13.35. 1216 Å; 1026 Å; 973 Å.
- 13.36.  $12,09 \text{ eV} \leq W < 12,75 \text{ eV.}$
- 13.37. 2,55 eV.
- 13.38.  $\Delta W = Z^2 \cdot 13,6 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) \text{ eV} = 48,4 \text{ eV.}$
- 13.39. -54,4 eV,  $\text{He}^+.$
- 13.40.  $W_{36} = 54,4 \text{ eV } (\text{He}^+)$
- 13.41.  $W_1 = 10,2 \text{ eV}; W_2 = 1,89 \text{ eV}; W_3 = 0,66 \text{ eV};$
- 13.42. Для Н  $W_K = 13,6 \text{ eV}, W_{36} = 13,6 \text{ eV};$   
для  $\text{He}^+ W_K = 54,4 \text{ eV}, W_{36} = 54,4 \text{ eV.}$
- 13.43. 79 eV.

- 13.44. 2540 Å.
- 13.45. 6560 Å; 1215 Å; 1025 Å.
- 13.46. 3,26 м/с.
- 13.47. 
$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left( \frac{1}{\lambda} - Z^2 R_\lambda \right)} = 2,26 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$
- 13.48. а) 
$$v = -c + \sqrt{c^2 + \frac{3W_i}{2m_p}} = 3,254 \text{ м/с;}$$
  
 б) 
$$\frac{2m_p v^2}{3W_i} = 5,4 \cdot 10^{-7} \text{ \%}.$$
- 13.49. 2, 0, 0; 2, 6, 0; 2, 6, 10.
- 13.50. 1; 2;  $2(2l+1)$ ;  $2n^2$ .
- 13.52. 0;  $\pm 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с;  $\pm 2,108 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.
- 13.53.  $\Delta L = 1,49 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.
- 13.54.  $3 \cdot 10^{-26}$  Н.
- 13.56. 0;  $1,31 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл;  $2,27 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл;  $3,21 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл.
- 13.57. 2,23 мм.
- 13.58.  $T = 1,53 \cdot 10^{-16}$  с;  $B = 7,8$  Тл.
- 13.59.  $\lambda \leq 910 \text{ Å}.$
- 13.60.  $v = 6 \cdot 10^5$  м/с.
- 13.61. а) 0,6566 мкм; 0,4864 мкм; 0,4343 мкм;  
 б)  $\lambda/\delta\lambda = \omega/\delta\omega \approx (N+3)^3/8 \approx 1520.$

## 14. Основи квантової механіки

- 14.9. 150 В.
- 14.11. 3,3 Å.
- 14.12. 1,23 Å; 0,0286 Å; 0,00186 Å.
- 14.13. 450 еВ.
- 14.14.  $\Delta x = 2hl/(m_e bv) = 0,73 \text{ мм}.$
- 14.15. 1460 м/с;  $7,3 \cdot 10^6$  м/с.
- 14.16. 0,145 нм.
- 14.17. Для Н: 0,0284 нм;  $0,284 \cdot 10^{-5}$  нм; 0,153 нм; для Нg: 0,002 нм;  $2 \cdot 10^{-6}$  нм, 0,0107 нм.
- 14.18. 
$$\Delta x = hl/(d\sqrt{2m_e eU}) = 4,9 \text{ мкм}.$$



- 14.19.  $\lambda = \frac{h}{2} \sqrt{2(\eta^2 - 1)/(m_e \Delta W_e)} = 1,5 \text{ \AA}.$
- 14.20. 0,39 \text{ \AA} і 0,0091 \text{ \AA}; 150 eV і 82 eV.
- 14.21.  $\lambda = h \cdot \sqrt{\frac{N_A}{3kTM}} = 1,08 \text{ \AA},$  де  $M$  – молярна маса водню.
- 14.22.  $\Delta W = \hbar^2/(2m_e \lambda^2) - p^2/(2m_e) = 0,38 \text{ кеВ}.$
- 14.23.  $U = 150 \text{ В}.$
- 14.24. 100 м/с, 0,1 м/с,  $10^{-25}$  м/с.
- 14.26. 16 раз.
- 14.27. 16%.
- 14.28. 38,8 і 0,904 пм; 150 і 0,082 eV.
- 14.29.  $\Delta x \cong \hbar t/(m_e \Delta x_0) \cong 1 \cdot 10^2 \text{ км}.$
- 14.30.  $W_{\text{к min}} \approx 2 \hbar^2/(m_e l^2) = 15 \text{ eV},$  тут  $\Delta x = l/2$  і  $p \approx \Delta p.$
- 14.31.  $\frac{\Delta v}{v} = 2\hbar/\sqrt{2m_e l^2 W_{\text{к}}} = 1.$  Прийнято, що  $\Delta x = l/2.$
- 14.32.  $\Delta v \cong \hbar/(m_e d) = 10^6 \text{ м}.$   $v/\Delta v = 2,2.$
- 14.33.  $\Delta x_{\text{min}} = 12d = 12 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$
- 14.34.  $\Delta p_y/p = \hbar/\sqrt{2m_e d^2 W_{\text{к}}} = 1,3 \text{ кут.секунди}.$  Це мала величина, яка не дозволяє виявити вказані відхилення.
- 14.35.  $\Delta x = \hbar l/\sqrt{2m_e d^2 eU} = 8 \text{ \AA}.$
- 14.36.  $\Delta x \approx c\tau = 3 \text{ м}; \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \lambda/(2\pi c\tau) \approx 3 \cdot 10^{-8}.$
- 14.37. Показати, що невизначеність імпульсу електрона на орбіті  $\Delta p$  більша самого імпульсу  $p = m_e e^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar).$
- 14.38.  $\frac{\Delta x}{\lambda} \approx 1/(\pi \Delta W_{\text{к}}/W_{\text{к}}) = 2000.$
- 14.39.  $d_{\text{min}} \cong \sqrt{\frac{\hbar l}{\sqrt{3kMT}}} \approx 1 \text{ мкм},$   $m$  – маса атомів срібла.
- 14.42. 1) 0,78; 2) 0,21; 3) 0.
- 14.43. 4,52 eV.
- 14.44. max:  $l/4, 3l/4;$  min: 0,  $l/2, l.$

- 14.45.  $\frac{dn}{dW} = \frac{4l^2 m_e}{h^2 N} = 1,33 \cdot 10^4 \text{ eB}^{-1}.$
- 14.47.  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}.$
- 14.48.  $\Psi_I \Psi_I^* = \frac{16}{9} a_1^2 (1 - \frac{3}{4} \sin^2 k_1 x), \Psi_{II} \Psi_{II}^* = \frac{16}{9} a_1^2$ , де  
 $a_1$  – амплітуда хвилі, яка падає на бар'єр,  $k_1 = \sqrt{\frac{8}{3} m U_0 / \hbar^2}.$
- 14.49. Для  $x \leq 0$   $\Psi \Psi^* = 2a^2 (1 - \sin 2kx)$ , для  $x \geq 0$   
 $\Psi \Psi^* = 2a^2 \exp\{-2kx\}$ , де  $a^2$  – константа,  $k = \sqrt{2mW} / \hbar.$
- 14.50. 0,0625.
- 14.51. 0,03; 0,97.
- 14.52. в 1,03 рази.
- 14.53. 0,2.
- 14.56. 0,01.
- 14.57. Для електрона –  $D = 0,039$ ; для протона –  $D = 5 \cdot 10^{-61}.$
- 14.58.  $x_{ef} = \frac{1}{2k} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_e(U_0 - W)}} \approx 1 \text{ Å}.$
- 14.59.  $|\Psi|^2 = 4a^2 \sin^2 kx$ , де  $a^2$  – константа,  $k = \sqrt{2mW} / \hbar$ ;  
 максимуми  $|\Psi|^2$  в точках  $x_n = \frac{\pi n}{2k}$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$ , або  
 $x_n = (\lambda/4)n$ , де  $\lambda$  – дебройлівська довжина хвилі  
 електрона ( $\lambda = 2\pi/k$ ).
- 14.60.  $W_K = \frac{1}{2m_e} \cdot \left(\frac{\hbar b}{\Delta x d}\right)^2 = 24 \text{ eB}.$
- 14.61.  $d = \frac{2\hbar}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{2m_e W_K}} = 2,3 \text{ Å}.$
- 14.62.  $\lambda = 0,247 \text{ нм}.$
- 14.63.  $\lambda = 5,18 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$
- 14.64.  $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{3kTm_\alpha}} = 0,74 \text{ Å}.$
- 14.65. Для електрона  $W_K \leq 2\delta(\delta + 2)m_e c^2 = 0,02 \text{ MeB}$ , де  
 $m_e$  – маса електрона спокою,  $c$  – швидкість світла у  
 вакуумі; для протона  $W_K \leq 37,8 \text{ MeB}.$
- 14.66.  $2\varphi \cong \frac{\lambda}{\pi b} = 0,035 \text{ рад} = 2^\circ.$

- 14.67.  $\frac{\Delta v}{v} \sim \frac{\hbar}{l\sqrt{m_e W_k}} = 1 \cdot 10^{-4}.$
- 14.68.  $\Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t} \sim 10^{-5} \text{ нм}.$
- 14.69.  $W_{\text{к. min}} = \frac{2\hbar^2}{m_e l^2} = 15 \text{ эВ}.$
- 14.70.  $W_{\text{min}} = \frac{\hbar^2}{8m_0 l^2}.$
- 14.71.  $\frac{dN}{dW} = \frac{l}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2W}} \approx 2 \cdot 10^{25} \text{ Дж}^{-1} = 3 \cdot 10^6 \text{ эВ}^{-1}.$
- 14.72. а)  $m = \frac{5\hbar^2}{8l^2 \Delta W} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг};$  б)  $n = \frac{\eta+1}{2(\eta-1)} = 4.$
- 14.73.  $P = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,61.$
- 14.74.  $D = 5,89 \cdot 10^{-7}; j = 94,4 \text{ мкА/см}^2.$

## 15. Металлы

- 15.7. 2 атома;  $2,5 \text{ \AA}.$
- 15.10.  $0,8 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}.$
- 15.11. а)  $1,21 \cdot 10^{28} (\text{эВ} \cdot \text{м}^3)^{-1};$  б)  $2,87 \cdot 10^{23} (\text{эВ} \cdot \text{м}^3)^{-1}.$
- 15.12.  $\Delta W = 0,9 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}.$
- 15.13.  $\Delta W = 0,62 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}.$
- 15.14. 1.
- 15.15. 0,5.
- 15.17.  $2,5 \cdot 10^{-76} \%; 4,5 \cdot 10^{-12} \%.$
- 15.18.  $(0;1); (0,0004;0,9996); (0,02;0,98); (0,24;0,76).$
- 15.20.  $37 \%; 1,8 \%.$
- 15.22.  $T = 596 \text{ К}.$
- 15.23.  $1,38 \text{ кТ}; -1,38 \text{ кТ}.$
- 15.24.  $60\%.$
- 15.25. Уменьшиться в 1,07 раз.
- 15.26. Уменьшиться в 12 раз.
- 15.28.  $54\%.$
- 15.29.  $W = W_F / \sqrt[3]{4}.$
- 15.30.  $65\%.$
- 15.31. 15.

- 15.32. 1,15.
- 15.33. 3%.
- 15.34. 4,2 еВ.
- 15.35.  $\langle W \rangle = 3,3$  еВ.
- 15.36.  $\omega = 31,4$  кДж/см<sup>3</sup>.
- 15.37.  $4,6 \cdot 10^{27}$  м<sup>-3</sup>.
- 15.38. 5,42.
- 15.39. В 3 рази.
- 15.40. 0,1%.
- 15.41.  $v_{max} = 1,57 \cdot 10^6$  м/с.
- 15.42.  $1,32 \cdot 10^6$  м/с;  $0,12 \cdot 10^6$  м/с.
- 15.43. 7 раз.
- 15.44.  $N(p) = 8\pi p^2/h^3$ .
- 15.45.  $N(\lambda) = 8\pi/\lambda^4$ .
- 15.46.  $\Delta N = \frac{2,044\pi(m_e W_F)^{3/2} V}{h^3} = 2,75 \cdot 10^{23}$  електронів.
- 15.47.  $\frac{\pi^2 kT}{3W_F} = 0,012$ .
- 15.48.  $\frac{m_n^*}{m_e} = \frac{\hbar^2}{2Am_e} = 0,63; \quad 2/3$ .
- 15.49.  $T = \frac{h^2}{20m_e k} \cdot \left( \frac{3\rho N_A}{\pi M} \right)^{2/3} \cong 32555$  К, тут  $m_e$  – маса електрона,  $k$  – стала Больцмана,  $h$  – стала Планка,  $\rho$  – густина і  $M$  – молярна маса міді,  $N_A$  – число Авогадро.
- 15.50.  $v_{\text{дмов}} = \sqrt{\frac{2W_F(0)}{m_e}} = 1,58 \cdot 10^6$  м/с;  
 $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{6W_F(0)}{5m_e}} = 1,22 \cdot 10^6$  м/с.
- 15.51.  $\tau = \frac{m_e}{ne^2\rho} = 26 \cdot 10^{-15}$  с = 26 ф;  $\langle l \rangle = 31,7$  нм;  
 $\langle r \rangle \approx \sqrt[3]{\frac{m_a}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0,227$  нм, де  $m_a$  – маса атома міді,  $\rho$  – питомий опір міді;  $\langle l \rangle / \langle r \rangle \approx 140$ .
- 15.52.  $p = \sqrt[3]{\frac{g}{\pi^2}} \cdot \frac{h^2}{20m_e} \cdot n^{5/3} \approx 5 \cdot 10^9$  Па = 5 ГПа.
- 15.53.  $\varkappa = \frac{3m_e}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n^{5/3}} = 1,56 \cdot 10^{-11}$  Па<sup>-1</sup> =  
 $= 1,5 \cdot 10^{-6}$  атм<sup>-1</sup>.

## 16. Напівпровідники

- 16.18. 0;  $2,1 \cdot 10^{-9}$ .
- 16.19. 1 eВ; 0,5 eВ.
- 16.20. 0,26 eВ.
- 16.21.  $2,74 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ ;  $1,14 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ ;  $1,02 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ .
- 16.22. 0,19 eВ.
- 16.23. 
$$n(T_2) = n(T_1) \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \cdot \exp\left\{\frac{W_g(T_1) + aT_1}{2k} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_2 T_1}\right\} =$$
  
 $= 2,15 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ , де  $T_1 = 300 \text{ К}$ ,  $n(T_1)$  – концентрація носіїв заряду в германії при  $T_1$ .
- 16.24.  $0,12 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ .
- 16.25.  $0,45 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .
- 16.26.  $5,05 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ .
- 16.27.  $2 \text{ мОм} \cdot \text{м}$ .
- 16.28.  $52 \text{ м/с}$ ;  $20 \text{ м/с}$ ;  $3152 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ;  $0,38 \text{ мкА}$ .
- 16.29.  $\rho_3 = \rho_2 \exp\left\{\frac{T_1(T_2 - T_3)}{T_3(T_2 - T_1)} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}\right\} = 30 \text{ кОм} \cdot \text{см}$ .
- 16.30.  $0,152 \text{ кОм} \cdot \text{м}$ .
- 16.31.  $0,014 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .
- 16.32. а) Зменшиться в 1,03 рази; б) збільшиться в 1,21 рази.
- 16.33.  $\alpha = -0,047 \text{ К}^{-1}$ .
- 16.34.  $\alpha = -0,071 \text{ К}^{-1}$ .
- 16.35.  $\alpha = -0,046 \text{ К}^{-1}$ .
- 16.36.  $1,45 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ .
- 16.37.  $59,2 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .
- 16.38.  $\rho = 0,037 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ .
- 16.39.  $2422 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .
- 16.40.  $1,1 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ .
- 16.41.  $5,54 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ ;  $1,04 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ .
- 16.42.  $8,7 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ;  $50 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ ;  $400 \text{ Ом}$ .
- 16.43.  $3,68 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ;  $10 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ .
- 16.44.  $1,5 \cdot 10^{-11}$ .
- 16.45.  $137 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ .
- 16.46. 1,44 eВ; 0,34 eВ.
- 16.47.  $W_g = 1,2 \text{ eВ}$ ;  $\Delta W_p = 0,06 \text{ eВ}$ .
- 16.48.  $\sigma = 3,77 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ .
- 16.49.  $W_{Fn} = 0,58 \text{ eВ}$ .
- 16.50.  $W_{Fp} = 0,17 \text{ eВ}$ .
- 16.51.  $W_{Fn} = 0,73 \text{ eВ}$ .

- 16.52.  $W_{Fn} = 0,48 \text{ eB}$ .
- 16.53.  $u_n - u_p = E_{\perp} / (E_{\parallel} B) = 0,2 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .
- 16.54. а)  $n$ -тип; б)  $2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{Кл}$ ; в)  $3,13 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ ;  
г)  $0,36 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .
- 16.55.  $0,041 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ;  $1,7 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ .
- 16.56.  $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ;  $1,25 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$ .
- 16.57.  $1,25 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$ .
- 16.58.  $2/7$ .
- 16.59.  $0,44 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .
- 16.60.  $1; 4,4$ .
- 16.61.  $1,16 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ ;  $0,36 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .
- 16.62.  $U = \frac{U_{Hl}}{u_p B b} = 2525 \text{ В}$ .
- 16.63.  $0,01 \text{ с}$ .
- 16.64.  $141 \text{ мкс}$ ;  $6,8 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$ .
- 16.65.  $\rho = 96,7 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ .
- 16.66.  $4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ .
- 16.67.  $\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{I \alpha \tau \beta}{n_n} \left( 1 + \frac{u_p}{u_n} \right) = 12\%$ .
- 16.68.  $4,3\%$ .
- 16.69.  $48 \text{ В/м}$ .
- 16.70.  $j \approx 0,1 \text{ А/см}^2$ .
- 16.71.  $0,88 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ .
- 16.72.  $9,1 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ ;  $0,0044 \text{ м}^2/\text{с}$ .
- 16.73.  $0,01 \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $0,38 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .
- 16.74. а)  $n = 1,04 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ ;  $u_n = R_H / \rho = 0,37 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ;  
б)  $\langle l \rangle = \frac{R_H}{e \rho} \sqrt{\frac{8 m_e k T}{\pi}} = 0,227 \text{ мкм}$ .
- 16.75.  $L_p = 2,2 \text{ мм}$ .

## 17. Контактні явища в напівпровідниках

- 17.14.  $0,12 \text{ eB}$ ;  $0,32 \text{ eB}$ ;  $0,20 \text{ eB}$ .
- 17.15.  $0,31 \text{ В}$ .
- 17.16.  $0,33 \text{ мкм}$ .
- 17.17.  $W_{pn} = 0,71 \text{ eB}$ ,  $x = 3 \text{ мкм}$ .
- 17.18.  $0,65 \text{ eB}$  і  $3,0 \text{ мкм}$  для Si;  $0,25 \text{ eB}$  і  $2,1 \text{ мкм}$  для Ge.
- 17.19.  $x = \frac{6 \varepsilon \varepsilon_0 E_m}{5 e N_d} = 0,106 \text{ мкм}$ .

- 17.20.  $W_{pn} = 0,83 \text{ eB}$ ,  $E_m = 50 \text{ кВ/см}$ .
- 17.22. а)  $U_{pn} = (0,31-0,38) \text{ В}$ ; б)  $x=0,33 \text{ мкм}$ ; в)  $C = 4,3 \text{ нФ}$ ;  
г)  $E_m = 1,9 \text{ МВ/м}$ .
- 17.23. а)  $C = 8140 \text{ пФ}$ ; б)  $q = 6,3 \text{ нКл}$ ;  
в)  $j = \frac{en_i^2 E_m}{2} \left( \frac{u_n}{N_a} + \frac{u_p}{N_d} \right) = 27,5 \text{ нА/см}^2$ .
- Розрахунок  $E_m$  див. задачу 17.4 і 17.5.
- 17.24.  $\Delta C = 1,75 \text{ нФ}$ .
- 17.25. 1)  $p_p \cong 10^{24} \text{ м}^{-3}$ ;  $n_p \cong 5,76 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}$ ;  
 $n_n \cong 10^{22} \text{ м}^{-3}$ ;  $p_n \cong 5,76 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ ;  
2)  $U_{pn} \approx 0,43 \text{ В}$ ; 3)  $I_s = \frac{en_i^2 D_p S}{N_d x}$ .

## 18. Атомне ядро. Радіоактивність. Ядерні реакції

- 18.10. 200 м.
- 18.11.  $r \approx \frac{\hbar}{m_{\pi} c} \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ м} = 1,4 \text{ Ф}$ .
- 18.14.  $4,6 \cdot 10^9$  років.
- 18.15. 16,2 роки.
- 18.16. 0,33 мкКи.
- 18.17. 63%.
- 18.18. 2,99 кг; 9,07 кг.
- 18.19.  $T=12,25$  дня;  $\tau = 17,67$  дня.
- 18.20. 93 роки.
- 18.21.  $4,44 \cdot 10^9$  років.
- 18.22. а) 97 мКи; б)  $2,7 \cdot 10^{-12}$  мКи.
- 18.23.  $7,22 \cdot 10^5$  мКи.
- 18.24. 1)  $\sim 10^{-4} \%$ ; 2) 50 %; 3) 62 %.
- 18.25.  $t = \frac{T \ln(\Delta t_0 / \Delta t_1)}{\ln 2} \cong 2 \text{ год}$ .
- 18.26. 61 г.
- 18.27. 8,5 мг/год.
- 18.28. 2700 тон.
- 18.29. 7,28 МеВ.

## 1. ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$ $\csc^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1$ $\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1$ $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$
$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}}$ $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}}$ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ $\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$
$\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$



$\cos(\alpha / 2) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$	
---	--

## 2. ФОРМУЛИ ДЛЯ НАБЛИЖЕНИХ РОЗРАХУНКІВ

$\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x,$	$x < 0,031$
$(1 \pm x)^{1/2} \approx 1 \pm \frac{1}{2} x,$	$x < 0,085$
$\exp(\pm x) \approx 1 \pm x + \frac{1}{2} x^2,$	$x < 0,045$
$\ln(1 \pm x) \approx x,$	$x < 0,045$
$\sin x \approx x,$	$x < 0,077 \text{ рад } (4,4^\circ)$
$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2} x^2,$	$x < 0,387 \text{ рад } (22,2^\circ)$

## 3. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ТА ІНТЕГРАЛІВ

Фун- кція	Похідна	Функція	Похідна	Функція	Похідна
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$e^x$	$e^x$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$e^{nx}$	$ne^{nx}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - v'u}{v^2}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$			$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$\int_0^{\infty} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (n \neq -1)$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ $\int \sin x dx = -\cos x$ $\int \cos x dx = \sin x$ $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x$ $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int e^x dx = e^x$ $\int a^{bx} dx = \frac{a^{bx}}{b \ln a}$ $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}$ $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$
---	--

$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta}$	$\int e^{-\beta x} x dx = \frac{1}{\beta^2}$
$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$	$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} x dx = \frac{1}{2\beta}$
$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} x^2 dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}},$	$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} x^3 dx = \frac{1}{2\beta^2}$

**Інтегрування «по частинах»:**  $\int u dv = uv - \int v du$

### Значення деяких визначених інтегралів

$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \sqrt{\pi}/2, & n = 1/2 \\ 1, & n = 1 \\ 2, & n = 2 \end{cases}$	$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}/2, & n = 0 \\ 1/2, & n = 1 \\ \sqrt{\pi}/4, & n = 2 \\ 1/2, & n = 3 \end{cases}$
$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2,31, & n = 1/2 \\ \pi^2/6, & n = 1 \\ 2,405, & n = 2 \\ \pi^4/15, & n = 3 \\ 24,9 & n = 4 \end{cases}$	$\int_0^a \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0,225, & a = 1 \\ 1,18, & a = 2 \\ 2,56, & a = 3 \\ 4,91, & a = 4 \\ 6,43, & a = 5 \\ 6,43, & a = 10 \end{cases}$

### 4. ДЕЯКІ ЧИСЛА

$e = 2,718282$	$\ln x = 2,3026 \lg x$
$\lg e = 0,434294$	$\pi = 3,1415926$
$\ln 10 = 2,302585$	$\pi^2 = 9,869624$
	$\sqrt{\pi} = 1,7724538$

$\lg x = 0,4343 \ln x$	
------------------------	--

## 5. ДЕСЯТИЧНІ ПРИСТАВКИ ДО ОДИНИЦЬ

Г – гіга ( $10^9$ ) М – мега ( $10^6$ ) к – кіло ( $10^3$ )	г – гекто ( $10^2$ ) с – санти ( $10^{-2}$ ) м – міллі ( $10^{-3}$ )	мк – мікро ( $10^{-6}$ ) н – нано ( $10^{-9}$ ) п – піко ( $10^{-12}$ )
---	--	---

## 6. ГУСТИНИ РЕЧОВИН

Тверді речовини	$\rho \cdot 10^{-3}, \text{ кг/м}^3$
АЛМАЗ	3,5
АЛЮМІНІЙ	2,7
ВОЛЬФРАМ	19,1
ГРАФІТ	1,6
ЗАЛІЗО(СТАЛЬ)	7,8
ЗОЛОТО	19,3
КАДМІЙ	8,65
КОБАЛЬТ	8,9
ЛІД	0,916
МІДЬ	8,9
МОЛІБДЕН	10,2
НАТРІЙ	0,97
НІКЕЛЬ	8,9
ОЛОВО	7,4
ПЛАТИНА	21,5
КОРОК	0,20
СВИНЕЦЬ	11,3

СРІБЛО	10,5
ТИТАН	4,5
УРАН	19,0
ПОРЦЕЛЯНА	2,3
ЦИНК	7,0
<b>Рідини</b>	<b><math>\rho \cdot 10^{-3}, \text{ кг/м}^3</math></b>
БЕНЗОЛ	0,88
ВОДА	1,00
ГЛІЦЕРИН	1,26
КАСТОРОВЕ МАСЛО	0,90
ГАС	0,80
РТУТЬ	13,6
СПИРТ	0,79
ВАЖКА ВОДА	1,1
ЕФІР	0,72

<b>Гази (за нормальних умов)</b>	<b><math>\rho, \text{ кг/м}^3</math></b>
АЗОТ	1,25
АМІАК	0,77
ВОДЕНЬ	0,09
ПОВІТРЯ	1,293
КИСЕНЬ	1,43
МЕТАН	0,72
ВУГЛЕКИСЛИЙ ГАЗ	1,98
ХЛОР	3,21

## 7. ДІЕЛЕКТРИЧНІ ПРОНИКНОСТІ $\epsilon$ (відносні)

Діелектрик	$\epsilon$	Діелектрик	$\epsilon$
ВОДА	81	СЛЮДА	7,5
ПОВІТРЯ	1,00058	СПИРТ	26
ГАС	2,0	СКЛО	6,0
ПАРАФІН	2,0	ПОРЦЕЛЯНА	6,0
ПЛЕКСИГЛАС	3,5	ЕБОНІТ	2,7
ПОЛІЕТИЛЕН	2,3		

## 8. ПИТОМИЙ ОПІР ПРОВІДНИКІВ

Провідник	Питомий опір (якщо $t = 20^\circ\text{C}$ ) $\rho$ , нОм · м	Температурний коефіцієнт $\alpha \cdot 10^3$ , $\text{K}^{-1}$
АЮМІНІЙ	26	4,5
ВОЛЬФРАМ	50	4,8
ЗАЛІЗО	90	6,5
ЗОЛОТО	20	4,0
МІДЬ	16	4,3
СВИНЕЦЬ	190	4,2
СРІБЛО	15	4,1
ГРАФІТ	3900	-0,8

## 9. ПОКАЗНИКИ ЗАЛОМЛЕННЯ

Речовина	$n$	Речовина	$n$		
ПОВІТРЯ	1,00029	СКЛО	1,50		
ВОДА	1,33	АЛМАЗ	2,42		
Примітка: відомо, що, показники заломлення залежать від природи речовини та довжини хвилі світла, тому наведені в цій таблиці значення $n$ потрібно розглядати як умовні.					
Довжина хвилі $\lambda$ , нм	КОЛІР	Ісландський шпат		Кварц	
		$n_e$	$n_o$	$n_e$	$n_o$
687	ЧЕРВОНИЙ	1,484	1,653	1,550	1,541
656	ОРАНЖЕВИЙ	1,485	1,655	1,551	1,542
589	ЖОВТИЙ	1,486	1,658	1,553	1,544
527	ЗЕЛЕНИЙ	1,489	1,664	1,556	1,547
486	БЛАКИТНИЙ	1,491	1,668	1,559	1,550
431	СИНЬО-ФІОЛЕТОВИЙ	1,495	1,676	1,564	1,554
400	ФІОЛЕТОВИЙ	1,498	1,683	1,568	1,558

## 10. РОБОТА ВИХОДУ ЕЛЕКТРОНА З МЕТАЛІВ

МЕТАЛ	A, eB	МЕТАЛ	A, eB	МЕТАЛ	A, eB
АЛЮМІНІЙ	3,74	КАЛІЙ	2,15	НІКЕЛЬ	4,84
БАРІЙ	2,29	КОБАЛЬТ	4,25	ПЛАТИНА	5,29
ВІСМУТ	4,62	ЛІТІЙ	2,39	СРІБЛО	4,28
ВОЛЬФРАМ	4,50	МІДЬ	4,47	ТИТАН	3,92
ЗАЛІЗО	4,36	МОЛІБДЕН	4,27	ЦЕЗІЙ	1,80
ЗОЛОТО	4,58	НАТРІЙ	2,27	ЦИНК	3,74

## 11. АСТРОНОМІЧНІ ВЕЛИЧИНИ


Космічне тіло	Середній радіус, м	Маса, кг	Середня густина, $10^3 \text{ кг/м}^3$	Період обертання навколо осі, доба
СОНЦЕ	$6,95 \cdot 10^8$	$1,97 \cdot 10^{30}$	1,41	25,4
ЗЕМЛЯ	$6,37 \cdot 10^6$	$5,96 \cdot 10^{24}$	5,52	1,00
МІСЯЦЬ	$1,74 \cdot 10^6$	$7,30 \cdot 10^{22}$	3,30	27,3

Планети сонячної системи	Середня відстань від Сонця, $10^6 \text{ км}$	Період обертання навколо Сонця, в роках
МЕРКУРІЙ	57,87	0,241
ВЕНЕРА	108,14	0,615
ЗЕМЛЯ	149,50	1,000
МАРС	227,79	1,881
ЮПІТЕР	777,8	11362
САТУРН	1426,1	29,458
УРАН	2867,7	84,013
НЕПТУН	4494	164,79
ПЛУТОН	9508	248,43



**12. ДЕЯКІ ПАРАМЕТРИ НАПІВПРОВІДНИКІВ**  
( $T=300\text{ K}$ )

Параметри напівпровідника	Напівпровідник		
	Ge	Si	GaAs
Ширина забороненої зони $W_g$ , eV	0,72	1,1	1,4
Власна концентрація $n_i$ , $\text{м}^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{19}$	$1,1 \cdot 10^{16}$	$1,4 \cdot 10^{13}$
Рухливість електронів $u_n$ , $\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$	0,39	0,13	1
Рухливість дірок $u_p$ , $\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$	0,19	0,05	0,04
Відносна діелектрична проникність $\epsilon$ , відн.од.	16	12,5	12
Коефіцієнт дифузії електронів $D_n \cdot 10^3$ , $\text{м}^2/\text{с}$	10	3,4	25
Коефіцієнт дифузії дірок $D_p \cdot 10^3$ , $\text{м}^2/\text{с}$	4,4	1,3	
Відносна ефективна маса електронів $m_n^*/m_e$ , відн.один.	0,55	1,06	0,068
Відносна ефективна маса дірок $m_p^*/m_e$ , відн.один.	0,36	0,59	0,50

I		Періодична система елементів Д.І.Менделєєва						VII		VIII			
1	(H)							1 1,0079	H	2 4,0026	He		
		II	III	IV	V	VI	Водень		Гелій				
2	Li Літій	Be Берилій	B Бор	C Вуглець	N Азот	O Кисень	F Фтор	Ne Неон					
3	Na Натрій	Mg Магній	Al Алюміній	Si Кремній	P Фосфор	S Сірка	Cl Хлор	Ar Аргон					
4	K Калій	Ca Кальцій	Sc Скандій	Ti Титан	V Ванадій	Cr Хром	Mn Марганець	Fe Залізо	Co Кобальт	Ni Нікель			
	Cu Мідь	Zn Цинк	Ga Галій	Ge Германій	As Миш'як	Se Селен	Br Бром	Kr Криптон					
	Rb Рубідій	Sr Стронцій	Y Ітрій	Zr Цирконій	Nb Ніобій	Mo Молибден	Tc Технецій	Ru Рутеній	Rh Родій	Pd Паладій			
	Ag Срібло	Cd Кадмій	In Індій	Sn Олово	Sb Сурма	Te Телур	I Йод	Xe Ксенон					
6	Cs Цезій	Ba Барій	La* Лантан	Hf Гафній	Ta Тантал	W Вольфрам	Re Реній	Os Осмій	Ir Іридій	Pt Платина			
	Au Золото	Hg Ртуть	Tl Талій	Pb Свинець	Bi Вісмут	Po Полоній	At Астат	Rn Радон					
7	Fr Францій	Ra Радій	Ac** Актиній	Ku Курчатовий	105								
*лантаноїди													
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
58 140,12 Церій	59 140,907 Празеодим	60 144,24 Неодим	61 145 Прометій	62 150,4 Самарій	63 151,96 Європій	64 157,25 Гадоліній	65 158,924 Тербій	66 162,50 Диспрозій	67 164,930 Гольмій	68 167,26 Ербій	69 168,93 Тулій	70 173,04 Ітербій	71 174,97 Лютецій
**актиноїди													
Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr
90 232,03 Торій	91 231 Протактиній	92 238,03 Уран	93 237 Нептуній	94 244 Плутоній	95 243 Америцій	96 247 Кюріум	97 247 Берклій	98 251 Каліфорній	99 254 Ейнштейній	100 257 Фермій	101 258 Менделєєвій	102 258 (Нобелій)	103 256 (Лоуренцій)

Складові елементи

Атомний номер

Атомна маса

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

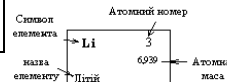
Li 3

Li 3

Li 3

Li 3

Li 3



### 13. РОЗПОДІЛ ЕЛЕКТРОНІВ ПО ЕНЕРГЕТИЧНИХ РІВНЯХ В АТОМАХ

Еле- мент	K	L	M	N	Еле- мент	K	L	M	N	O	P	Еле- мент	K	L	M	N	O	P	Q
H	1				Rb	2	8	18	8	1		Hf	2	8	18	32	10	2	
He	2				Sr	2	8	18	8	2		Ta	2	8	18	32	11	2	
Li	2	1			Y	2	8	18	9	2		W	2	8	18	32	13	2	
Be	2	2			Zr	2	8	18	10	2		Re	2	8	18	32	13	2	
B	2	3			Nb	2	8	18	12	1		Os	2	8	18	32	14	2	
C	2	4			Mo	2	8	18	13	1		Ir	2	8	18	32	15	2	
N	2	5			Tc	2	8	18	13	2		Pt	2	8	18	32	17	1	
O	2	6			Ru	2	8	18	15	1		Au	2	8	18	32	18	1	
F	2	7			Rh	2	8	18	16	1		Hg	2	8	18	32	18	2	
Ne	2	8			Pd	2	8	18	18	0		Tl	2	8	18	32	18	3	
Na	2	8	1		Ag	2	8	18	18	1		Pb	2	8	18	32	18	4	
Mg	2	8	2		Cd	2	8	18	18	2		Bi	2	8	18	32	18	5	
Al	2	8	3		In	2	8	18	18	3		Po	2	8	18	32	18	6	
Si	2	8	4		Sn	2	8	18	18	4		At	2	8	18	32	18	7	
P	2	8	5		Sb	2	8	18	18	5		Rn	2	8	18	32	18	8	
S	2	8	6		Te	2	8	18	18	6		Fr	2	8	18	32	18	8	1
Cl	2	8	7		I	2	8	18	18	7		Ra	2	8	18	32	18	8	2
Ar	2	8	8		Xe	2	8	18	18	8		Ac	2	8	18	32	18	9	2
K	2	8	8	1	Cs	2	8	18	18	8	1	Th	2	8	18	32	18	10	2
Ca	2	8	8	2	Ba	2	8	18	18	8	2	Pa	2	8	18	32	20	9	2
Sc	2	8	9	2	La	2	8	18	18	9	2	U	2	8	18	32	21	9	2
Ti	2	8	10	2	Ce	2	8	18	19	9	2	Np	2	8	18	32	22	9	2
V	2	8	11	2	Pr	2	8	18	21	8	2	Pu	2	8	18	32	24	8	2
Cr	2	8	13	1	Nd	2	8	18	22	8	2	Am	2	8	18	32	25	8	2
Mn	2	8	13	2	Pm	2	8	18	23	8	2	Cm	2	8	18	32	25	9	2
Fe	2	8	14	2	Sm	2	8	18	24	8	2	Bk	2	8	18	32	26	9	2
Co	2	8	15	2	Eu	2	8	18	25	8	2	Cf	2	8	18	32	28	8	2
Ni	2	8	16	2	Gd	2	8	18	25	9	2	Es	2	8	18	32	29	8	2
Cu	2	8	18	1	Tb	2	8	18	27	8	2	Fm	2	8	18	32	30	8	2
Zn	2	8	18	2	Dy	2	8	18	28	8	2	Md	2	8	18	32	31	8	2
Ga	2	8	18	3	Ho	2	8	18	29	8	2	(No)	2	8	18	32	32	8	2
Ge	2	8	18	4	Er	2	8	18	30	8	2	(Lr)	2	8	18	32	32	9	2
As	2	8	18	5	Tm	2	8	18	31	8	2	Ku	2	8	18	32	32	10	2
Se	2	8	18	6	Yb	2	8	18	32	8	2								
Br	2	8	18	7	Lu	2	8	18	32	9	2								
Kr	2	8	18	8															

## 14. ТАБЛИЦЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ІЗОТОПІВ

Ізотоп	Спін ядра	Надлишок маси атома $M-A$ , а.о.м.	Тип розпаду	Період напіврозпаду	Енергія $\alpha$ -, $\beta$ -частинок $T_{\beta \max}$ , MeV
$n$	1/2	0,008665	$\beta^-$	11,7 хв	0,78
${}_1\text{H}$	1/2	0,007825			
${}_1\text{H}^2$	1	0,014102			
${}_1\text{H}^3$	1/2	0,016049	$\beta^-$	12,3 роки	0,018
${}_2\text{He}^3$	1/2	0,016030			
${}_2\text{He}^4$	0	0,002604			
${}_3\text{Li}^6$	1	0,015126			
${}_3\text{Li}^7$	3/2	0,016005			
${}_4\text{Be}^7$	3/2	0,016931	K	53 доби	
${}_4\text{Be}^8$	0	0,005308	$2\alpha$	$10^{-16}$ сек	0,039
${}_4\text{Be}^9$	3/2	0,012186			
${}_4\text{Be}^{10}$	0	0,013535	$\beta^-$	$2,5 \cdot 10^6$ років	0,555
${}_5\text{B}^{10}$	3	0,012939			
${}_5\text{B}^{11}$	3/2	0,009305			
${}_6\text{C}^{11}$	3/2	0,011431	$\beta^+$	20,4 хв	0,97
${}_6\text{C}^{12}$	0	0			
${}_6\text{C}^{13}$	1/2	0,003354			
${}_6\text{C}^{14}$	0	0,003242	$\beta^-$	5570 років	0,155
${}_7\text{N}^{13}$	—	0,005739	$\beta^+$	10 хв	1,2
${}_7\text{N}^{14}$	1	0,003074			
${}_7\text{N}^{15}$	1/2	0,000108			
${}_8\text{O}^{15}$	—	0,003072	$\beta^+$	2,1 хв	1,68
${}_8\text{O}^{16}$	0	-0,005085			
${}_8\text{O}^{17}$	5/2	-0,000867			
${}_8\text{O}^{18}$	0	-0,000840			
${}_9\text{F}^{18}$	—	0,000950	$\beta^+$	1,87 години	0,649
${}_9\text{F}^{19}$	1/2	-0,001595			
${}_9\text{F}^{20}$		-0,000015	$\beta^-$	12 с	5,42
${}_{10}\text{Ne}^{20}$	0	-0,007560			
${}_{10}\text{Ne}^{21}$	—	-0,006151			
${}_{10}\text{Ne}^{22}$	0	-0,008616			
${}_{11}\text{Na}^{22}$	3	-0,005565	$\beta^+$	2,6 роки	0,540
${}_{11}\text{Na}^{23}$	3/2	-0,010227			

Ізотоп	Спін ядра	Надлишок маси атома М-А, а.о.м.	Тип розпаду	Період напіврозпаду	Енергія $\alpha$ -, $\beta$ -частинок $T_{\beta \max}$ , MeV
$_{11}\text{Na}^{24}$	4	-0,009033	$\beta^-$	15 годин	1,39
$_{12}\text{Mg}^{23}$	—	-0,005865	$\beta^+$	11 с	2,95
$_{12}\text{Mg}^{24}$	0	-0,014956			
$_{12}\text{Mg}^{25}$	5/2	-0,014160			
$_{12}\text{Mg}^{26}$	0	-0,017409			
$_{12}\text{Mg}^{27}$	1/2	-0,015655	$\beta^-$	9,5 хв	1,75 і 1,59
$_{13}\text{Al}^{26}$	—	-0,013100	$\beta^+$	6,7 с	3,20
$_{13}\text{Al}^{27}$	5/2	-0,018465			
$_{13}\text{Al}^{28}$	3	-0,018092	$\beta^-$	2,3 хв	2,86
$_{14}\text{Si}^{28}$	0	-0,023073			
$_{14}\text{Si}^{29}$	1/2	-0,023509			
$_{14}\text{Si}^{30}$	0	-0,026239			
$_{14}\text{Si}^{31}$	—	-0,021680	$\beta^-$	2,65 години	1,47
$_{15}\text{P}^{30}$	—	-0,024651	$\beta^+$	2,5 хв	3,24
$_{15}\text{P}^{31}$	1/2	-0,026237			
$_{15}\text{P}^{32}$	—	-0,026092	$\beta^-$	14,3 доби	1,71
$_{16}\text{S}^{32}$	0	-0,027926			
$_{16}\text{S}^{33}$	1/2	-0,028540			
$_{16}\text{S}^{34}$	0	-0,032136			
$_{16}\text{S}^{35}$	3/2	-0,030966	$\beta^-$	87 доби	0,167
$_{17}\text{Cl}^{35}$	3/2	-0,031146			
$_{17}\text{Cl}^{36}$	2	-0,031688	$\beta^-, K$	3,1 $10^5$ років	0,714
$_{17}\text{Cl}^{37}$	3/2	-0,034104			
$_{18}\text{Ar}^{36}$	0	-0,032452			
$_{18}\text{Ar}^{37}$	3/2	-0,033228	$K$	32 доби	
$_{18}\text{Ar}^{38}$		-0,035679	$\beta^-$	265 років	0,565
$_{18}\text{Ar}^{39}$	0	-0,037616			
$_{19}\text{K}^{39}$	3/2	-0,036286			
$_{19}\text{K}^{42}$	2	-0,037583	$\beta^-$	1,52 години	3,55 і 1,99
$_{24}\text{Cr}^{51}$	7/2	-0,055214	$K$	28 доби	
$_{25}\text{Mn}^{55}$	5/2	-0,061946			
$_{27}\text{Co}^{58}$	2	-0,064246	$K, \beta^-$	72 доби	0,47
$_{27}\text{Co}^{59}$	7/2	-0,066811			
$_{27}\text{Co}^{60}$	4	-0,066194	$\beta^-$	5,2 роки	0,31

Ізотоп	Спін ядра	Надлишок маси атома М–А, а.о.м.	Тип розпаду	Період напіврозпаду	Енергія $\alpha$ -, $\beta$ -частинок $T_{\beta \max}$ , MeV
$^{63}_{29}\text{Cu}$	3/2	-0,070406			
$^{65}_{29}\text{Cu}$	3/2	-0,072214			
$^{65}_{30}\text{Zn}$	5/2	-0,070766	$K, \beta^+$	245 доби	0,325
$^{82}_{35}\text{Br}$	6	-0,083198	$\beta^-$	36 годин	0,456
$^{88}_{38}\text{Sr}$	0	-0,09436			
$^{89}_{38}\text{Sr}$	5/2	-0,09257	$\beta^-$	51 доба	1,46
$^{90}_{38}\text{Sr}$	0	-0,09223	$\beta^-$	28 років	0,535
$^{90}_{39}\text{Y}$	2	-0,09282	$\beta^-$	64 години	2,24
$^{94}_{40}\text{Zr}$	—	-0,09640			
$^{107}_{47}\text{Ag}$	1/2	-0,09303			
$^{127}_{53}\text{I}$	5/2	-0,09565			
$^{128}_{53}\text{I}$	1	-0,09418	$K, \beta^+$	25 хв	2,12 і 1,67
$^{140}_{58}\text{Ce}$	—	-0,09460			
$^{197}_{79}\text{Au}$	3/2	-0,03345			
$^{198}_{79}\text{Au}$	2	-0,03176	$\beta^-$	2,7 доби	0,96
$^{204}_{81}\text{Tl}$	—	-0,02611	$\beta^-$	4,1 роки	0,77
$^{206}_{82}\text{Pb}$	0	-0,02554			
$^{207}_{82}\text{Pb}$	1/2	-0,02410			
$^{208}_{82}\text{Pb}$	0	-0,02336			
$^{209}_{83}\text{Bi}$	9/2	-0,01958			
$^{210}_{83}\text{Bi}$	4	-0,01589	$\alpha$	$2,6 \cdot 10^6$ роки	4,97
$^{210}_{84}\text{Po}$	—	-0,01713	$\alpha$	138 діб	5,3
$^{222}_{86}\text{Rn}$	—	0,01753	$\alpha$	3,8 доби	5,49
$^{226}_{88}\text{Ra}$	0	0,02536	$\alpha$	1620 років	4,78 і 4,59
$^{232}_{90}\text{Th}$	0	0,03821	$\alpha$	$1,4 \cdot 10^{10}$ років	4,00 і 3,98
$^{233}_{90}\text{Th}$	—	0,04143	$\beta^-$	22 хв	1,23
$^{234}_{92}\text{U}$	0	0,04090	$\alpha$	$2,5 \cdot 10^5$ років	4,76 і 4,72
$^{235}_{92}\text{U}$	7/2	0,04393	$\alpha$	$7,1 \cdot 10^8$ років	4,20 – 4,58
$^{236}_{92}\text{U}$	0	0,04573	$\alpha$	$2,4 \cdot 10^7$ років	4,45 і 4,50
$^{238}_{92}\text{U}$	0	0,05076	$\alpha$	$4,5 \cdot 10^9$ років	4,13 і 4,18
$^{239}_{92}\text{U}$	—	0,05432	$\beta^-$	23,5 хв	1,21
$^{238}_{94}\text{Pu}$	—	0,04952	$\alpha$	89,6 років	5,50 і 5,45
$^{239}_{94}\text{Pu}$	1/2	0,05216	$\alpha$	$2,4 \cdot 10^4$ років	5,15–5,10

## 15. ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ КОНСТАНТИ

Швидкість світла у вакуумі	$c = \begin{cases} 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с} \\ 2,998 \cdot 10^{10} \text{ см/с} \end{cases}$
Гравітаційна стала	$G = \begin{cases} 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2) \\ 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2) \end{cases}$
Стандартне прискорення вільного падіння	$g = \begin{cases} 9,807 \text{ м/с}^2 \\ 980,7 \text{ см/с}^2 \end{cases}$
Число Авогадро	$N_A = \begin{cases} 6,025 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1} \\ 6,025 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \end{cases}$
Універсальна газова стала	$R = \begin{cases} 8,314 \text{ Дж/моль} \\ 8,314 \cdot 10^7 \text{ ерг/моль} \end{cases}$
Стала Больцмана	$k = \begin{cases} 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \\ 1,380 \cdot 10^{-16} \text{ ерг/К} \end{cases}$
Елементарний заряд	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Маса електрона	$m_e = \begin{cases} 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \\ 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ г} \\ 0,511 \text{ МеВ} \end{cases}$
Питомий заряд електрона	$\frac{e}{m_e} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Маса протона	$m_p = \begin{cases} 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 1,672 \cdot 10^{-24} \text{ г} \end{cases}$
Стала Стефана-Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Стала закону зміщення Віна	$b = 0,29 \text{ см} \cdot \text{К}$

Стала Планка	$\frac{h}{2\pi} = \hbar = \begin{cases} \frac{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{1,054 \cdot 10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с}} \\ 0,6582 \cdot 10^{-15} \text{ еВ} \cdot \text{с} \end{cases}$
Стала Рідберга	$R_{\lambda} = \begin{cases} 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \\ 1,097 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1} \end{cases}$ $R_{\omega} = 2,067 \cdot 10^{16} \text{ рад/с}$
Перший Боровський радіус	$r_1 = a_0 = \begin{cases} 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м} \\ 0,529 \text{ Å} \end{cases}$
Енергія зв'язку електрона в атомі водню	$W = 13,56 \text{ еВ}$
Атомна одиниця маси	$1 \text{ а.о.м.} = \begin{cases} \frac{1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}}{1,660 \cdot 10^{-24} \text{ г}} \\ 931,4 \text{ МеВ} \end{cases}$
Електрична стала вакууму	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$
Магнітна стала вакууму	$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Гн/м}$



## 16. ЛІТЕРАТУРА

1. Скіцько І.Ф., Скіцько О.І. Фізика (Фізика для інженерів): Підручник /: - Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2017.- 513с. - Назва з екрану. - Доступ: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19035>
2. Лопатинський Е.С., Зачек І.Р., Ільчук Г.А., Романишин Б.М. Фізика. Підручник. – Львів: Афіша, 2009.-386с.
- 3.Савельев И.В. Курс общей физики, т. 1, т. 2, т. 3. – М.: Наука, 1978.
4. Волохов А.Н., Воробьев А.А.,Федоров М.Ф.,Чертов А.Г. Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1968.
5. Фиргант Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физике. – М.: Высшая школа, 1977.
6. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.:Наука,1988.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.:Наука, 1979.
8. Бабаджан Е.И., Гервидс В.И., Дубовик В.М., Нерсесов Э. А. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1990.
9. Новодворская Е.М., Дмитриев Э.М. Методика проведение упражнений по физике в вузе – М.: Высшая школа, 1981.
10. Беликов Б.С. Решение задач по физике. Общие методы. – М.: Высшая школа, 1986.
11. Стрелков С.П., Сивухин Д.В., Хайкин С.Э., Эльцин Н.А., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 1977.
12. Сахаров Д.И. Сборник задач по физике. – М.: Государственное учебно-педагогические издательство министерства просвещения РСФСР, 1958.
13. Бонч-Бруевич В.Л., Звягин И. П., Карпенко И. В., Миронов А. Г. Сборник задач по физике полупроводников. – М.: Наука, 1987.
14. Иродов И. Е. Задачи по квантовой физике. – М.: Высшая школа, 1991.

15. Скіцько І.Ф., Корнейко О.В., Скіцько О.І. Фізика. Практикум. В 2 ч. Частина І. Електромагнетизм: навч. посібник /; за заг. ред. І. Ф. Скіцька – К. : Вид-во ІСЗЗІ НТУУ «КПІ», 2013. – 280 с.
16. Скіцько І.Ф., Корнейко О.В., Скіцько О.І. Фізика. Практикум. В 2 ч. Частина 2. Загальна фізика та основи зонної теорії твердих тіл: навч. посібник /; за заг. ред. І. Ф. Скіцька – К. : Вид-во ІСЗЗІ НТУУ «КПІ», 2013. – 400 с.
17. Потыкевич И.В., Скицько И.Ф., Сусь Б.А. Сборник задач по физике, 1 семестр. – К.: КВВИУС им.М.И.Калинина, 1981.
18. Потыкевич И.В., Скицько И.Ф., Сусь Б.А. Сборник задач по физике, 2 семестр. – К.: КВВИУС им. М.И. Калинина, 1980.
19. Малинко В.М., Потыкевич И.В., Скицько И.Ф., Сусь Б.А. Сборник задач по физике, часть 3. – К.: КВВИУС им. М.И. Калинина, 1982.
20. Скіцько І.Ф. Основи зонної теорії твердих тіл. Елементи фізики напівпровідників. Фізичні явища в  $p$ - $n$ -переході.– Методичний посібник до практичних занять.– К: КВІУЗ, 2000.
21. Задачі із загальної фізики. Розділи «Оптика. Квантова фізика. Молекулярна фізика». Для студентів технічних спеціальностей. [Текст]/ Уклад.: В. П. Бригінець, О. О. Гусева, О. В. Дімарова та ін. – К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 61 с.
22. Задачі із загальної фізики. Розділ «Електрика і магнетизм». Для студентів технічних спеціальностей. [Текст]/ Уклад.: В. П. Бригінець, О. О. Гусева, О. В. Дімарова та ін. – К.: НТУУ «КПІ», 2017. – 81 с.